1. Fyzikálne rovnice, prepočty jednotiek fyzikálnych veličín a nehomogénnych vzťahov

Fyzikálne rovnice vyjadrujú pomocou matematických symbolov vzťahy medzi fyzikálnymi veličinami, ktoré vplývajú na priebeh fyzikálnych dejov. Treba mať vždy na zreteli, že fyzikálne rovnice sú na rozdiel od matematických rovníc nielen vzťahmi kvantít, ale aj kvalít. Preto všetky členy fyzikálnych rovníc sa musia merať jednotkami jednej sústavy, a to Medzinárodnej sústavy jednotiek SI. Potom je fyzikálna rovnica rozmerovo homogénna. Takéto fyzikálne rovnice nazývame veličinovými rovnicami. Rozmerová homogénnosť je nevyhnutnou podmienkou správnosti každej veličinovej rovnice. Kontrola rozmerovej homogénnosti je preto jeden z prvých a nevyhnutných krokov pri riešení fyzikálnych rovníc.

ČSN 01 1301 (Veličiny, jednotky a rovnice) neodporúča používať také tvary fyzikálnych rovníc, ktoré nie sú invariantné vzhľadom na sústavu jednotiek SI. Sú to všetky tie rovnice, ktoré majú rozmerové konštanty vyplývajúce z voľby jednotiek. Napr. rovnica závislosti dráhy od času

$$\frac{s}{[m]} = 4,905\ t^2 \tag{1.1}$$

nie je rozmerovo homogénna, lebo konštanta musí mať rozmer $[LT^{-2}]$. Aby bola rovnica (1.1) použiteľná, treba uviesť jednotku, v ktorej sa má dosadzovať čas, aby dráha s vyšla v metroch.

Rovnice môžu byť rozmerovo nehomogénne i v prípadoch, keď tvar rovnice nepredpokladá používanie dokonalej sústavy jednotiek, napr.:

$$\frac{s}{[cm]} = 50\ gt^2 \tag{1.2}$$

kde s je dráha v cm, g je gravitačné zrýchlenie v m/s^2 a t je čas v sekundách.

V tomto prípade je v rovnici (1.2) priamo zabudovaný prepočítací faktor medzi nekoherentnými jednotkami dĺžky, t.j.

$$\frac{s}{[cm]} = 100\ \frac{gt^2}{2} \tag{1.3}$$

kde 100 je prepočítavací faktor medzi jednotkami cm a m.

Zavádzaním rozmerových konštánt a prepočítavacích faktorov do fyzikálnych rovníc vzniká nebezpečenstvo nesprávneho dosadzovania hodnôt fyzikálnych veličín a okrem toho sa stiera pravý fyzikálny zmysel rovníc.

Rovnicu (1.3) možno považovať za rovnicu číselných hodnôt, ktorá uvádza vzťahy medzi číselnými hodnotami veličín. Pretože číselné hodnoty veličín závisia od voľby jednotiek, závisí od tejto voľby i rovnica číselných hodnôt. Preto, tak ako sme už uviedli pri vysvetlení rozmerovej nehomogénnosti, musia byť v spojení s rovnicou číselných hodnôt vždy uvedené jednotky všetkých veličín, ktorých číselné hodnoty a do rovníc dosadzujú.

Do veličinových rovníc, prísne vzaté, by sme mali dosadzovať veličiny formou súčinu číselnej hodnoty a jednotky. Tento spôsob dosadzovania do veličinových rovníc zaberá veľa miesta, a preto uvedená norma dovoľuje jednoduchší zápis. Keď je známa koherentná jednotka, v ktorej vychádza číselná hodnota výslednej veličiny, možno do veličinovej rovnice dosadiť priamo číselné hodnoty veličín (pretože rovnica číselných hodnôt má rovnaký tvar ako veličinová rovnica) a jednotka výslednej veličiny sa pripíše za výrazom.

Napr. pre výpočet tlaku ideálneho plynu P pri teplote T a molovom objeme v platí veličinová rovnica

$$P = \frac{R.T}{v}$$

Pri teplote 373,15 K a molovom objeme 0,0302 m^3/mol tlak ideálneho plynu je

$$P = \frac{8,314 \; . \; 373,15}{0,0302} \text{ Pa} = 102,727.10^3 \text{ Pa}$$

Výraz na pravej strane rovnice má vždy charakter veličiny a ide o veličinovú rovnicu.

Od 1. 1. 1980 v ČSSR možno používať iba <u>zákonné meracie jednotky</u>, ktoré podľa ČSN 01 1300 sú nasledujúce:

a) jednotky SI (základné, doplnkové a odvodené),
b) násobky a diely jednotiek SI (nepatria do Medzinárodnej sústavy jednotiek SI),
c) vedľajšie jednotky (ale len tie, ktoré norma povoľuje).

ČSN teda prehlasuje za zákonné jednotky niektoré vedľajšie jednotky (napr. km/h; min; t), ktoré nepatria do sústavy SI. To však neznamená, že vo fyzikálnych rovniciach by sme mali používať nekoherentné jednotky, t.j. jednotky, ktoré sú odvodené zo základných jednotiek pomocou násobných koeficientov.

Všade inde v inej súvislosti však vedľajšie jednotky (okrem sústavových) možno použiť. Toto použitie má veľký praktický význam, pretože práve nekoherentné jednotky niektorých fyzikálnych veličín majú veľkú tradíciu a vyjadrenie ich miery v týchto jednotkách vyvoláva konkrétnu predstavu o ich veľkosti. Ide predovšetkým o vedľajšie jednotky tých veličín, ktoré sú uvedené v prílohe, tab. XIII. ČSN 01 1300 povoľuje používať tiež jednotky skombinované z jednotiek SI sústavy a jednotiek vedľajších, ako napr. km/h, m/min, g/l, t/m^3, min^{-1}, kWh a pod.

Vedľajšie jednotky sa definujú výhradne prevodovými vzťahmi k príslušnej odvodenej jednotke sústavy SI (pozri v prílohe tab. XIII). Tým sa zabezpečuje jednak maximálna presnosť definície a jednak nepremenná súvislosť týchto jednotiek s ostatnými jednotkami.

Veľkosť každej fyzikálnej veličiny vyjadrujeme ako súčin číselnej hodnoty a príslušnej jednotky fyzikálnej veličiny, t.j.

$$\text{FYZIKÁLNA VELIČINA} \equiv \text{MIERA . JEDNOTKA} \qquad (1.4)$$

Výraz (1.4) predstavuje na rozdiel od veličinových rovníc a číselných rovníc tzv. <u>fyzikálnu ekvivalenciu</u>, lebo sa porovnávajú rovnaké fyzikálne veličiny.

Ako príklad možno uviesť následujúce fyzikálne ekvivalencie:

$$1 \text{ m} \equiv 100 \text{ cm}; \qquad 1 \text{ cm} \equiv 10 \text{ mm}$$

$$1 \text{ J} \equiv 0{,}239 \text{ cal} \equiv 0{,}1019 \text{ kpm} \equiv 9{,}869.10^{-3} \text{ latm} \equiv 9{,}484.10^{-4} \text{ B.t.u}$$

$$1 \text{ Pa} \equiv 1{,}019.10^{-5} \text{ kp/cm}^2 \equiv 9{,}869.10^{6} \text{ atm} \equiv 1{,}45.10^{-4} \text{ lb}_f\text{/sq.in}$$

kde B.t.u bola skratka názvu (British Thermal Unit) anglosaskej jednotky energie a lb_f/sq.in (niekedy označené tiež ako p.s.i) bola jednotkou tlaku (libra sily na štvorcový palec; pound of force per squere inch).

Významnou užitočnou vlastnosťou fyzikálnych ekvivalencií je, že so symbolmi mier, s jednotkami alebo i s číslami vystupujúcimi vo fyzikálnych ekvivalenciách sa dá narábať rovnako ako v algebrických rovniciach. Napr. spojením dvoch ekvivalencií dostaneme:

$$1 \text{ m} = 100 \;.\; 10 \text{ mm} = 10^3 \text{ mm}$$

Na základe uvedeného pravidla možno veľmi jednoducho prepočítať rôzne jednotky a najmä prepočítať veľajšie jednotky (dovolené i nedovolené) na odvodené v SI.

Zo skúseností vieme, že poslucháči, ktorí prichádzajú na študijný odbor, prakticky nemajú žiadne problémy pri prepočítavaní rôznych jednotiek (výnimkou sú jednotky anglosaské), a preto sa touto problematikou priamo nebudeme zaoberať.

Našu pozornosť však zameriame na prepočítania nekoherentných rovníc, ktoré obsahujú numerické koeficienty, prípadne faktory medzi nekoherentnými jednotkami.

Pri prepočítavaní nekoherentných rovníc postupujeme takto:

Majme nejaký fyzikálny vzťah, do ktorého za dĺžku L dosadzujeme v jednej sústave v metroch m a v inej sústave v centimetroch cm. Medzi oboma jednotkami je známa ekvivalencia

$$1 \text{ m} \equiv 100 \text{ cm}$$

a preto dĺžka L vyjadrená v metroch bude číselne 100-krát menšia ako tá istá dĺžka L vyjadrená v centimetroch, t.j.

$$L\ (\text{m}) = \frac{1}{100}\, L\ (\text{cm}) \qquad (1.5)$$

Týmto spôsobom prepočítame všetky fyzikálne veličiny, ktoré sa vyskytujú v rovnici, z jedných jednotiek na druhé. Po dosadení do rovnice nám potom vyplynú aj nové hodnoty číselných koeficientov.

Prepočítavacia schéma je

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \\ L\ (\text{m}) = \dfrac{1}{100}\, L\ (\text{cm}) \end{array}} \qquad (1.6)$$

Príklad 1.1

Výkon objemového čerpadla možno vypočítať zo vzťahu uvedeného v lit. [18].

$$N = \frac{A.s.n.h\,\gamma}{60.102} \qquad (a)$$

kde N je výkon objemového čerpadla [kW],
A - plocha piesta [m^2],
s - zdvih piesta [m],
n sú otáčky [min^{-1}],
h je pracovná výška čerpadla [m],
γ - špecifická tiaž [kp/m^3].

Rovnicu upravte do koherentnej sústavy jednotiek SI.

Riešenie

Z uvedených fyzikálnych veličín tri (N, n, γ) nie sú v sústave SI, preto ich prepočítame:

- Výkon: $1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$

$$N\ (\text{kW}) = \frac{1}{10^3}\, N\ (\text{W})$$

- Otáčky: $1\ \text{min}^{-1} = \dfrac{1}{60}\ \text{s}^{-1}$

$$n\ (\text{min}^{-1}) = 60\ n\ (\text{s}^{-1})$$

- Špecifická tiaž: $1\ \text{kp.m}^{-3} = 9{,}80665\ \text{N.m}^{-3}$

$$\gamma(\text{kp/m}^3) = \frac{1}{9{,}80665}\,\gamma\ \ (\text{N/m}^3)$$

Dosadíme do vzťahu pre výkon čerpadla

$$N\,\frac{1}{10^3}\,(\text{W}) = \frac{A(\text{m}^2).s(\text{m}).60\ n(\text{s}^{-1}).h(\text{m}).\dfrac{1}{9{,}80665}\,\gamma\ (\text{N.m}^{-3})}{60.102}$$

$$N = A.s.n.h.\varrho.g \qquad \text{(b)}$$

$$\left[W = \frac{\text{m}^2.\text{m}.\text{m}.\text{N}}{\text{s}.\text{m}^3} = \frac{\text{N.m}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W} \right]$$

kde za špecifickú tiaž sme dosadili $\gamma = \varrho.g$.

Vidíme, že vo vzťahu (b) nevystupujú žiadne číselné konštanty a rozmerovo je homogénna. Rovnica (b) je homogénna v každej sústave jednotiek.

Príklad 1.2

Vzťah medzi prenášaným výkonom a krútiacim momentom na hriedeli sa v staršej literatúre uvádza takto:

$$M_k = 71620\,\frac{P}{n} \qquad \text{(a)}$$

kde M_k je krútiaci moment [kp.cm].
P - výkon v koňoch [k],
n - frekvencia otáčok [min^{-1}].

Prepočítajte vzťah (a) do koherentnej sústavy jednotiek.

Riešenie

Fyzikálne veličiny vo vzťahu (a) sú zadané v nedovolených jednotkách, preto ich musíme prepočítať

- Krútiaci moment: $1\ \text{kp.cm} = 9{,}80665\ \text{N}.10^{-2}\ \text{m}$

$$M_k(\text{kp.cm}) = \frac{100}{9{,}80665}\,M_k\ (\text{N.m})$$

- Výkon: $1\ (k) = 75\ kp.m.s^{-1} = 75.9,80665\ N.m.s^{-1}$

$$P\ (k) = \frac{1}{75.9,80665}\ P\ (N.m.s^{-1})$$

- Frekvencia otáčok: $1\ min^{-1} = \frac{1}{60}\ s^{-1}$

$$n\ (min^{-1}) = 60\ n\ (s^{-1})$$

Po dosadení fyzikálnych veličín do vzťahu (a) dostaneme:

$$\frac{100}{9,80665}\ M_k\ (N.m) = 71620\ \frac{P\ (N.m.s^{-1})}{75.9,80665} \cdot \frac{1}{60\ n\ (s^{-1})} \qquad (b)$$

$$M_k\ (N.m) = \frac{71620}{75.60.100} \cdot \frac{P}{n}\ (N.m)$$

pričom číselná hodnota $\frac{71620}{75.60.100} = 0,15916 = \frac{1}{2\pi}$

a hľadaný vzťah je

$$M_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{P}{n}$$

Príklad 1.3

V staršej literatúre sa stretneme s nasledujúcim vzťahom na výpočet Prandtlovho čísla

$$Pr = \frac{3600\ \mu\ c_p \cdot g}{\lambda} \qquad (a)$$

kde Pr je Prandtlovo číslo [-],
μ - dynamická viskozita [kp.s/m^2],
g - gravitačné zrýchlenie [m/s^2],
c_p - špecifická tepelná kapacita pri konštantnom tlaku [kcal/kg.^{o}C],
λ - tepelná vodivosť [kcal/m.h.^{o}C].

Prepočítajte uvedený vzťah do koherentnej sústavy jednotiek SI.

Riešenie

Okrem gravitačného zrýchlenia všetky veličiny vo vzťahu (a) sú uvedené v nedovolených jednotkách, takže ich prepočítame

-Dynamická viskozita: $\frac{1\ kp.s}{m^2} = 9,80665\ \frac{N.s}{m^2}\ (Pa.s)$

$$\mu\left(\frac{kps}{m^2}\right) = \frac{1}{9,80665}\mu\left(\frac{N.s}{m^2}\right)$$

- Špecifická tepelná kapacita: $\dfrac{1\ kcal}{kg.^{o}C} = 4,1868.10^3\ \dfrac{J}{kg.K}$

$$c_p\left(\frac{kcal}{kg.^{o}C}\right) = \frac{1}{4,1868.10^3}\ c_p\left(\frac{J}{kg.K}\right)$$

- Tepelná vodivosť: $\dfrac{1\ kcal}{m.h.^{o}C} = \dfrac{4,1868.10^3}{3600}\ \dfrac{J}{m.s.K}\left(\dfrac{W}{m.K}\right)$

$$\lambda\left(\frac{kcal}{m.h.^{o}C}\right) = \frac{3600}{4,1868.10^3}\lambda\left(\frac{J}{m.s.K}\right)$$

Dosadíme do rovnice (a) za jednotlivé fyzikálne veličiny a za gravitačné zrýchlenie $g = 9,80665\ m.s^{-2}$ a dostaneme:

$$P_r = \frac{3600\ \dfrac{1}{9,80665}\mu\left(\dfrac{N.s}{m^2}\right) 9,80665\ \dfrac{1}{4,1868.10^3}\ c_p\left(\dfrac{J}{kg.K}\right)}{\dfrac{3600}{4,1868.10^3}\lambda\ \dfrac{J}{m.s.K}}$$

$$P_r = \frac{\mu . c_p}{\lambda}$$

<u>Príklad 1.4</u>

Závislosť trecej sily od okamžitej rýchlosti pre určitý pohyb možno vyjadriť empirickou rovnicou

$$R = 100 + 0,05\ v^2 \qquad \text{(a)}$$

kde R je sila $[lb_f]$ (libra sily),
v - rýchlosť [ft/s] (stopa/s).

<u>Riešenie</u>

Rovnica (a) je čisto empirickej povahy a platí len v určitej oblasti rýchlostí v. Ak rovnicu (a) prepočítame do sústavy SI, potom za v dosadíme [m/s] a silu dostaneme v [N], pričom hodnoty empirických konštánt sa zmenia.

Konštanta 100 v rovnici (a) má rozmer $[lb_f]$ a konštanta 0,05 $[lb_f.s^2/ft^2]$.

- Prepočet sily: $1\ lb_f = 0,4539237\ kp = 0,4539237.9,80665\ N$

$$R\ (lb_f) = \frac{1}{0,4539237.9,80665}\ R\ \ (N)$$

- Prepočet rýchlosti: $1 \dfrac{ft}{s} = 0{,}3048 \dfrac{m}{s}$

$$v\left(\frac{ft}{s}\right) = \frac{1}{0{,}3048}\, v\left(\frac{m}{s}\right)$$

Prepočítané veličiny dosadíme do vzťahu (a)

$$\frac{1}{0{,}4539237.9{,}80665}\, R\ (N) = 100 + 0{,}05 \left[\frac{1}{0{,}3048}\, v\left(\frac{m}{s}\right)\right]^2$$

$$R(N) = 100.0{,}4539237.9{,}80665 + \frac{0{,}05.0{,}4539237.9{,}80665}{0{,}3048^2} \cdot v^2 \left(\frac{m^2}{s^2}\right)$$

$$R = 445{,}16 + 2{,}3958\ v^2$$

Príklad 1.5

Pre výpočet špecifickej tepelnej kapacity uhlia uvádza lit. [6] nasledujúci vzťah

$$c_p = 0{,}2 + 0{,}00088\ t + 0{,}0015\ w \qquad \text{(a)}$$

kde c_p je špecifická tepelná kapacita pri konšt. tlaku $[B.t.u/lb.^oF]$,
t - teplota $[^oC]$,
w - hmotnostné percento prchavých látok v uhlí.

Vzťah (a) treba prepočítať do sústavy SI.

Riešenie

- Tepelná kapacita: $\dfrac{B.t.u}{lb.^oF} = 4{,}1868.10^3 \dfrac{J}{kg.K}$

$$c_p\left(\frac{B.t.u}{lb.^oF}\right) = \frac{1}{4{,}1868.10^3}\, c_p\left(\frac{J}{kg.K}\right)$$

- Teplota: $1\ ^oC = 1\ K$

$$t\ (^oC) = T\ (K) - 273{,}15$$

Po dosadení do pôvodného vzťahu (a) dostaneme:

$$\frac{1}{4{,}1868.10^3}\, c_p\left(\frac{J}{kg.K}\right) = 0{,}2 + 0{,}00088\,[T(K) - 273.15] + 0{,}0015\ w$$

$$c_p = -169{,}029 + 3{,}6844\ T + 6{,}28\ w$$

Úlohy

1.1 Teplo, ktoré sa získa premenou elektrickej energie, možno vyjadriť rovnicou

$$Q = 860\ W.\tau$$

kde Q - teplo [kcal]; W - elektrický výkon [kW]; τ - čas [h].
Prepočítajte vzťah do sústavy SI.

1.2 Vnútorný priemer kondenzátora podľa lat. [18] s. 362 možno vypočítať zo vzťahu

$$d_k = 0{,}023 \sqrt{\frac{DV_p}{w_p}}$$

kde d_k je vnútorný priemer kondenzátora [m],
D - množstvo kondenzovanej pary [kp/h],
V_p - špecifický objem pary [m^3/kp],
w_p - rýchlosť pary [m/s].
Prepočítajte vzťah do sústavy SI.

1.3 Pre približný výpočet hodnoty difúzneho koeficientu v kvapalnej fáze pri nízkych koncentráciách difundujúcej látky možno použiť empirický vzťah

$$D_1 = \frac{7{,}7 \cdot 10^{-10}\ T}{\mu (v_A^{1/3} - v_B^{1/3})^2}$$

kde D_1 je difúzny súčiniteľ [cm^2/s],
T - teplota [K],
μ - dynamická viskozita kvapaliny [P] (Poisse),
v_A, v_B - molový objem zložiek [cm^3/mol].
Prepočítajte vzťah do sústavy SI.

1.4 Difúzny súčiniteľ zložky v plynnej fáze možno vypočítať zo vzťahu

$$D_g = \frac{0{,}0043\ T^{3/2}}{P(v_A^{1/3} + v_B^{1/3})^2} \sqrt{\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}}$$

kde D_g je difúzny súčiniteľ [cm^2/s],
T - teplota plynu [K],
P - tlak plynu [atm],
v_A, v_B sú molové objemy [cm^3/mol],
m_A, m_B - molové hmotnosti [kg/kmol].
Prepočítajte vzťah do sústavy SI.

1.5 Pre súčiniteľ prestupu tepla zo steny do vzduchu pri teplote steny $50 \div 350$ °C možno použiť empirický vzťah

$$\alpha_2 = 8 + 0{,}05\ t_{s2}$$

kde α_2 je súčiniteľ prestupu tepla [kcal/(m^2.h.°C)],
t_{s2} - teplota vonkajšej steny [°C].
Prepočítajte vzťah do sústavy SI.

1.6 Pre vzduch, ktorý sa pohybuje nútenou konvekciou rýchlosťou u ≤ 5 m/s súčiniteľ prestupu tepla zo steny do vzduchu možno vypočítať zo vzťahu

$$\alpha_2 = 5{,}3 + 3{,}6\ w$$

kde α_2 je súčiniteľ prestupu tepla [kcal/(m^2.h.°C)],
w - rýchlosť vzduchu [m/s].
Prepočítajte vzťah do sústavy SI.

1.7 Dynamický tlak v určitom priereze v potrubí je daný vzťahom

$$P = \frac{h_m\ (\gamma_m - \gamma_o)}{1000}$$

kde P je dynamický tlak [kp/m^2],
h_m - rozdiel hladín manometrickej kvapaliny [m],
γ_m - špecifická tiaž manometrickej kvapaliny [kp/m^3],
γ_o - špecifická tiaž tekutiny nad manometrickou kvapalinou [kp/m^3].
Prepočítajte vzťah do sústavy SI.

1.8 Tepelnú vodivosť kvapaliny možno vypočítať z empirickej rovnice

$$\lambda = \frac{1{,}52\ .\ 10^{-4}}{\varepsilon_o\ .\ M^{1/3}}\ c_p\, \gamma_o^{4/3}$$

kde λ je tepelná vodivosť [kcal/(m.h.°C)],
$\varepsilon_o = 1$,
M - molová hmotnosť [kg/kmol],
c_p - špecifická tepelná kapacita [kcal/(kg.°C)],
γ_o - špecifická tiaž [kp/m^3].
Prepočítajte vzťah do sústavy SI.

1.9 Rovnovážny tlak pár kyseliny octovej možno vyjadriť Calingertovým-Davisovým vzťahom

$$\log P^o = 7{,}487 - \frac{1608}{t + 230}$$

kde P^{o} je rovnovážny tlak pár (tenzia pár) [mmHg],
t - teplota [°C].

Prepočítajte vzťah do sústavy SI.

1.10 Súčiniteľ prestupu tepla pri turbulentnom toku plynu možno určiť z rovnice

$$\alpha = 16{,}6\,\frac{c_p \cdot G^{0,5}}{D^{0,2}}$$

kde α je súčiniteľ prestupu tepla [B.t.u./(ft^2.h.°F)],
G - hustota toku látky (lb)/(hr.sq. ft),
D - priemer rúrky ft,
c_p - špecifická tepelná kapacita [B.t.u/lb.°F].

Prepočítajte vzťah do sústavy SI.