

V. Venclík - M. Julina

MECHANIKA

DYNAMIKA

PRO ŠKOLU A PRAXI


Scientia, spol. s r. o.
pedagogické nakladatelství
PRAHA 2001

V úvodu do dynamiky jsou probírány impuls síly a hybnost, mechanická práce, výkon, účinnost, mechanická energie, dynamika otáčivého pohybu, další kapitoly se věnují dynamice těles, vyvažování, rázům těles a kritickým otáčkám. Výklad je doprovázen četnými konkrétními příklady, úlohami a kontrolními otázkami vztahujícími se k technické praxi. Text obsahuje základní výpočtové vztahy, návody na řešení, je bohatě ilustrován obrázky.

Kniha je určena žákům středních odborných učilišť a středních odborných škol technického zaměření i absolventům těchto škol. Může též posloužit pro objasnění uvedené problematiky technikům v praxi a všem zájemcům o základy dynamiky.

Lektor: Ing. Antonín Řeřábek

© Ing. Vladimír Venclík, Ing. Miloslav Julina, 2001

ISBN 80-7183-235-9

OBSAH

	PŘEDMLUVA	5
	PŘEHLED VELIČIN A JEJICH JEDNOTEK	6
1	ÚVOD DO DYNAMIKY	9
1.1	Impulz síly a hybnost	10
1.1.1	Odstředivá a dostředivá síla	12
1.2	Mechanická práce, výkon, účinnost, mechanická energie	13
1.2.1	Mechanická práce	13
1.2.1.1	Mechanická práce síly stálé velikosti	13
1.2.1.2	Mechanická práce síly proměnné velikosti	14
1.2.1.3	Grafické znázornění práce	15
1.2.2	Výkon	16
1.2.3	Účinnost strojů a zařízení	18
1.2.4	Mechanická energie	20
1.2.4.1	Energie polohy	20
1.2.4.2	Pohybová energie	20
1.2.5	Dynamika otáčivého pohybu	21
1.2.5.1	Pohyb hmotného bodu po kružnici ve vodorovné rovině	21
1.2.5.2	Pohyb hmotného bodu po kružnici ve svislé rovině	22
1.2.5.3	Matematické kyvadlo	23
1.2.5.4	Pohyb hmotného bodu vázaného k rovinné křivce	24
1.2.5.5	Pohyb vozidla v zatáčce	25
1.2.6	Zákon zachování energie	26
2	DYNAMIKA TĚLES	29
2.1	Dynamika posuvného pohybu	29
2.1.1	Vázaný pohyb tělesa	30
2.1.1.1	Pohyb tělesa po vodorovné rovině	30
2.1.1.2	Pohyb tělesa po nakloněné rovině	32
2.1.1.3	Pohyb dopravního prostředku	33
2.1.2	Pohybová energie tělesa pro posuvný pohyb	35
2.1.4	Změna posuvné energie	35
2.2	Dynamika otáčivého pohybu	36
2.2.1	Moment setrvačnosti tělesa	36
2.2.1.1	Redukovaná hmotnost	37
2.2.1.2	Poloměr setrvačnosti	37
2.2.1.3	Setrvačný moment	37
2.2.1.4	Momenty setrvačnosti k osám rovnoběžným s osou těžiště	37
2.2.1.5	Momenty setrvačnosti základních geometrických těles	38
2.2.2	d' Alembertův princip	41
2.2.3	Fyzické kyvadlo	42
2.2.4	Zjišťování momentu setrvačnosti pokusem	42
2.3	Odstředivá síla tělesa	44
2.3.1	Odstředivá síla otáčející se tyče	45
2.3.2	Odstředivá síla tělesa s osou rovnoběžnou s osou otáčení	45
2.4	Rotační energie tělesa	47
2.5	Změna rotační energie – práce zrychlujících sil	48
2.6	Impulz momentu a moment hybnosti	50
2.7	Pohybová energie při obecném pohybu	52

3	VYVAŽOVÁNÍ	53
3.1	Vyvažování otáčejících se hmotností	53
3.1.1	Statické vyvažování	53
3.1.2	Dynamické vyvažování	54
3.2	Vyvažování hmotností konajících přímočarý vratný pohyb	56
4	RÁZY TĚLES	59
4.1	Přímý centrální ráz	60
4.2	Šikmý centrální ráz	62
4.3	Přímý excentrický ráz	64
5	KRITICKÉ OTÁČKY	65
	LITERATURA	68
	REJSTRÍK	69

PŘEDMLUVA

Neustálý rozvoj vědy a techniky má podstatný vliv na výrobu i na produktivitu práce, klade stále vyšší požadavky na odborné teoretické a praktické znalosti. Vědecké a technické obory vyžadují vysoce kvalifikované odborníky, kteří dovedou navrhovat, ovládat a řídit moderní stroje a složitá technická zařízení. Každý obor lidské činnosti vyžaduje specifické znalosti, které jsou souhrnem poznatků a vědomostí získávaných v přípravných vědních oborech. Ve strojírenství jsou těmito základními obory matematika, fyzika a odborné předměty, mezi něž patří i mechanika. Dynamika jako nedílná součást mechaniky vyšetřuje prostorový a časový průběh pohybů hmotných bodů, jejich soustav, popř. hmotných těles s ohledem na jejich hmotnost a působící síly.

Předkládaná publikace navazuje metodicky i obsahově na knihy *Mechanika. Statika* [1] a *Mechanika. Kinematika* [2], které vydalo pedagogické nakladatelství Scientia, spol. s r. o. Jednotlivá témata jsou v učebnici nejdříve probrána teoreticky. Součástí každého tématického celku jsou řešené vzorové praktické příklady, které mají umožnit aktivní pochopení výkladu, a úlohy s uvedenými výsledky. Použitý způsob výkladu by měl přispět k rozvoji tvůrčího myšlení, k pochopení všech souvislostí a samostatnému řešení konkrétních praktických problémů.

Knihy je určena žákům středních odborných učilišť a středních odborných škol technického zaměření, ale i absolventům těchto škol. Proto je sestavena nejen podle osnov oboru strojírenství. Kniha může též posloužit pro objasnění uvedené problematiky technikům v praxi a všem zájemcům o základy dynamiky.

Cílevědomě získávané vědomosti jsou základem pro další vzdělávání a úspěšné uplatnění v odborné praxi. Věříme, že Vám v tom tato kniha také pomůže. Těšíme se na vaše ohlasy a připomínky.

Autoři

PŘEHLED VELIČIN A JEJICH JEDNOTEK

Značka	Název veličiny	Jednotka
D (d)	průměr	m
E	mechanická energie	J
E	modul pružnosti	Pa
E_c	celková mechanická energie	J
E_k	pohybová (kinetická) energie	J
E_p	energie polohy (potenciální)	J
E_r	rotační energie	J
E_z	ztrátová energie	J
F (F_1, F_2)	síla	N
F_C	odstředivá (Coriolisova) síla	N
F_{Cd}	dostředivá síla	N
F_h	hnací síla	N
F_{max}, F_{min}	maximální síla, minimální síla	N
F_n	normálová síla	N
F_O	odpor vzduchu	N
F_r	reakční síla	N
F_{rA}, F_{rB}	reakční síly v podpoře A a B	N
F_s	setrvačná síla	N
F_v	střední průměrná síl, příp. střední průměrná síla	N
$F_{p hr}$	pružná síla hřídele	N
F_T	třecí síla	N
F_t	tečná síla	N
F_z	zrychlující síla	N
F_{Rz}	výsledná zrychlující síla	N
F_0	počáteční síla	N
G	tíha, tíhová síla	N
G_m	tíha hmotného bodu	N
H	hybnost tělesa	N . s
I	moment setrvačnosti tělesa	kg . m ²
I_F	impulz síly	N . s
I_O	moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm	kg . m ²
I_M	impulz momentu	N . m . s
I_v	moment setrvačnosti věnce	kg . m ²
J	kvadratický moment průřezu	m ⁴
K	tvarový součinitel	kg . m ⁻³
L	moment hybnosti	kg . m . s ⁻¹
M	moment síly	N . m

M_H	moment hybnosti	$N \cdot m \cdot s$
M_k	krouticí moment	$N \cdot m$
M_o	ohybový moment	$N \cdot m$
P	výkon	W
P_{pr}	příkon	W
P_{uz}	užitečný výkon	W
P_z	ztrátový výkon	W
Q_V	objemový průtok	$m^3 \cdot s^{-1}$
$R(r)$	poloměr	m
R_s	střední poloměr	m
S	plošný obsah, průřez	m^2
S_x	čelní plocha vozidla	m^2
T	doba jedné periody	s
V	objem	m^3
W	práce	J
W_k	průřezový modul v krutu	m^3
W_o	průřezový modul v ohybu	m^3
W_{pr}	přijímaná práce	J
W_{uz}	užitečná práce	J
W_z	ztrátová práce	J
a	zrychlení	$m \cdot s^{-2}$
a_n	normálové zrychlení	$m \cdot s^{-2}$
a_t	tečné zrychlení	$m \cdot s^{-2}$
c_x	odporový součinitel	
e	výstřednost (excentricita), vzdálenost těžiště od osy kývání	m
f	frekvence	Hz
g	gravitační (tíhové) zrychlení	$m \cdot s^{-2}$
h	výška	m
i	poloměr setrvačnosti	m
i_n	počet otočení	
k	součinitel rázu	
k_s	konstanta tuhosti hřídele	
l	délka	m
m	hmotnost	kg
m_r	redukovaná hmotnost	kg
m_v	hmotnost vývažku	kg
n	otáčky	$s^{-1} (\text{min}^{-1})$
n_k	kritické otáčky	$s^{-1} (\text{min}^{-1})$
n_0	počáteční otáčky	$s^{-1} (\text{min}^{-1})$
p_d	dynamický tlak	Pa

p_n	stoupání závitu	mm (m)
p_s	střední tlak	Pa
r_O	vzdálenost os	m
r_s	střední poloměr	m
r_T	vzdálenost těžiště od osy otáčení	m
s	dráha	m
t	čas, doba	s
v	rychlost	$m \cdot s^{-1}$
v_0	počáteční rychlost	$m \cdot s^{-1}$
v_T	rychlost v těžišti	$m \cdot s^{-1}$
v_{max}	maximální rychlost	$m \cdot s^{-1}$
y	průhyb	m
y_{max}	maximální průhyb	m
y_{st}	průhyb od statického zatížení	m
ε	úhlové zrychlení	$rad \cdot s^{-2}$
η	účinnost	
φ	úhel otočení	
μ	součinitel smykového tření	
ρ	měrná hmotnost	$kg \cdot m^{-3}$
σ	normálové napětí	Pa
τ	tečné napětí	Pa
ω	úhlová rychlost	$rad \cdot s^{-1}$
ω_k	kritická úhlová rychlost	$rad \cdot s^{-1}$
ξ	rameno valivého odporu	m

1 ÚVOD DO DYNAMIKY

Dynamika (kinetika) je částí mechaniky, která se zabývá studiem pohybu hmotných bodů a těles při působení sil. V dynamice se řeší takové případy, kdy síly působící na dokonale tuhá tělesa nejsou v rovnováze.

Zkoumáme pohyb hmotných bodů, případně soustav hmotných bodů, které můžeme v některých případech za hmotný bod považovat, pomíneme-li rozložení hmotnosti. V takových případech soustředíme hmotnost soustavy (tělesa) do jednoho hmotného bodu (dále jen bodu) – *těžiště*. Nejdříve se tedy zabýváme pohybem bodu a výsledky pak zobecníme na soustavu bodů, tj. těleso. Každý pohyb bodu se děje za působení sil, které mohou mít různou podobu. Například tíha bodu, síla v pružině, která je jedním koncem upevněna k bodu a druhým se opírá o pevný základní prostor, odpor prostředí nebo síla vyvinutá hnací jednotkou. Uvedené síly nazýváme *vnějšími silami*; tyto síly bod uvádějí do pohybu nebo jej v něm udržují – jsou to *hnací síly*.

Závislost mezi silami působícími na pohybující se bod a kinematickými veličinami, tj. zrychlením (a), které bodu o hmotnosti m přísluší, je dána Newtonovým pohybovým zákonem:

$$F_z = m \cdot a.$$

Síla $m \cdot a$, která je rovna výslednici všech působících sil, je tzv. *zrychlující síla*.

Z kinematiky je známo, že při křivočarém pohybu bodu existuje obecně vždy zrychlení. Pouze u přímočarého pohybu se může pohyb dít s konstantní rychlostí, tj. $a = 0$.

V dynamice budeme řešit úlohy, kdy pro předepsaný pohyb s danými kinematickými veličinami určujeme potřebnou vnější sílu, nebo při známých vnějších silách vyšetřujeme rychlosti a zrychlení.

Při řešení úloh dynamiky využijeme dřívějších znalostí ze statiky a kinematiky. Z hlediska kinematiky, tedy i dynamiky, je nejjednodušším pohybem přímočarý pohyb bodu. Podobně jako v kinematice použijeme i v dynamice mnohých výsledků, které platí pro přímočarý, křivočarý, posuvný a otáčivý pohyb.

V běžné technické praxi se většinou setkáme s rychlostmi, pro něž platí zákony klasické mechaniky, tj. Newtonovy pohybové zákony. V minulém století se však ukázalo, že u jevů, které probíhají při velkých rychlostech, blízcích se rychlostí světla ($c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), nelze použít zákonitosti klasické mechaniky, ale teorii, kterou formuloval Albert Einstein.

Přímočarý pohyb bodu

Přímočarý pohyb bodu je tím nejjednodušším případem pohybu. Rychlost i zrychlení mají směr dráhy bodu. Při vedení bodu se jedná z hlediska statiky o nucený pohyb. Vedení může mít různou podobu, vždy však způsobí odpor proti pohybu, jehož příčinou jsou hnací síly. Obecně je možno takový jev vyjádřit vztahem

$$\sum_i F_{ti} - F_n \cdot \mu = m \cdot a,$$

kde $\sum_i F_{ti}$ je algebraický součet všech složek vnějších sil působících ve směru dráhy včetně odporu prostředí,

$F_n \cdot \mu$ – smykové tření (μ je součinitel smykového tření).

Takto sestavená rovnice pro příslušný směr pohybu se nazývá *pohybová rovnice*.

Svislý pohyb volného bodu

Při svislém pohybu hmotného bodu, pouze za působení vlastní tíhy G , kterou v tomto případě považujeme za zrychlující sílu, jež je projevem zemské přitažlivosti a udílí bodu (gravitační) zrychlení g *), má pohybová rovnice tvar (při zanedbání odporu prostředí) $G = m \cdot g$.

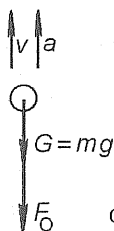
Příkladem je *svislý vrh vzhůru*, který probíhá v atmosféře, proti pohybu tedy působí i odpor prostředí. Pohybová rovnice má tvar

$$-G - F_O = m \cdot a, \quad -m \cdot g - F_O = m \cdot a.$$

Při pohybu ve vakuu je $F_O = 0$, potom $-g = a$, pohyb se děje s konstantním zrychlením, které je co do velikosti rovno tíhovému zrychlení.

Pro *svislý pohyb dolů* s odporem má pohybová rovnice tvar

$$G - F_O = m \cdot a, \quad m \cdot g - F_O = m \cdot a.$$



Obr. 1

*) Tíhová síla není stálá, mění se s tíhovým zrychlením, které je různé v různých zeměpisných šířkách; u nás $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (u příkladů v této knize, kde počítáme se zaokrouhlením na $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, je to konkrétně uvedeno).

1 Úvod do dynamiky

Pohyb bodu po nakloněné rovině

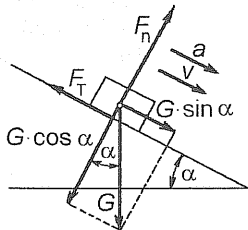
Sestavení pohybové rovnice (obr. 2): $G \cdot \sin \alpha - F_T = m \cdot a$,

kde F_T je třecí síla.

Složková rovnice ve směru kolmém na nakloněnou rovinu

$$-G \cdot \cos \alpha + F_n = 0, \quad F_n = G \cdot \cos \alpha,$$

kde F_n je normálová síla.



Obr. 2

Ze statiky je známo, že $F_T = F_n \cdot \mu$, $G = m \cdot g$, takže

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha - m \cdot g \cdot \mu \cdot \cos \alpha = m \cdot a,$$

po úpravě dostaneme $a = g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha)$.

Kromě pasivních odporů lze při pohybu na nakloněné rovině přihlídnout i k odporům prostředí F_O , které působí též proti pohybu. Po úpravě (převědeme zrychlující sílu $F_z = m \cdot a$ na levou stranu rovnice) dostaneme

$$\sum_i F_{ti} - F_O - m \cdot a = 0;$$

uvedli jsme bod do rovnovážného stavu, tj. připojili jsme k působícím silám sílu stejné velikosti jako je zrychlující síla, ale opačné orientace (podle zákona akce a reakce). Tato síla doplňuje původní síly na rovnovážný stav a nazývá se *setrvačná síla* F_s . Účelnost jejího zavedení se projeví v kapitole Dynamika tělesa.

Opakovací otázky a úlohy

1. Jak zní pohybové zákony?
2. Co je tíhové zrychlení?
3. Jak vzniká setrvačná síla, jak je velká a jaký má smysl?
4. Klec výtahu o hmotnosti 300 kg se pohybuje nahoru i dolů se stejným zrychlením $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Jakou silou F_1 je namáháno lano klece při rozjíždění a jakou silou F_2 při zastavování výtahu, je-li $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?
5. Jaká zrychlující síla F je třeba k tomu, aby se automobil o hmotnosti 900 kg rozjel se zrychlením $0,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?
6. Jak velká je tažná síla F automobilu o hmotnosti 1 200 kg, kterou dosáhne rychlostí $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ z klidu za 20 s? Odpor proti jízdě je $0,01 G$ a $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
7. Automobil o hmotnosti 5 000 kg jede rychlostí $54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a zastaví na brzdě dráze 25 m. Jaká je střední brzdicí síla F , je-li $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?

(Výsledky: 4. $F_1 = 3\,900 \text{ N}$, $F_2 = 2\,100 \text{ N}$; 5. $F = 270 \text{ N}$; 6. $F = 1\,788 \text{ N}$; 7. $F = 22\,500 \text{ N}$.)

1.1 Impulz síly a hybnost

Jak víme z druhého pohybového zákona, je velikost zrychlující síly F_z působící na těleso o hmotnosti m rovna součinu hmotnosti tohoto tělesa a jeho zrychlení a : $F_z = m \cdot a$.

Za t sekund dosáhne těleso rychlosti $v = a \cdot t$. Potom $F = m \cdot \frac{v}{t}$, odtud

$$F \cdot t = m \cdot v.$$

Vektorová veličina I_F , která vyjadřuje časový účinek síly, se nazývá *impulz síly*:

$$I_F = F \cdot t,$$

její jednotkou je $\text{N} \cdot \text{s}$ ($\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Vyjádříme-li ve vztahu $F = m \cdot a$ zrychlení jako přírůstek rychlosti ($v = v - v_0$, kde v_0 je počáteční rychlost) za dobu t ,

$a = \frac{v - v_0}{t}$, dostaneme vztah

$$I_F = F \cdot t = m \cdot v = m \cdot (v - v_0) = m \cdot v - m \cdot v_0 = H - H_0$$

kde H je tzv. *hybnost*; je to vektorová veličina, rovnající se součinu hmotnosti tělesa a jeho rychlosti; jednotkou je $\text{N} \cdot \text{s}$ ($\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Hybnost tělesa na počátku pohybu $H_0 = m \cdot v_0$ se změnila na konci pohybu na $H = m \cdot v$. Zrychlující síla tedy způsobila přírůstek hybnosti, který se rovná rozdílu hybností na konci a na počátku pohybu.

Přírůstek hybnosti se rovná impulzu zrychlující síly.

1 Úvod do dynamiky

Hybnost těžiště tělesa, jemuž přisuzujeme celou hmotnost tělesa, je v každém okamžiku rovna vektorovému součtu hybností všech bodů tělesa:

$$m \cdot v_T = \sum_{i=1}^n m_i \cdot v_i,$$

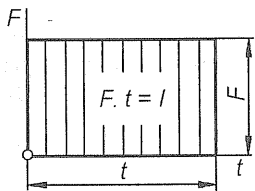
kde v_T je okamžitá rychlost těžiště tělesa,
 v_i – okamžité rychlosti jednotlivých hmotných bodů tělesa,
 m_i – hmotnosti jednotlivých hmotných bodů tělesa,
 n – počet bodů tělesa.

Podle druhého pohybového zákona platí: $F_i = m_i \cdot \frac{\Delta v_i}{\Delta t}$,
 což vyjadřuje časovou změnu hybnosti pro i -tý bod.

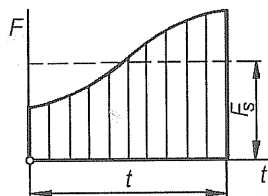
Pro n bodů tělesa:
$$\sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\Delta v_i}{\Delta t},$$

což vyjadřuje 1. impulzovou větu: Časová změna celkové hybnosti tělesa je rovna výslednici vnějších sil.
 2. impulzová věta, pojednávající o časově přeměně točivosti, je uvedena v čl. 2.6.

Grafické znázornění impulzu je na obr. 3 a 4. Je-li působící síla stálá, je velikost impulzu síly rovna ploše vyšrafovaného obdélníka (obr. 3). Při proměnné síle je impulz síly znázorněn plochou nepravidelného tvaru (obr. 4); vypočteme-li střední (průměrnou) sílu F_s , je grafickým znázorněním obdélník o stranách t a F_s . Platí $F_s \cdot t = m \cdot v$.



Obr. 3. Velikost impulzu při stálé síle



Obr. 4. Velikost impulzu při proměnné síle

Rozlišujeme krátkodobé a dlouhodobé impulzy. Stejně velký impulz síly lze dosáhnout součinem větší síly a kratší doby, nebo naopak součinem menší síly a delší doby. Stejně velký impulz síly udělí všem tělesům o stejné hmotnosti stejnou hybnost, tedy jim udělí i stejnou rychlost.

Působí-li síly $F_1 = F_2$ opačných smyslů po stejnou dobu na tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 v klidu, platí, že hybnosti těchto těles $H_1 = H_2$ a jsou opačných smyslů ($m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$).

V praxi se tento případ vyskytuje např. při výstřelu z děla (dělo dosáhne stejnou hybnost jako střela), při unikání zplodin hoření tryskou rakety (unikající plyn má stejnou hybnost jako raketa v opačném smyslu) apod.

Příklad 1

Střela o hmotnosti $m_1 = 8$ kg opouští dělovou hlaveň rychlostí $v_1 = 600$ m · s⁻¹. Jakou zpětnou rychlostí se pohybuje hlaveň děla o hmotnosti $m_2 = 400$ kg?

Řešení:

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2, \quad v_2 = \frac{m_1}{m_2} \cdot v_1, \quad v_2 = \frac{8 \text{ kg}}{400 \text{ kg}} \cdot 600 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Příklad 2

Nákladní automobil o hmotnosti 8 000 kg jedoucí rychlostí 36 km · h⁻¹ zabrzdí na dráze 20 m. Vypočítejte střední brzdící sílu.

Řešení:

$$\text{Střední brzdící síla } F_s \cdot t = m \cdot v, \quad F_s = m \cdot \frac{v}{t}, \quad v = 36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Dobu brzdění t vypočteme pomocí vztahu $t = \frac{v}{a}$.

$$\text{Platí } s = \frac{v^2}{2a}, \text{ takže střední zpomalení } a = \frac{v^2}{2s}, \quad a = \frac{100 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}{2 \cdot 20 \text{ m}} = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2};$$

1 Úvod do dynamiky

doba brzdění je tedy

$$t = \frac{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 4 \text{ s}$$

a střední brzdicí síla

$$F_s = 8\,000 \text{ kg} \cdot \frac{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{4 \text{ s}} = 20\,000 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 20 \cdot 10^3 \text{ N} = 20 \text{ kN}.$$

Úlohy

1. Kládivo o hmotnosti 4 kg dopadá na výkovek rychlostí 6 m . s⁻¹. Jaká je střední kovací síla, trvá-li ráz 0,01 s?
2. Vagon o hmotnosti 20 t se pohybuje rychlostí 54 km . h⁻¹. Jaká je střední brzdicí síla, zastaví-li se vagon za 60 sekund?
3. Z pušky o hmotnosti 8 kg byla vystřelena střela o hmotnosti 20 g rychlostí 600 m . s⁻¹. Vypočítejte zpětnou rychlost pušky.
4. Beran bucharu o hmotnosti 2 400 kg dopadá z výšky 1,8 m. Vypočítejte hybnost beranu a střední kovací sílu, trvá-li ráz $\frac{1}{80}$ sekundy a je-li $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
5. Jak velká zrychlující síla působí na jeřábovou kočku o hmotnosti 800 kg, dosáhne-li rychlosti 0,8 m . s⁻¹ za 0,5 s?
(Výsledky: 1. $F_s = 2\,400 \text{ N}$; 2. $F_s = 5 \text{ kN}$; 3. $v = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; 4. $H = 14,4 \text{ kN} \cdot \text{s}$, $F_s = 1,152 \text{ MN}$; 5. $F_z = 1\,280 \text{ N}$.)

Kontrolní otázky

1. Co je impulz síly a hybnost?
2. Jaký je vztah mezi impulzem síly a hybností?
3. Čemu se rovná přírůstek hybnosti?

1.1.1 Odstředivá a dostředivá síla

V kinematice jsme poznali, že při rovnoměrném otáčivém pohybu bodu kolem pevné osy je směr rychlosti v bodu v libovolném místě trajektorie tohoto bodu totožný se směrem tečny v tomto bodě. Má-li se bod pohybovat po kružnici, musí na něj působit síla, která jej udržuje na kruhové trajektorii (o poloměru R) a působí do středu O (obr. 5). Ve směru normály působí dostředivé (normálové) zrychlení a_n :

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad v \text{ je obvodová rychlost, } v = R \cdot \omega,$$

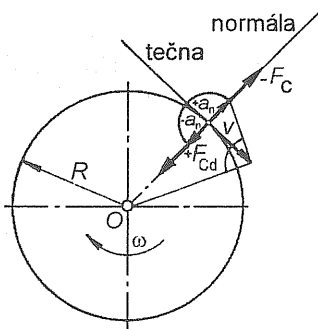
$$a_n = R \cdot \omega^2, \quad \omega \text{ je úhlová rychlost.}$$

Dostředivá síla je dána vztahem $F_{Cd} = m \cdot a_n = m \cdot R \cdot \omega^2$.

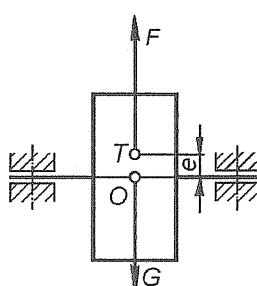
Tato akční síla vyvoluje – podle třetího pohybového zákona – reakční odstředivou sílu stejné velikosti jako je dostředivá síla, stejného směru, ale opačného smyslu.

Odstředivá síla $F_C = m \cdot a_n = m \cdot R \cdot \omega^2 = F_{Cd}$.

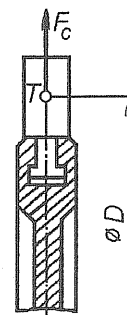
Jednotkou je 1 newton (jak vyplývá i z daného vztahu).



Obr. 5. Síly působící na bod při pohybu po kružnici



Obr. 6



Obr. 7

Stejně jako odstředivou sílu hmotného bodu můžeme vypočítat *odstředivou sílu tělesa*, dosadíme-li za poloměr R vzdálenost e těžiště T tělesa od osy otáčení O a za hmotnost m hmotnost celého tělesa (obr. 6):

$$F_C = m \cdot e \cdot \omega^2.$$

1 Úvod do dynamiky

O existenci odstředivé síly se můžeme přesvědčit při jízdě na kole, při praní (odstřeďování) v pračce, roztočením kuličky upevněné na motouzu apod.

Příklad 1

Lopatka parní turbíny má hmotnost 0,08 kg. Turbína koná 50 otáček za sekundu. Vypočítejte odstředivou sílu lopatky, pohybuje-li se její těžiště po kruhové trajektorii o průměru 1 m (obr. 7).

Řešení:

$$F_C = m \cdot R \cdot \omega^2, \quad \omega = 2\pi n, \quad F_C = 0,08 \text{ kg} \cdot 0,5 \text{ m} \cdot (2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1})^2 = 3\,943,8 \text{ N}.$$

Příklad 2

Řemenice o hmotnosti 120 kg koná 6 otáček za sekundu. Jaká je nevyvážená odstředivá síla, leží-li těžiště řemenice ve vzdálenosti 2 mm od osy otáčení?

Řešení:

$$F_C = m \cdot R \cdot \omega^2, \quad F_C = 120 \text{ kg} \cdot 0,002 \text{ m} \cdot (2\pi \cdot 6 \text{ s}^{-1})^2 = 340,75 \text{ N}.$$

Úlohy

1. Koule o hmotnosti 4 kg obíhá ve vodorovné rovině kolem pevné osy na tenkém ocelovém lanku o délce 600 mm. Jaká odstředivá síla napíná lanko při 3,5 otáčkách za sekundu?
2. Nákladní automobil o hmotnosti 5 000 kg projíždí zatáčkou o poloměru 50 m rychlostí 72 km · h⁻¹. Jaká odstředivá síla působí na automobil?

(Výsledky: 1. $F_C = 1\,160 \text{ N}$; 2. $F_C = 40 \text{ kN}$.)

Kontrolní otázky

1. Co zajišťuje pohyb bodu po kruhové trajektorii?
2. Jaký je rozdíl mezi dostředivou a odstředivou silou?
3. Na příkladech vysvětlíte účinek odstředivé síly.

1.2 Mechanická práce, výkon, účinnost, mechanická energie

1.2.1 Mechanická práce

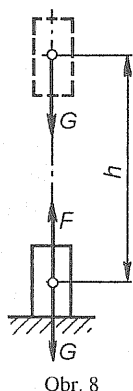
Pohybuje-li se bod nebo těleso po určité dráze, působí na něj určitá hnací síla. Protože těleso klade proti pohybu odpor, je nutno tento odpor překonat. Překonáváme-li odpory silou po určité dráze, konáme *mechanickou práci*. Práce je fyzikální veličina vyjadřující dráhový účinek síly.

Mechanická práce je rovna součinu síly a dráhy ve směru síly, značíme ji W. Její jednotkou je 1 joule (J); je to práce, kterou vykoná stálá síla velikosti 1 N působící na dráze 1 m ve směru síly.

1.2.1.1 Mechanická práce síly stálé velikosti

a) *Práce stálé síly ve směru dráhy*

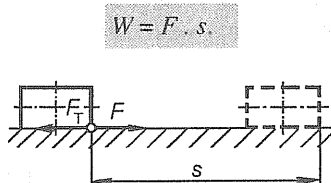
Zdviháme-li těleso o tíze G do určité výšky h , musíme působit silou překonávající odpor tíhy po dráze h , a tím konáme mechanickou práci (obr. 8). Tato práce bude tím větší, čím větší bude tíha tělesa a jeho dráha. Platí



Obr. 8

$$W = G \cdot h.$$

Obdobně konáme mechanickou práci, překonáváme-li odpory při pohybu po dráze v jiném směru než svislém. Táhneme-li např. těleso po vodorovné podložce (obr. 9), musíme překonávat odpor tření. Musíme vyvinout stejně velkou sílu F , jako je třecí síla F_T , a to ve směru pohybu po dráze s :



$$W = F \cdot s$$

Obr. 9

1 Úvod do dynamiky

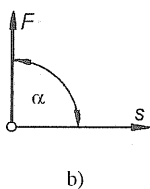
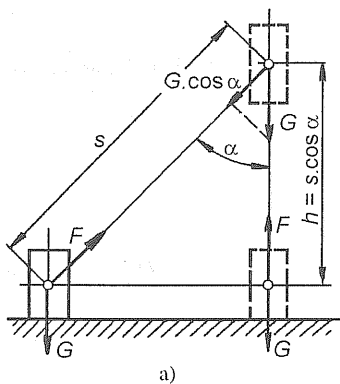
b) Práce stálé síly v nesouhlasném směru se směrem dráhy

Působí-li na břemeno o tíze G stálá síla F šikmo vzhůru po dráze s , koná stejně velkou mechanickou práci jako při zdvihání břemene do výšky h přímo vzhůru (obr. 10a):

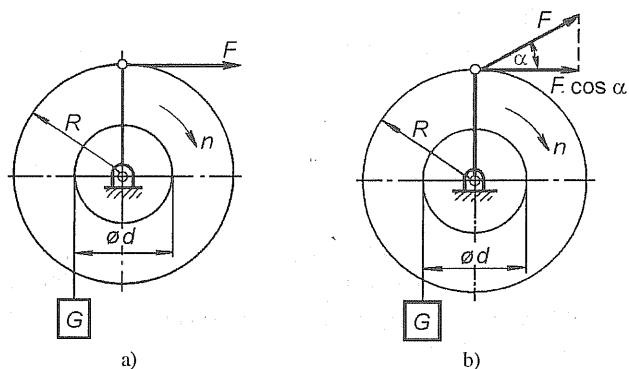
$$W = G \cdot h = G \cdot s \cdot \cos \alpha.$$

Při výpočtu mechanické práce počítáme s průmětem dráhy do směru síly nebo s průmětem síly do směru dráhy. Obecně můžeme říci, že mechanickou práci vypočítáme, *znásobíme-li sílu průmětem dráhy do směru síly*, nebo naopak, *znásobíme-li dráhu průmětem síly do směru dráhy*.

Působí-li síla kolmo ke směru dráhy (obr. 10b), je úhel $\alpha = 90^\circ$ a práce se nekoná, neboť $\cos 90^\circ = 0$ ($W = F \cdot s \cdot \cos 90^\circ = 0$).



Obr. 10. Práce síly na dráze



Obr. 11

c) Práce stálé síly na klice

Uvažujme případ (obr. 11a), kdy na kliku působí stálá síla F ve směru tečny ke kruhové trajektorii, vytvářené koncovým bodem kliky, otáčející se okolo pevného čepu, tedy v každém bodě trajektorie kolmá k ramenu kliky. Součin síly F a ramena R je točivý neboli *krotivý moment* a označuje se M_k .

Rozdělíme-li kruhovou dráhu s (délky $2\pi R$) na nekonečně malé úseky $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$, můžeme tyto úseky považovat za přímé a jejich směr shodný se směrem síly F v daném úseku. Na každém takovém úseku je *práce síly F elementární*, tj. nekonečně malá, a platí: $\Delta W_1 = F \cdot \Delta s_1, \Delta W_2 = F \cdot \Delta s_2, \dots, \Delta W_n = F \cdot \Delta s_n$.

Celková práce je rovna součtu elementárních prací:

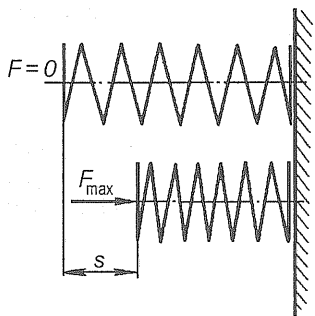
$$W = \sum \Delta W_i = F \cdot \sum \Delta s_i, \quad W = F \cdot s.$$

Když síla F nepůsobí tečně ke kruhové trajektorii (obr. 11b), ale svírá s tečnou úhel α , uvažuje se průmět síly F do směru tečny, tedy složka $F \cdot \cos \alpha$.

1.2.1.2 Mechanická práce síly proměnné velikosti

a) Práce na pružině

Při stlačování nebo prodlužování šroubovitě pružiny se velikost síly stále mění, a to přímo úměrně s rostoucím stlačením nebo prodloužením (obr. 12). Při nezátížené pružině je počáteční síla $F_0 = 0$ a při největším stlačení nebo prodloužení má hodnotu F_{\max} .



Obr. 12. Stlačování pružiny silou proměnné velikosti

Při výpočtu práce počítáme se střední průměrnou silou F_s :

$$F_s = \frac{F_0 + F_{\max}}{2}, \quad \text{u nezátížené pružiny } F_s = \frac{F_{\max}}{2}.$$

Práce proměnné síly na pružině se tedy vypočítá ze vztahu

$$W = F_s \cdot s = \frac{1}{2} F_{\max} \cdot s.$$

V technické praxi bývá pružina montována s určitým *předpětím*, tzn., že na počátku pracovního zdvihu je již stlačena počáteční silou F_1 . Na konci pracovního zdvihu pak působí síla F_2 . Při rovnoměrném nárůstu stlačující síly počítáme opět se střední průměrnou silou F_s (grafické znázornění je na obr. 14b):

$$F_s = \frac{F_1 + F_2}{2}.$$

Celková práce se v tomto případě vypočte ze vztahu

$$W = F_s \cdot s = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot s.$$

1 Úvod do dynamiky

b) Práce pístového motoru

Při expanzi plynů v pístovém spalovacím motoru působí na píst proměnná síla. Maximální je v horní úvrati pístu po zažehnutí směsi, minimální je v dolní úvrati pístu v okamžiku otevření výfukového ventilu.

Celková práce se rovná součtu elementárních prací na velmi krátkých drahách, na kterých pokládáme sílu za stálou. Místo s proměnnou silou F_i počítáme se střední průměrnou silou F_s . Práce se vypočítá jako obsah plochy (obr. 14c):

$$W = \sum F_i \cdot \Delta s_i = F_s \cdot s.$$

Jestliže vyjádříme střední průměrnou sílu jako

$$F_s = p_s \cdot S,$$

kde p_s je střední tlak,

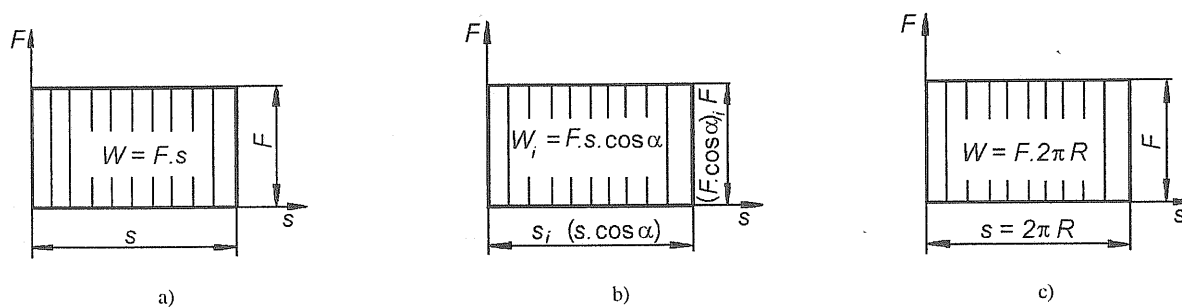
S – plocha pístu,

V – zdvihový objem, $V = S \cdot s$,

potom

$$W = p_s \cdot V.$$

1.2.1.3 Grafické znázornění práce



Obr. 13. Práce stálé síly a) ve směru dráhy, b) v nesouhlasném směru ke směru dráhy, c) na klice

Velikost práce *stálé síly* je v případech uvedených na obr. 13 dána plochou:

a) obdélníka:

$$W = F \cdot s;$$

b) obdélníka, kde svislá složka je síla a vodorovná složka je průmět dráhy do směru síly, nebo naopak, svislá složka je průmět síly do směru dráhy a vodorovná složka je dráha:

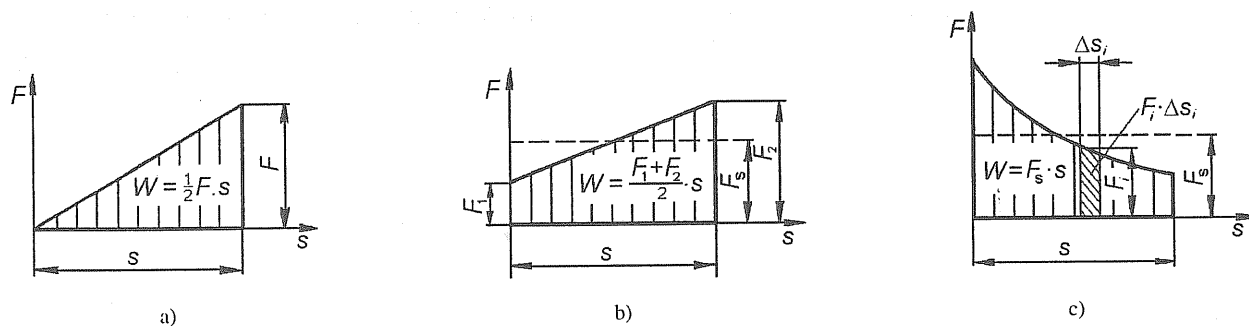
$$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha;$$

c) obdélníka, kde svislá složka udává velikost stálé síly a vodorovná složka kruhovou dráhu. Práce za jednu otáčku:

$$W = F \cdot s = F \cdot 2\pi \cdot R;$$

Práce za i otáček:

$$W = F \cdot 2\pi \cdot R \cdot i$$



Obr. 14. Práce proměnné síly a) na volné pružině, b) na pružině s předpětím, c) v pístovém motoru

Velikost práce *proměnné síly* je v případech uvedených na obr. 14 dána plochou:

a) trojúhelníka:

$$W = \frac{1}{2} F \cdot s;$$

b) lichoběžníka:

$$W = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot s = F_s \cdot s;$$

c) ohraničenou osami síly a dráhy a křivkou proměnné síly.

Při rozložení na elementární práce na velmi krátkých drahách se rovná součtu těchto elementárních prací.

$$W = \sum F_i \cdot \Delta s_i = F_s \cdot s.$$

1 Úvod do dynamiky

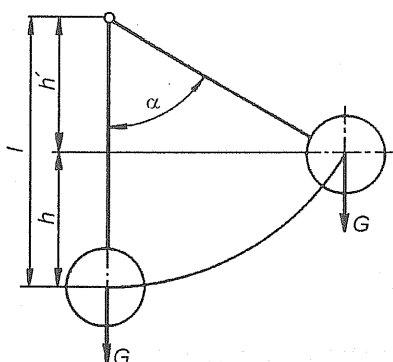
Příklad 1

Elektromotor zdvihadla zvedá břemeno o hmotnosti 3 t po dobu 10 sekund rychlostí $0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jakou práci vykoná? Uvažujeme $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Řešení:

$$W = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot v \cdot t, \quad W = 3\,000 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 10 \text{ s} = 150\,000 \text{ J} = 150 \text{ kJ}.$$

Příklad 2



Obr. 15

Koule kyvadla, jehož délka je 1,5 m, má hmotnost 5 kg. Jakou práci vykonáme, vychýlíme-li kyvadlo o úhel 60° ? Uvažujeme $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Řešení:

$$W = m \cdot g \cdot h, \quad h = l - h'.$$

Vypočítáme neznámou veličinu h' (obr. 15):

$$h' = l \cdot \cos \alpha, \quad \alpha = 60^\circ, \quad h' = (1,5 \cdot 0,5) \text{ m} = 0,75 \text{ m}, \\ h = (1,5 - 0,75) \text{ m} = 0,75 \text{ m}.$$

$$W = (5 \cdot 10 \cdot 0,75) \text{ J} = 37,5 \text{ J}.$$

Příklad 3

Dva dělníci otáčejí klikou zdvihadla o délce 400 mm každý silou 250 N. Jakou práci vykonají za 120 otáček?

Řešení:

$$W = 2F \cdot 2\pi \cdot R \cdot i_n, \quad W = (2 \cdot 250 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 0,4 \cdot 120) \text{ J} = 150\,720 \text{ J} = 150,72 \text{ kJ}.$$

Příklad 4

Dva teleskopické pružinové tlumiče motocyklu jsou zatíženy vlastní tíhou motocyklu silou $F_1 = 1\,000 \text{ N}$. Při plném zatížení motocyklu silou $F_2 = 2\,000 \text{ N}$ se stlačí o 80 mm. Jaká práce se při stlačení vykoná?

Řešení:

$$W = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot s, \quad W = \left(\frac{1\,000 + 2\,000}{2} \cdot 0,08 \right) \text{ J} = 120 \text{ J}.$$

Úlohy

1. Je-li řezný odpor při hoblování 3 000 N a zdvih nože 800 mm, jaká práce se vykoná za 10 zdvihů?
2. Dělník vynáší na rampu po prkně dlouhém 5 m a skloněném o úhel 30° bedny o hmotnosti 15 kg. Jakou práci vykoná, odnese-li 100 beden (při $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)?
3. Vypočítejte práci na klice bubnového zdvihadla za 160 otáček při poloměru kliky 400 mm a obvodové síle 120 N.
4. Jakou práci vykonáme navinutím svisle visícího lana o délce 200 m na buben, je-li hmotnost 1 m lana 2 kg, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, tření zanedbáme? Tíhu lana přeneste do jeho těžiště.
5. Jaká práce se vykoná při stlačení nezatížené šroubovitě válcové pružiny o 60 mm silou 700 N?

(Výsledky: 1. $W = 24 \text{ kJ}$; 2. $W = 37,5 \text{ kJ}$; 3. $W \doteq 48,23 \text{ kJ}$; 4. $W = 400 \text{ kJ}$; 5. $W = 21 \text{ J}$.)

Kontrolní otázky

1. Kdy konáme mechanickou práci?
2. Vyjádřete mechanickou práci stálé síly a) v souhlasmém směru síly a dráhy, b) při odklonu síly od směru dráhy.
3. Jak se vyjádří mechanická práce na klice?
4. Jak se vyjádří mechanická práce proměnné síly na volné pružině a na pružině s předpětím?
5. Vyjádřete práci u pístového motoru.
6. Vyjádřete mechanickou práci graficky.

1.2.2 Výkon

Výkon P je mechanická práce vykonaná za jednotku času:

$$P = \frac{W}{t}.$$

Jednotkou výkonu je 1 watt (W). Watt je výkon, při němž se vykoná práce 1 joulu za 1 sekundu ($1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$).

1 Úvod do dynamiky

V praxi se často používají také násobky jednotky výkonu:

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ kilowatt} & 1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}, \\ 1 \text{ megawatt} & 1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W} = 1\,000 \text{ kW}. \end{array}$$

Koná-li práci síla stálé velikosti ve směru pohybu tak, že se bod nebo těleso pohybuje rovnoměrně rychlostí $v = \frac{s}{t}$, můžeme vyjádřit výkon takto:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v, \quad \text{tedy v tomto případě je výkon dán součinem síly a rychlosti.}$$

Při stálém výkonu je součin síly a rychlosti stálý, což se využívá u pracovních strojů s hlavním pohybem kruhovým (elektromotor, soustruh, frézka). Při malé obvodové síle je zde velká obvodová rychlost, a naopak při malé obvodové rychlosti velká obvodová síla.

Výkon člověka je 70 až 80 W, výjimečně po krátkou dobu až desetkrát větší, výkon např. žehličky je přibližně 1 200 W, elektrického sporáku asi 4 200 W, elektrické lokomotivy 3 400 kW.

Ze základní rovnice pro výkon můžeme vyjádřit práci:

$$W = P \cdot t.$$

Z tohoto vztahu dostaneme další jednotky pro práci, odvozené z jednotek pro výkon a čas:

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ wattsekunda} & 1 \text{ Ws} = 1 \text{ J}, \\ 1 \text{ watthodina} & 1 \text{ Wh} = 3\,600 \text{ J}, \\ 1 \text{ kilowatthodina} & 1 \text{ kWh} = 3\,600\,000 \text{ J} = 3,6 \text{ MJ}. \end{array}$$

Působí-li síla F stálé velikosti ve směru tečny ke kruhové dráze s (na klice, řemenici, ozubeném kole apod.), můžeme při známém poloměru R dráhy a známém počtu otáček n vypočítat výkon této obvodové síly ze vztahu

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v = F \cdot 2\pi R n = M_k \cdot 2\pi n = M_k \cdot \omega,$$

kde v je obvodová rychlost ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$),
 $M_k = F \cdot R$ (N · m) – krouticí moment,
 ω – úhlová rychlost ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$).

V technické praxi často vyjadřujeme z uvedeného vztahu krouticí moment M_k :

$$M_k = \frac{P}{2\pi n} = \frac{P}{\omega}.$$

U vodních strojů (vodních turbín a čerpadel) se užívá pro výpočet výkonu vztah

$$P = Q_v \cdot \rho \cdot g \cdot H,$$

kde Q_v je objemový průtok ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$),
 ρ – hustota vody ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$),
 g – tíhové zrychlení ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$),
 H – spád (m).

Často nepřibývá práce rovnoměrně s časem a vztahy závislosti jsou složitější. Základní rovnice udává střední průměrný výkon, i když ve skutečnosti může být výkon v každém okamžiku jiný; jedná se o tzv. *okamžitý výkon*, výkon za velmi krátký čas t , za který se vykoná základní práce ΔW :

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}.$$

Příklad 1

Jestliže lokomotiva vyvine při rychlosti $108 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ tažnou sílu 25 kN, jaký je její výkon?

Řešení:

$$P = F \cdot v, \quad P = \left(\frac{25 \cdot 10^3 \cdot 108 \cdot 10^3}{3\,600} \right) \text{ W} = 750 \text{ kW}.$$

Příklad 2

Jakou práci vykoná elektromotor při výkonu 6 kW za 8 hodin?

Řešení:

$$W = P \cdot t, \quad W = (6 \cdot 8) \text{ kWh} = 48 \text{ kWh}.$$

1 Úvod do dynamiky

Příklad 3

Jaký je výkon elektromotoru, který zvedne břemeno o hmotnosti 10 t do výšky 3 m za 10 sekund, je-li $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?

Řešení:

$$P = \frac{m \cdot g \cdot s}{t}, \quad P = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 3}{10} \text{ W} = 30\,000 \text{ W} = 30 \text{ kW}.$$

Příklad 4

Jak vysoko je položena nádrž vodárny, do níž se denně za 24 hodin načerpá 7 200 hl vody čerpadlem s elektromotorem o výkonu 2,5 kW, je-li $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?

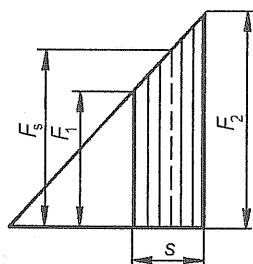
Řešení:

$$H = \frac{P}{Q_V \cdot \rho \cdot g}, \quad P = \frac{W}{t}, \quad Q_V = 7\,200 \text{ hl} = 720 \text{ m}^3, \quad H = \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot 24 \cdot 3\,600}{720 \cdot 10^3 \cdot 10} \text{ m} = 30 \text{ m}.$$

Příklad 5

Jaký výkon je teoreticky zapotřebí ke stlačování jedné šroubovitě válcové pružiny ventilu spalovacího motoru při 50 stlačeních za sekundu a zdvihu 12 mm, je-li předpětí pružiny 90 N a maximální síla 140 N (obr. 16)?

Řešení:



Práce při jednom stlačení pružiny $W = F_s \cdot s = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot s,$

$$W = \left(\frac{90 + 140}{2} \cdot 0,012 \right) \text{ J} = 1,38 \text{ J}.$$

Stlačíme-li pružinu padesátkrát za sekundu, pak průměrný výkon $P = \frac{W}{t},$

$$P = \frac{1,38 \cdot 50}{1} \text{ W} = 69 \text{ W} = 0,069 \text{ kW}.$$

Obr. 16. Pracovní diagram pružiny

Úlohy

1. Řezný odpor při hoblování je 3 kN a zdvih nože je 800 mm. Stroj koná 10 zdvihů za minutu. Jaký je jeho výkon?
2. Jaký je výkon jeřábu, který zvedne břemeno o hmotnosti 10 t do výšky 12 m za 2 minuty?
3. Jaký výkon je teoreticky třeba při soustružení ocelového hřídele o průměru 120 mm, koná-li 10 otáček za sekundu a je-li tlak na nůž 4 000 N?
4. Jaký výkon má vodní motor, protéká-li jím 10 m^3 vody za sekundu při spádu 15 m?
5. Jaký je teoreticky výkon čerpadla, které dopravuje 30 l vody za sekundu do výšky 40 m?
(Výsledky: 1. $P = 0,4 \text{ kW}$; 2. $P = 10 \text{ kW}$; 3. $P = 15 \text{ kW}$; 4. $P = 1,47 \text{ MW}$; 5. $P = 11,77 \text{ kW}$.)

Kontrolní otázky

1. Definujte výkon v závislosti: a) na práci a času, b) na síle a rychlosti, c) na krouticím momentu a úhlové rychlosti.
2. Vyjmenujte jednotky výkonu.
3. Vyjmenujte jednotky pro práci odvozené z výkonu a času.

1.2.3 Účinnost strojů a zařízení

Energie přiváděná do stroje či mechanismu je zmenšena o ztráty vzniklé třením při pohybu kluzných ploch, vířením vzduchu, oleje atd. Proto je potřeba vynaložit i část mechanické práce na překonání těchto odporů.

Celková práce je vynaložena na práci užitečnou a práci ztrátovou:

$$W_{\text{pr}} = W_{\text{už}} + W_{\text{z}}$$

Stejně je tomu i u výkonu. Kromě užitečného výkonu $P_{\text{už}}$ se u každého stroje vyskytuje i ztrátový výkon P_{z} , takže celkový přijímaný výkon, neboli *příkon* P_{pr} , je součtem užitečného a ztrátového výkonu:

$$P_{\text{pr}} = P_{\text{už}} + P_{\text{z}}$$

1 Úvod do dynamiky

Dokonalost strojního zařízení posuzujeme podle toho, kolik dodané energie se přemění v užitečnou práci. *Poměr užitečného výkonu k příkonu se nazývá účinnost* a označuje se η :

$$\eta = \frac{P_{už}}{P_{př}}$$

Účinnost je míra využití energie. Je to *bezrozměrové číslo* vždy *menší než jedna*. V technické praxi se účinnost vyznačuje také v procentech; např. účinnost 0,7 je účinnost 70 %.

Ze základní rovnice pro účinnost plynou i důležité vztahy pro užitečný výkon a příkon:

$$P_{už} = \eta \cdot P_{př}, \quad P_{př} = \frac{P_{už}}{\eta}$$

Skládá-li se strojní zařízení z několika strojů, jejichž účinnost je $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$, a tyto stroje jsou řazeny za sebou, je užitečný výkon jednoho stroje příkonem dalšího stroje a výsledná neboli *celková účinnost* η_c celého strojního zařízení je dána součinem jednotlivých účinností:

$$\eta_c = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots$$

Příklad 1

Elektromotor odebírá ze sítě 12,5 kW a dodává pracovnímu stroji na řemenici užitečný výkon 10 kW. Jaká je jeho účinnost?

Řešení:

$$\eta = \frac{P_{už}}{P_{př}}, \quad \eta = \frac{10 \text{ kW}}{12,5 \text{ kW}} = 0,8.$$

Účinnost je 80 %.

Příklad 2

Jaký je příkon elektromotoru jeřábu, který zvedne břemeno o hmotnosti 10 t do výšky 3 m za 10 sekund při celkové účinnosti 80 % ($g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)?

Řešení:

$$P_{př} = \frac{P_{už}}{\eta} = \frac{m \cdot g \cdot v}{\eta}, \quad P_{př} = \frac{10\,000 \cdot 10 \cdot \frac{3}{10}}{0,8} \text{ W} = 37,5 \text{ kW}.$$

Příklad 3

Čerpadlo dodalo za 1 hodinu 14,4 m³ vody do dopravní výšky 20 m. Vypočítejte výkon a příkon čerpadla při celkové účinnosti 80 %, je-li *hustota vody* $\rho = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Řešení:

$$P_{už} = \frac{\rho \cdot g \cdot Q \cdot h}{t}, \quad P_{už} = \frac{1\,000 \cdot 10 \cdot 14,4 \cdot 20}{3\,600} \text{ W} = 800 \text{ W},$$

$$P_{př} = \frac{P_{už}}{\eta}, \quad P_{př} = \frac{800}{0,8} \text{ W} = 1\,000 \text{ W} = 1 \text{ kW}.$$

Úlohy

1. Jaký je výkon a příkon motoru jeřábu, který zvedá břemeno o hmotnosti 10 t do výšky 12 m za 2 minuty při účinnosti 70 %?
2. Stříkačka vrhá 2 000 litrů vody za minutu do výšky 30 m a má účinnost 80 %. Jaký je příkon čerpadla?
3. Jaký je užitečný výkon a příkon vodní turbíny, protéká-li jí 24 m³ vody za sekundu se spádem 50 m, je-li účinnost turbíny 80 %?
4. Jaký je užitečný výkon generátoru s účinností 0,85, poháněného vodní turbínou jako v úloze 6?
5. Vypočítejte příkon motoru jeřábu, který zvedá břemeno 20 t rychlostí 4 m · min⁻¹, je-li účinnost motoru 0,9 a účinnost zvedacího zařízení 0,6?

(Výsledky: 1. $P_{už} = 9,81 \text{ kW}$, $P_{př} = 14,01 \text{ kW}$; 2. $P_{př} = 12,26 \text{ kW}$; 3. $P_{už} = 9,42 \text{ MW}$, $P_{př} = 11,72 \text{ MW}$; 4. $P_{už} = 8 \text{ MW}$; 5. $P_{př} = 24,22 \text{ kW}$.)

1 Úvod do dynamiky

Kontrolní otázky

1. Co je užitečný výkon a příkon?
2. Co je účinnost a jak ji vyjadřujeme?
3. Jak se vyjádří celková účinnost?

1.2.4 Mechanická energie

Každé těleso je schopno konat práci, jestliže se buď pohybuje, anebo se může pohybovat. Například padající beran ztlouká kůly, proudící voda roztáčí vodní turbíny, pára parní turbíny atd.

Rozlišujeme různé formy energie: mechanickou, tepelnou, elektrickou, světelnou, chemickou, jadernou, energii magnetického pole aj.

Velikost energie posuzujeme podle velikosti práce, kterou může hmotný bod, příp. těleso vykonat. Proto i jednotky energie jsou stejné jako jednotky práce.

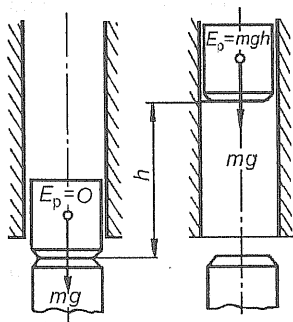
Ve strojírenské praxi je nejdůležitější *mechanická energie*. Celková mechanická energie hmotného bodu, příp. tělesa nebo mechanické soustavy, je součtem *energie polohy* (potenciální) a *pohybové* (kinetické) energie.

1.2.4.1 Energie polohy

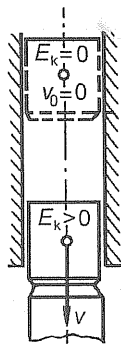
Zdvihneme-li těleso (např. beran bucharu, obr. 17) o hmotnosti m do výšky h , vykonáme práci $W = mgh$. Těleso má v této nové poloze schopnost vykonat tutéž práci, tzn., že pro jeho potenciální energii E_p platí:

$$E_p = mgh.$$

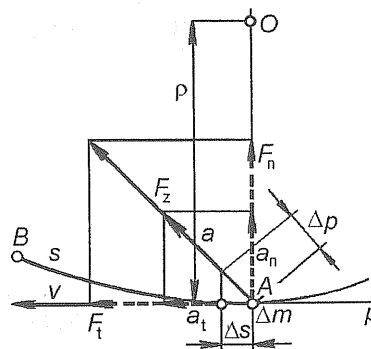
Obdobně na stlačení pružiny je potřebná *přetvárná (deformační) práce*, tj. práce potřebná k přetvoření (deformaci) tělesa. Touto prací vnější síly získá pružina *energií napjatosti*, tedy také potenciální energii, protože při uvolnění zatěžující síly se pružina vrací do původního stavu, a tím uvolňuje dodanou vnější práci.



Obr. 17



Obr. 18. Změna energie polohy v pohybovou energii



Obr. 19. Pohyb volného bodu působením zrychlující síly F_z

1.2.4.2 Pohybová (kinetická) energie

Začne-li síla F_z obecného směru a různé velikosti působit na volný bod hmotnosti m , který se pohybuje po přímce p rovnoměrnou rychlostí v_0 , způsobí okamžitou změnu původního pohybu na pohyb nerovnoměrný křivočarý (obr. 19). U volného bodu nejsou reakční účinky s pasivními odpory, proto je tato původní síla zrychlující silou F_z . Zrychlující síla způsobí absolutní zrychlení a pohybu. V daném bodě A rozložíme sílu F_z na tečnou složku F_t a k ní kolmou normálovou složku F_n . Každá z těchto složek má na bod samostatný účinek. Tečná složka vyvolává u bodu tečné zrychlení a_t , které udává změnu velikosti rychlosti, normálová síla se zrychlením a_n způsobuje změnu směru pohybu. Platí

$$F_t = ma_t = m \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad F_n = ma_n = m \frac{v^2}{\rho}, \quad \text{kde } \rho = |OA| \text{ je poloměr křivosti dráhy.}$$

Bod urazí působením zrychlující síly F_z za čas t dráhu s . Na konci této dráhy (v bodě B) bude mít rychlost $v > v_0$. Změna rychlosti, a tím i změna energie pohybu bodu, je výsledkem práce zrychlující síly F_z na dráze s . Protože složka F_n zrychlující síly F_z je vždy kolmá k trajektorii pohybujícího se bodu, nekoná práci. Pro zjištění práce zrychlující síly stačí tedy určit práci její tečné složky F_t . Platí

$$\Delta W = F_t \cdot \Delta s = F_z \cdot \Delta \rho, \quad \text{kde } \Delta \rho \text{ je velmi malá (elementární) dráha ve směru síly } F_z, \quad F_t \cdot \Delta s = \frac{1}{2} m \cdot (\Delta v)^2.$$

1 Úvod do dynamiky

Celková práce síly F_z na dráze s z bodu A do bodu B je dána výrazem

$$W = \sum \Delta F_{\dot{u}} \cdot \Delta s_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Přírůstek pohybové energie hmotného bodu mezi dvěma polohami je dán prací zrychlující síly.

Začne-li se bod hmotnosti m pohybovat obecným pohybem vlivem stálé zrychlující síly F_z , potom za určitý čas vykoná dráhu s , na jejímž konci bude mít rychlost v . Zrychlující síla vykoná práci

$$W = F_z \cdot s, \quad F_z = ma,$$

a uvažujeme-li rovnoměrně zrychlený pohyb, platí $s = \frac{v^2}{2a}$, takže po dosazení získáme vztah

$$W = F_z \cdot s = ma \frac{v^2}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 = E_k, \text{ kde } E_k \text{ je pohybová energie.}$$

Každému bodu, příp. tělesu (např. beranu bucharu padajícímu z výšky h – obr. 18), přísluší za pohybu jistá pohybová energie, úměrná druhé mocnině okamžité rychlosti.

Vycházeli jsme z předpokladu, že počáteční rychlost v_0 byla rovna nule; nebude-li v_0 rovno nule, je počáteční pohybová energie

$$E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Jestliže se rychlost pohybujícího se bodu, příp. tělesa, zvýší působením zrychlující síly F_z po dráze s na konečnou rychlost v , má těleso na konci pohybu pohybovou energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

Práce zrychlující síly F_z na dráze s způsobila přírůstek pohybové energie:

$$W = F_z \cdot s = E_k - E_{k0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2).$$

Stejný výsledek získáme dosazením $F = ma$ a $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$.

Lze tedy říci, že zrychlující (zpožďující) práce síly na dokonale tuhém bodě, příp. tělese, je rovna přírůstku (úbytku) pohybové energie.

Abychom mohli porovnávat energie různých těles, vztahujeme energii E na objemovou jednotku V tělesa a užíváme pojem (objemová) hustota energie w :

$$w = \frac{E}{V} \quad (\text{J} \cdot \text{m}^{-3}).$$

1.2.5 Dynamika otáčivého pohybu

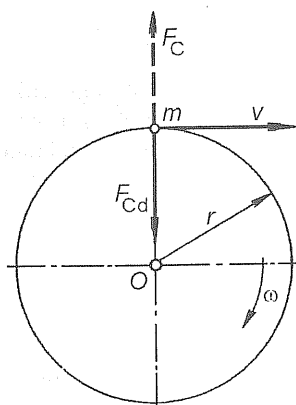
1.2.5.1 Pohyb hmotného bodu po kružnici ve vodorovné rovině

Sledujme pohyb bodu M o hmotnosti m , upevněného na nehmotném vlákně délky r , který se otáčí ve vodorovné rovině kolem osy O (obr. 20). Hmotný bod se pohybuje rovnoměrnou rychlostí v , a proto se zde vyskytuje pouze normálové zrychlení

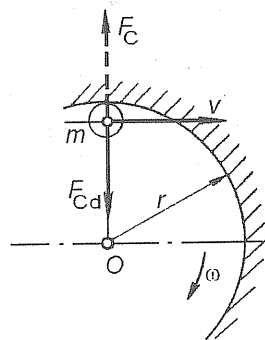
$$a_n = \frac{v^2}{r} = \text{konst}$$

Síla způsobující toto normálové zrychlení je *dostředivá síla*. Projevuje se buď napětím vlákna, nebo reakcí podpory (obr. 21). Podle d'Alembertova principu musí být dostředivá síla F_{Cd} v rovnováze se setrvačnou silou F_C , která směřuje od středu; F_C je *odstředivá síla*. Platí

$$F_C = ma_n = \frac{mv^2}{r}.$$



Obr. 20. Pohyb bodu po kružnici ve vodorovné rovině



Obr. 21. Odstředivá a dostředivá síla

1 Úvod do dynamiky

Odstředivá ani dostředivá síla práci nekonají, poněvadž jsou stále kolmé k trajektorii bodu. Odstředivá síla způsobuje napětí vlákna.

Příklad

Bod o hmotnosti 8 kg upevněný na pevném nehmotném vlákně se otáčí kolem pevné osy; jeho trajektorie je kružnice o poloměru 0,5 m, počet otáček 0,83 s⁻¹. Určete a) odstředivou sílu, b) jaké napětí vznikne ve vlákně o průměru 2 mm.

Řešení:

a) Odstředivá síla $F_C = mr\omega^2$ (ω je úhlová rychlost),

$$F_C = [8 \cdot 0,5 \cdot (2 \cdot 3,14 \cdot 0,83)^2] \text{ N} = 109 \text{ N},$$

b) vznikne napětí $\sigma_t = \frac{F_C}{S}$, S je plocha kruhového průřezu vlákna,

$$\sigma_t = \frac{109 \cdot 4}{3,14 \cdot 2^2} \text{ MPa} = 34,7 \text{ MPa}.$$

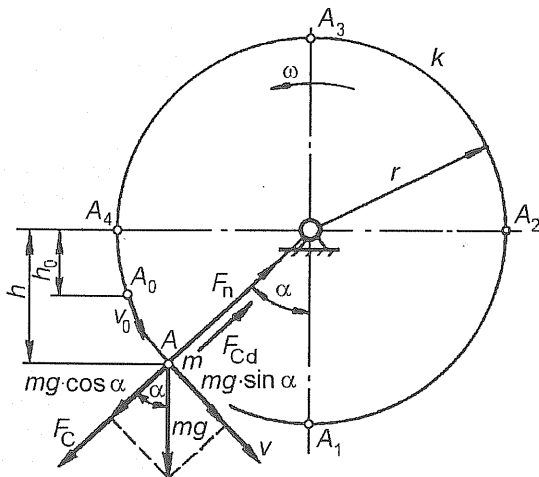
Úlohy

1. Letadlo letí rychlostí 720 km · h⁻¹ po obloukové trajektorii o poloměru 400 m. Jaká odstředivá síla působí na letce, jehož hmotnost je 70 kg? Jakou největší rychlostí může letadlo vletět do tohoto oblouku, jestliže letec snese desetkrát větší zrychlení, než je gravitační zrychlení?
2. Cyklista projíždí obloukem o poloměru 7 m rychlostí 6 m · s⁻¹. Pod jakým úhlem se musí cyklista odklonit od svislého směru, nemá-li být odstředivou silou vychýlen z dráhy?
3. Vypočítejte velikost odstředivé síly nevyvážku hmotnosti 20 kg umístěného ve vzdálenosti 0,5 m od středu setrvačnicku. Úhlová rychlost setrvačnicku je 30 rad · s⁻¹.
4. Vypočítejte potřebnou velikost úhlu sklonu železniční tratě v zatáčce poloměru 500 m tak, aby výsledná síla působící na vagon tíhy 4 · 10⁵ N jedoucí rychlostí 80 km · h⁻¹ směřovala kolmo na trať.
5. Při vrhu kladivem roztáčí atlet kladivo o hmotnosti 7,25 kg po kružnici o poloměru 1,8 m tak, že vykoná jednu otočku za 0,45 s. Jak velkou rychlost kladivo dosáhne a jak velkou dostředivou sílu musí atlet vyvinout?
6. Na ocelovém lanu délky 1 m a průměru 5 mm se točí ve vodorovné rovině koule o hmotnosti 7,2 kg 180krát za minutu. Jaké napětí vznikne v lanu?

(Výsledky: 1. $F_C = 7\,000 \text{ N}$, $v_{\text{max}} = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; 2. $\alpha = 27^\circ 15'$; 3. $F_C = 9\,000 \text{ N}$; 4. $\alpha = 5^\circ 40'$; 5. $v = 25,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $F_0 = 2,54 \text{ kN}$; 6. $\sigma_t = 130,22 \text{ MPa}$.)

1.2.5.2 Pohyb hmotného bodu po kružnici ve svislé rovině

Bod A o hmotnosti m , upevněný na nehmotném vlákně délky r (obr. 22), se točí ve svislé rovině okolo osy O pouze účinkem vlastní tíhy G . Kromě vlastní tíhy působí na bod ještě dostředivá síla F_{Cd} . Dostředivá síla F_{Cd} i tíha G jsou zrychlující síly, k nim přistupuje setrvačná síla, kterou je odstředivá síla F_C , která má stejný směr i velikost, ale opačný smysl k F_{Cd} i k celkové síle F_n .



Obr. 22. Pohyb hmotného bodu po kružnici ve svislé rovině

$$\text{Platí } G = mg, \quad F_C = \frac{mv^2}{r}.$$

Z podmínky rovnováhy ve směru kolmém na rychlost v

$$F_n - F_C - mg \cdot \cos \alpha = 0$$

Ize vypočítat celkovou sílu, která na vlákno působí:

$$F_n = F_C + mg \cdot \cos \alpha = \frac{mv^2}{r} + mg \cdot \cos \alpha.$$

Kdyby bod obíhal uvnitř válcové plochy, byla by síla F_n její reakcí. Má-li bod v poloze A_0 rychlost v_0 , pak se jeho rychlost v v libovolné poloze A na kruhové trajektorii k určí pomocí zákona o změně pohybové energie mezi body A_0 , A :

$$mg(h - h_0) = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2), \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2g(h - h_0)}.$$

Odtud vyplývá, že roste-li h , zvětšuje se i rychlost v . Proto největší rychlost přísluší poloze A_1 , kde $h = h_{\text{max}} = r$. Potom

$$v_1 = v_{\text{max}} = \sqrt{v_0^2 + 2g(r - h_0)}.$$

1 Úvod do dynamiky

Za touto polohou se h zmenšuje, a proto ubývá i rychlosti, která dosáhne minimální hodnoty v bodě A_3 , kde $h = -r$. Za polohou A_3 se rychlost opět začne zvyšovat, až přejde bod do polohy A_0 opět se stejnou rychlostí $v = v_0$. Bod koná periodický pohyb. Aby takový pohyb nastal, musí být vlákno stále napnuto, nebo reakce podpory kruhové trajektorie musí působit stále do středu otáčení.

Velikost síly napínající vlákno nebo reakce v poloze A_1 a A_3

V poloze A_1 je vlákno taženo největší silou
$$F_{n \max} = \frac{mv_{\max}^2}{r} + mg,$$

v poloze A_3 je
$$F_{n \min} = \frac{mv_{\min}^2}{r} - mg.$$

Aby se bod na kruhové dráze udržel (lano bylo stále napnuto), musí v poloze A_3 platit

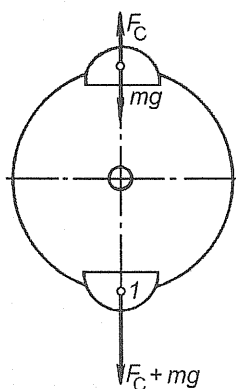
$$\frac{mv_{\min}^2}{r} = mg, \quad v_{\min} \geq \sqrt{gr}.$$

Ze zákona o zachování energie pro polohu A_1 platí
$$2mgr = \frac{mv_{\max}^2}{2} - \frac{mv_{\min}^2}{2}, \quad v_{\max} \geq \sqrt{5gr}.$$

Příklad

Určete nejmenší počet otáček, na které musí být roztočena houpačka s mužem, otáčející se okolo vodorovné osy ve svislé rovině (obr. 23), aby muž nemusel být připoután. Těžiště muže je vzdáleno od osy rotace 2 m.

Řešení:



Obr. 23

$$\frac{mv^2}{r} = mg, \quad v = \sqrt{rg},$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 4,43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

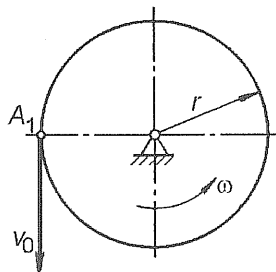
Známe-li obvodovou rychlost, lze ze vztahu $v = \pi d n$ určit

$$n = \frac{v}{\pi d}, \quad n = \frac{4,43}{3,14 \cdot 4} \text{ s}^{-1} = 0,35 \text{ s}^{-1}.$$

Úlohy

1. Odvoďte rovnici pro největší rychlost a sílu při rotaci ve svislé rovině, byla-li bodu udělena v libovolné poloze počáteční rychlost v_0 .

2. Bod o hmotnosti 4 kg je připevněn na ocelovém drátu o průměru 3 mm a délce 0,8 m. Po uvolnění z vodorovné polohy A (obr. 24) byla bodu udělena počáteční rychlost $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete: a) sílu napínající ocelový drát při průchodu nejnižší svislou polohou, b) sílu působící na ocelový drát v nejvyšší poloze, c) napětí, které vznikne v ocelovém drátu v nejnižší poloze, d) sílu ve vodorovných polohách, e) minimální otáčky, nemá-li těleso v nejvyšší poloze spadnout z kruhové dráhy.



Obr. 24

(Výsledky: 1. $v_{\max} = \sqrt{v_0^2 + 2g(r - h_0)}$, $F_{\max} = \frac{m \cdot v_{\max}^2}{r} + mg$; 2. a) $F_{\max} = 245 \text{ N}$,

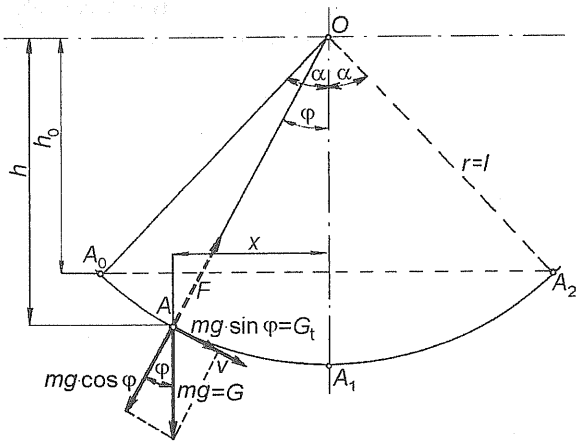
b) $F_{\min} = 5 \text{ N}$, c) $\sigma_t = 34,6 \text{ MPa}$, d) $F_{2,4} = 125 \text{ N}$, e) $n_{\min} = 0,59 \text{ s}^{-1}$.)

1.2.5.3 Matematické kyvadlo

Bod má v počáteční poloze A_0 rychlost $v_0 = 0$ (obr. 25). V libovolné poloze A má rychlost $v = \sqrt{2g(h - h_0)}$. S rostoucím h roste i rychlost; ta bude největší v poloze A_1 , kde $h = l$. Platí: $v_1 = v_{\max} = \sqrt{2g(l - h_0)}$. Bod se setrvačností pohybuje až do polohy A_2 , kde se zastaví, neboť $h = h_0$ a $v = 0$. Následuje zpětný pohyb do krajní polohy A_0 , což se stále opakuje. Takový pohyb je periodický, nazývá se *kyvavý pohyb*. Bod s nehmotným vláknem tvoří *matematické kyvadlo*. Dráha z A_0 do A_2 je výkyv, úhel α je *úhel výkyvu* a l je *délka kyvadla*.

1 Úvod do dynamiky

Pohyb kyvadla způsobuje tečná složka G_t tíhy G , složka G_t je zrychlující silou. V libovolné poloze A platí:



$$G_t = mg \cdot \sin \varphi = ma_t, \quad \sin \varphi = \frac{x}{l},$$

$$\text{tedy} \quad mg \frac{x}{l} = ma_t, \quad a_t = g \frac{x}{l}.$$

$$\text{Pak } G_t = mg \frac{x}{l}.$$

Pro malý výkyv je možno kývavý pohyb nahradit harmonickým pohybem, délka oblouku A_0A_1 je přibližně rovna x .

Doba jednoho kyvu, jež odpovídá polovině kmitu harmonického pohybu, je $t = \frac{\pi}{\omega}$.

Z rovnosti zrychlení obou pohybů lze vypočítat dobu jednoho kyvu.

$$\text{Zrychlení harmonického pohybu: } a = x\omega^2.$$

$$\text{Zrychlení kývavého pohybu } a = g \frac{x}{l}. \text{ Tedy platí: } x\omega^2 = g \frac{x}{l}.$$

Obr. 25. Matematické kyvadlo

Z dané rovnice pak plyne $\omega^2 = \frac{g}{l}$. Po dosazení dostaneme $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

V každé zeměpisné poloze je možno voliti délku kyvadla tak, aby doba kyvu byla 1 sekunda. Takové kyvadlo se nazývá *sekundové kyvadlo*. Pro naši zeměpisnou polohu je délka sekundového kyvadla

$$l = \frac{1 \cdot g}{\pi^2}, \quad l = \frac{9,81}{9,859} \text{ m} = 0,995 \text{ m}.$$

Příklad

Určete zrychlení zemské tíže, je-li délka sekundového kyvadla 991 mm.

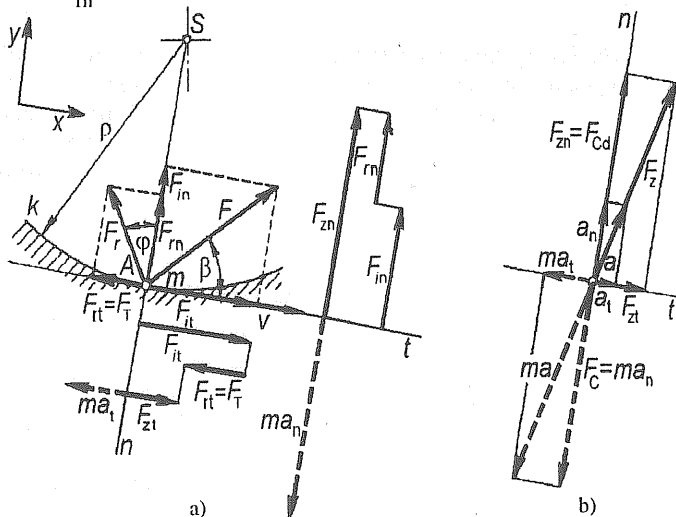
Řešení:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad g = \frac{\pi^2 \cdot l}{t^2}, \quad g = \frac{9,859 \cdot 0,991}{1^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 9,77 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

1.2.5.4 Pohyb hmotného bodu vázaného k rovinné křivce

Tento pohyb nastane např. při vedení v drážce nebo po zakřivené tyči. Působí-li při pohybu bodu A po křivce k (obr. 26a) smykové tření, je výsledná reakce F_r odkloněna od normály F_m o třecí úhel φ ,

$$\text{tg } \varphi = \frac{F_{rt}}{F_m} = \mu, \text{ kde } F_{rt} \text{ je tečná složka a } \mu \text{ je součinitel smykového tření.}$$



Obr. 26. Pohyb hmotného bodu vázaného k rovinné křivce
a) tečné síly působící na bod, b) normálové síly působící na bod, c) soustava sil v rovnováze

$$\text{Rovnice uvolněného bodu je } \Sigma F_i + F_r = ma, \text{ } F_i \text{ jsou vnější síly, } \Sigma F_i = F.$$

1 Úvod do dynamiky

Rozepíšeme-li pohybovou rovnici na dvě složkové rovnice (ve směru tečny a normály), dostaneme podmínky pro řešení daného pohybu.

V tečném směru $\Sigma F_{ti} - \mu F_{rn} = ma_t$, kde ma_t je zrychlující tečná síla F_{zt} .

Normálová složka reakce F_n , nutná pro vyjádření smykového tření, je dána algebraickým součtem všech působících sil, tj. akčních sil i setrvačné síly ve směru příslušné normály n . Platí:

$$\Sigma F_{ni} + F_{rn} = ma_n, \quad \Sigma F_{ni} + F_{rn} - ma_n = 0,$$

dostředivá síla $F_{Cd} = ma_n = \frac{mv^2}{\rho},$

normálová zrychlující síla $F_{zn} = ma_n$, tedy $F_{zn} = F_{Cd} = ma_n.$

Zavedením odstředivé síly F_C jako síly setrvačné k dostředivé síle F_{Cd} dostáváme v normálové rovině soustavu sil v rovnováze. Složením zrychlujících sil F_{zn}, F_{zt} najdeme výslednou zrychlující sílu F_z (obr. 26b) a připojením setrvačné síly ma uvedeme bod do rovnováhy. Řešení se zjednoduší, zanedbáme-li tření.

Příklad

Automobil o hmotnosti 1 000 kg projíždí terénní vlnou o poloměru 100 m rychlostí 72 km · h⁻¹. Zjistěte, jak se změní tlak na vozovku (obr. 27).

Řešení:

Předpokládejme pro zjednodušení, že rozměry vozu jsou proti terénní vlně malé a považujeme automobil za hmotný bod.

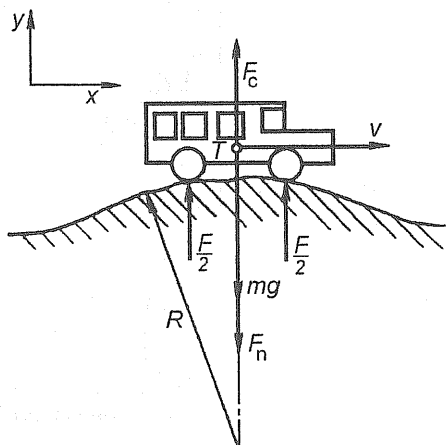
Ve směru normály $F_C + F_n - mg = 0,$

hledaný tlak na vozovku je $F_n = mg - F_C = mg - \frac{mv^2}{R} = m(g - \frac{v^2}{R}).$

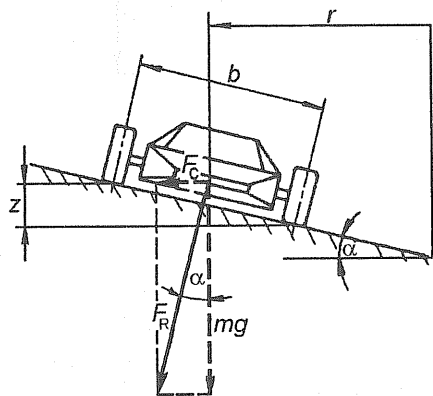
Po dosazení ($v = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) je

$$F_n = [1\,000 \cdot (9,81 - \frac{20^2}{100})] \text{ N} = 5\,810 \text{ N}.$$

Tlak na vozovku se zmenší o 4 000 N.



Obr. 27. Pohyb vozidla po terénní vlně



Obr. 28. Pohyb vozidla v zatáčce

Úloha

Uvažujte předchozí příklad, je-li terénní vlna opačně orientována.

(Výsledek: $F_n = 13\,810 \text{ N}$, tlak na vozovku se zvětší o 4 000 N.)

1.2.5.5 Pohyb vozidla v zatáčce

Rovina zatáčky vozovky nebo železničního svršku mají být nakloněny pod takovým úhlem sklonu α , aby výslednice F_R odstředivé síly F_C a tíhy mg byla kolmá k rovině zatáčky (obr. 28). Pro malý úhel α lze přibližně uvažovat $\sin \alpha = \tan \alpha$, takže

$$z = b \cdot \sin \alpha = b \cdot \tan \alpha = b \cdot \frac{F_C}{mg}.$$

Dosadíme-li za $F_C = \frac{mv^2}{r}$, bude

$$z = \frac{bv^2}{rg}.$$

1 Úvod do dynamiky

Je to hodnota, kterou musíme mít na zřeteli při úpravě (sklonu) roviny zatáčky vozovky nebo železničního svršku, aby výslednice F_R byla kolmá k rovině zatáčky (svršku), a tedy aby byl každý vůz při projíždění v rovnováze. Není-li tato podmínka splněna, vzniká následkem působení odstředivé síly boční tlak na vozovku nebo koleje, a tím nebezpečí převržení vozu.

Příklad

Bod M (obr. 29) se pohybuje po nakloněné, dokonale hladké rovině (po dráze l , úhel sklonu roviny je α), která přejde ve válcovou oblínu (o poloměru r). Určete polohu bodu danou úhlem φ , ve kterém se bod oddělí od válcové plochy. Počáteční rychlost je v_0 .

Řešení:

a) V libovolné poloze určené úhlem φ_0 má bod rychlost vyplývající ze zákona o kinetické energii

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgh, \text{ odkud } v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

b) Výšku h vypočítáme podle vztahu

$$h = l \cdot \sin \alpha + r \cdot \cos \alpha - r \cdot \cos \varphi_0.$$

c) Statická podmínka rovnováhy ve směru normály n v daném bodě je $F_n - mg \cdot \cos \varphi_0 + F_C = 0$, kde $F_C = \frac{mv^2}{r}$.

Bod opustí válcovou plochu pod úhlem φ v tom místě, kde

$$F_n = 0, \text{ tj. } mg \cdot \cos \varphi = \frac{mv^2}{r}.$$

Do vztahu pro výpočet h je třeba dosadit za úhel φ_0 úhel φ .

Dosadíme za rychlost v :

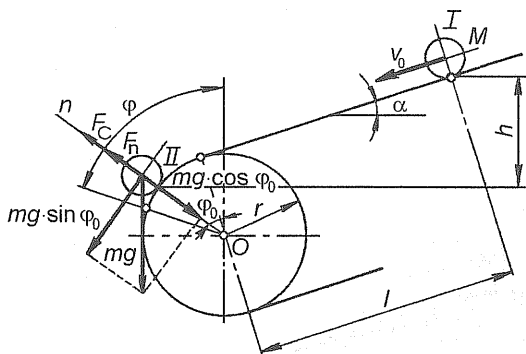
$$mg \cdot \cos \varphi = \frac{m}{r}(v_0^2 + 2gh).$$

Po dosazení za h a úpravě získáme

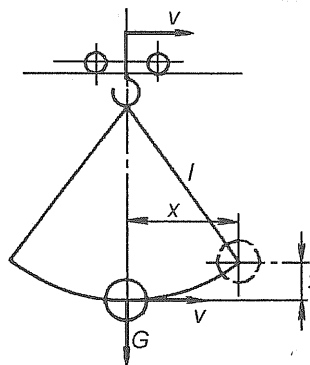
$$\cos \varphi = \frac{\frac{v_0^2}{r} + 2g \cdot \left(\frac{l}{r} \cdot \sin \alpha + \cos \alpha\right)}{3g},$$

Pro $v_0 = 0$ je pak možno úhel φ vypočítat z rovnice

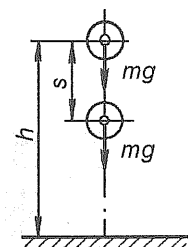
$$\cos \varphi = \frac{2}{3} \cdot \frac{l \cdot \sin \alpha + r \cdot \cos \alpha}{r}.$$



Obr. 29. Pohyb bodu po rovině a válcové oblíně



Obr. 30. Vychýlení břemene při náhlém zastavení



Obr. 31

Úlohy

- Automobil projíždí zatáčkou rychlostí $55 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Jaký musí být poloměr zatáčky, je-li vozovka skloněna pod úhlem 12° ? Výsledný tlak má směřovat kolmo na rovinu vozovky.
- Nádoba s vodou se otáčí ve svislé rovině v kruhu o poloměru 800 mm . Určete nejmenší počet otáček, aby voda z nádoby nevytékala.
- Předmět (hmotný bod) je dopravován na vodorovném pásovém dopravníku rychlostí $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete úhel udávající jeho polohu v okamžiku jeho odloučení od válcové plochy na konci pásového dopravníku. Průměr bubnu je 600 mm .
- Jeřábový vozík s břemenem o hmotnosti 300 kg je zavěšen na laně délky 5 m (obr. 30). Náhle se zastaví při dopravní rychlosti $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete vzdálenost x vychýlení břemene následkem jeho setrvačnosti.

(Výsledky: 1. $R \doteq 114 \text{ m}$; 2. $n = 0,55 \text{ s}^{-1}$; 3. $\varphi \doteq 30^\circ$; 4. $x = 1,40 \text{ m}$.)

1.2.6 Zákon zachování energie

Bod hmotnosti m , který je ve výšce h nad zemí (obr. 31), má za klidu mechanickou energii

$$E = E_p + E_k = mgh + 0 = mgh.$$

1 Úvod do dynamiky

Klesne-li po dráze s , zmenší se jeho energie polohy o mgs . Přitom se však bod začal pohybovat a počáteční nulová rychlost nabyla hodnoty $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot s}$, takže bude mít pohybovou energii

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \cdot 2gs = mgs$$

a pro celkovou mechanickou energii E_c platí

$$E_c = mgh - mgs + mgs = mgh, \quad E = E_c$$

Celková mechanická energie bodu se nezměnila.

Každý děj, při němž se mění energie polohy v pohybovou energii a naopak se nazývá *mechanický děj*. Při mechanickém ději je mechanická energie stálá.

I když existují různé druhy energie, je možno kterýkoli druh energie přeměnit v jiný, přičemž celková energie vesmíru zůstává stálá. *Energii nelze zničit, ani ji nelze z ničeho vytvořit, energie nemůže vzniknout ani zaniknout; pouze se může jedna forma změnit v jinou.*

Tento zákon, který potvrzují všechny dosavadní zkušenosti, nazýváme *zákon zachování energie* (v r. 1748 zveřejnil M. V. Lomonosov zákon zachování vážitelné hmoty, v r. 1842 R. Mayer zákon zachování energie).

Příklad 1

Beran bucharu o hmotnosti 400 kg byl zdvižen do výšky 1,5 m. Jaká byla jeho potenciální energie?

Řešení:

$$E_p = mgh, \quad E_p = (400 \cdot 9,81 \cdot 1,5) \text{ J} = 5,88 \text{ kJ.}$$

Příklad 2

Jakou pohybovou energii má osobní automobil o celkové hmotnosti 1 200 kg jedoucí rychlostí 108 km · h⁻¹?

Řešení:

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2, \quad E_k = \left(\frac{1\,200}{2} \cdot 30^2\right) \text{ J} = 540 \text{ kJ.}$$

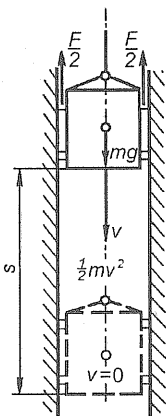
Příklad 3

Klec těžního stroje (obr. 32) o hmotnosti 6 000 kg sjíždí rychlostí 6 m · s⁻¹ rovnoměrným pohybem. Po přetržení lana byla klec zastavena pojistným zařízením na dráze 14 m. Jaká působila střední brzdicí síla?

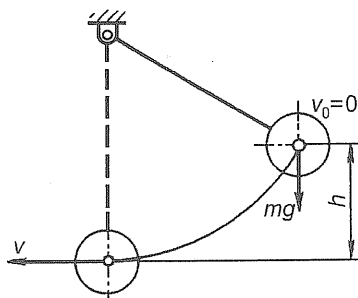
Řešení:

$$E = E_p + E_k, \quad F \cdot s = mgs + \frac{1}{2} mv^2, \quad F = \frac{mgs + \frac{1}{2} mv^2}{s},$$

$$F = \frac{6\,000 \cdot 9,81 \cdot 14 + \frac{6\,000}{2} \cdot 6^2}{14} \text{ N} = 66\,574,28 \text{ N.}$$



Obr. 32. Klec těžního stroje



Obr. 33. Matematické kyvadlo

Příklad 4

Jaká je rychlost matematického kyvadla v nejnižší poloze (obr. 33), bylo-li spuštěno z výšky 200 mm, nepřehlídíme-li odporům prostředí?

1 Úvod do dynamiky

Řešení:

$$E_p = E_k, \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = \sqrt{2gh},$$

$$v = \sqrt{2gh}, \quad v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,20} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1,98 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Příklad 5

Střela o hmotnosti 150 g narazila na desku tloušťky 0,05 m rychlostí 300 m · s⁻¹. Po proniknutí deskou se pohybovala rychlostí 100 m · s⁻¹. Jaký průměrný odpor kladla deska?

Řešení:

$$W = F \cdot s = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2), \quad F = \frac{\frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2)}{s}, \quad F = \frac{\frac{0,15}{2} \cdot (300^2 - 100^2)}{0,05} \text{ N} = 120\,000 \text{ N} = 120 \text{ kN}.$$

Úlohy

1. Jakou pohybovou energii má střela o hmotnosti 200 g při rychlosti 800 m · s⁻¹?
2. Jakou rychlostí jel řidič automobilu o hmotnosti 1 000 kg, jestliže působením střední brzdící síly automobilu 3 920 N zabrzdil na dráze 25 m?
3. Jaká je pohybová energie stolu hoblovacího stroje o hmotnosti 1 500 kg, pohybuje-li se rychlostí 18 m · min⁻¹?
4. Střela o hmotnosti 20 g dopadne rychlostí 600 m · s⁻¹ na dřevěný rám o tloušťce 20 cm. Po jeho proražení se pohybuje rychlostí 100 m · s⁻¹. Jaký je průměrný odpor dřeva?
(Výsledky: 1. $W_k = 64 \text{ kJ}$; 2. $v = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; 3. $W_k = 67,5 \text{ J}$; 4. $F_s = 17\,500 \text{ N}$.)

Kontrolní otázky

1. Co je energie tělesa?
2. Jaké druhy energie znáte?
3. Jaké jsou druhy mechanické energie?
4. Jaký je vztah mezi prací a energií?
5. Uveďte příklady na energii polohy a pohybovou energii a odpovídající matematický vztah.
6. Co je obsahem zákona zachování energie?

2 DYNAMIKA TĚLES

2.1 Dynamika posuvného pohybu

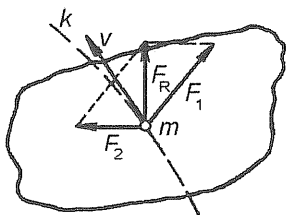
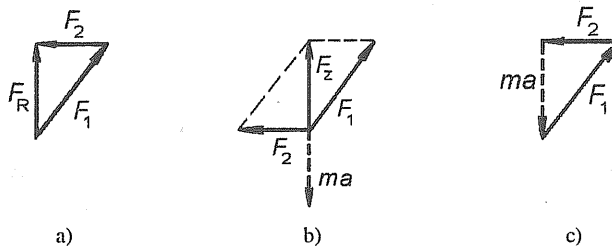
Setrvačná síla tělesa, d'Alembertův princip

Uvažujeme-li setrvačné síly působící na hmotné body, popř. tělesa, můžeme zavedením setrvačné síly převést úlohy týkající se dynamiky na problémy statiky a k řešení užít statické podmínky rovnováhy.

Využíváme k tomu d'Alembertův princip. Na těleso o hmotnosti m působí v těžišti vnější síly F_1, F_2 (obr. 34). Výslednice F_R těchto sil (obr. 35) uděluje tělesu zrychlení a . Podle druhého Newtonova zákona platí

$$a = \frac{F_R}{m}$$

Pro $F_R = \text{konst}$ je rovněž $a = \text{konst}$ a jedná se o přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb.

Obr. 34. Působení vnějších sil F_1, F_2 na těleso

Obr. 35. Rovnováha mezi vnějšími silami a setrvačnou silou

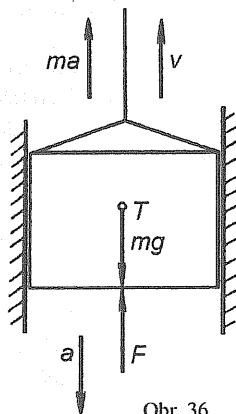
Je zřejmé, že při zrychleném pohybu hmotného bodu, příp. tělesa, se musí překonávat odpor, nazývaný *setrvačná síla*. Setrvačná síla je reakcí na změnu pohybového stavu a představuje snahu tělesa zůstat v tom pohybovém stavu, ve kterém bylo. Tento odpor je stejně velký jako výslednice F_R , ale opačné orientace, tedy působí proti smyslu zrychlení. Je třeba si uvědomit, že setrvačná síla má jinou podobu než vnější síly, a proto ji zavádíme jako myšlenou vnější sílu.

Připojíme-li setrvačnou sílu (obr. 35b), nastává rovnováha mezi vnějšími silami a opačnou zrychlující silou, čili setrvačnou silou (obr. 35c). Platí pohybová rovnice $F_z - ma = 0$, vyjadřující podmínku rovnováhy sil (jako ve staticce). Setrvačná síla není vnější silou (je reakcí tělesa na změnu stavu), není tedy ve skutečnosti s vnějšími silami F_1, F_2 v rovnováze a těleso se pohybuje rovnoměrně zrychleně nebo zpžděně.

d'Alembertův princip: při jakémkoli pohybu tělesa se jedná o rovnováhu mezi vnějšími silami, která na těleso působí, a opačně zrychlující, čili setrvačnou silou.

Příklad 1

Zdvíž jedoucí svisle vzhůru (obr. 36) se zastavuje s konstantním zpžděním z rychlosti $2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ na dráze 2 m. Jakou silou F působí osoba o hmotnosti 70 kg na podlahu klece?



Obr. 36

Řešení:

a) Určíme zpždění pohybu:

$$a = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{2s}$$

$$a = \frac{2,5^2 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{4 \text{ m}} = 1,56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) Z podmínky rovnováhy daného pohybu $F - mg + ma = 0$

určíme sílu F :

$$F = m(g - a),$$

$$F = [70 \cdot (9,81 - 1,56)] \text{ N} = 577,5 \text{ N}.$$

Příklad 2

Raketa o hmotnosti 40 000 kg startuje svisle vzhůru (obr. 37) se zrychlením $a = 4g$. Jak velkou tažnou sílu musí vyvinout raketový motor?

Řešení:

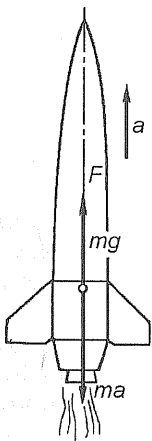
$$\begin{aligned} \text{Musí být splněna podmínka rovnováhy} \quad & F - mg - ma = 0, \\ & F = m(g + a), \end{aligned}$$

$$\text{tedy} \quad F = [40\,000 \cdot (9,81 + 39,24)] \text{ N} \doteq 1,992 \cdot 10^6 \text{ N} \doteq 2 \text{ MN}.$$

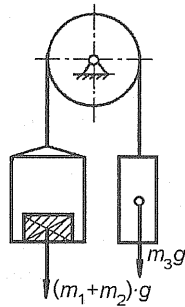
Úlohy

- Jakou silou působí předmět o hmotnosti 1 kg na podlahu klece, která se zvedá se zrychlením $a = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$? Jakým zrychlením by se musela klec pohybovat dolů, aby předmět tlačil na podlahu klece silou 5 N?
- Lano výtahu (obr. 38) nese na jedné straně klec o hmotnosti $m_1 = 300 \text{ kg}$, na druhé straně je protizávaží o hmotnosti $m_2 = m_1$. Jaká musí být hmotnost m_3 závaží, které je nutno vložit do klece, aby soustava z klidu dosáhla rychlosti $v = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ za 1,2 s?
- Lano výtahu (obr. 38) nese na jedné straně klec o hmotnosti $m_1 = 300 \text{ kg}$ a břemeno o hmotnosti $m_2 = 1\,500 \text{ kg}$, na druhé straně je protizávaží o hmotnosti m_3 , které vyvažuje klec a polovinu břemene. Plně rychlosti $v = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ se dosáhne za 1,2 s. Jakou silou musí být klec tažena při nastávajícím zvedání a jaké hnací síly je třeba na obvodě bubny a) při rozjíždění, b) při plném chodu bez zřetele k tření a hmotě kotouče?

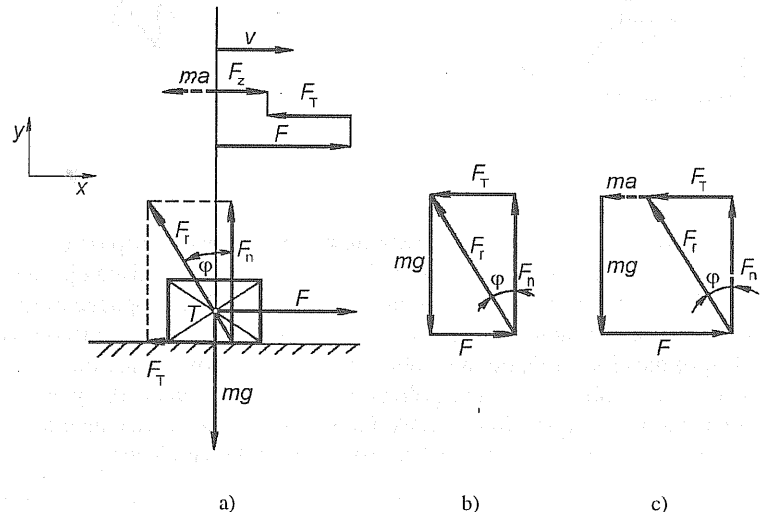
(Výsledky: 1. $F = 10,31 \text{ N}$, $a \doteq 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; 2. $m_3 = 87,61 \text{ kg}$; 3. $F = 19\,908 \text{ N}$, a) $F_1 = 10\,920 \text{ N}$, b) $F_2 = 7\,358 \text{ N}$.)



Obr. 37



Obr. 38



Obr. 39. Pohyb tělesa po vodorovné rovině – hnací síla působí rovnoběžně s rovinou

2.1.1 Vázaný pohyb tělesa

Když se těleso o hmotnosti m nestýká za pohybu s jiným tělesem, jedná se o *volný pohyb*. *Vázaný pohyb* tělesa hmotnosti m je pohyb omezený *vazebnými podmínkami*, tj. podmínkami, jež omezují pohyblivost mechanické soustavy (někdy tento pojem zahrnuje i mechanické zařízení, jímž se toto omezení uskutečňuje). Vazebná podmínka je vyjádřena rovnicí, příp. nerovnicí, která přistupuje jako vedlejší podmínka k pohybovým rovnicím.

Například vlak se pohybuje po kolejích, křížák ve vedení, kyvadlo kýve kolem pevného bodu. Je-li těleso vázáno např. na vedení, působí toto vedení na těleso *vazebnou silou* či *reakcí vedení*. Při výpočtu vázaného pohybu uvolníme těleso tak, že odstraníme omezující podmínky a připojíme k akčním silám reakce, jakými na těleso působila podpora nebo závěs. Složky reakcí kolmé na vedení, tzv. *normálové složky*, označujeme F_n , tečné složky F_t . Uvolněné těleso uvažujeme jako pohyb volného tělesa o hmotnosti m . Podobné zákonitosti byly zmíněny již v odst. 1.2.5.4 věnovaném pohybu bodu.

2.1.1.1 Pohyb tělesa po vodorovné rovině**1. Hnací síla působí rovnoběžně s rovinou**

Těleso se pohybuje rovnoměrnou rychlostí v_0 nebo je v klidu. Od určitého okamžiku na ně začne působit síla F rovnoběžná s vodorovnou rovinou (obr. 39). Těleso uvolníme zavedením reakce podpory F_n . Na uvolněné těleso působí síly F , mg , F_n .

2 Dynamika těles

Reakce F_r o složkách F_n a F_t je odkloněna od normály o třecí úhel φ . Pokud jsou tyto tři síly v rovnováze (obr. 39 b), je těleso v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu.

Je-li $F > F_t$, nastává pohyb převahou síly F , tj. zrychlující silou F_z . Připojením setrvačného odporu (podle d'Alembertova principu) uvedeme těleso do rovnováhy a lze nakreslit silový mnohoúhelník (obr. 39c) – v jednom smyslu uzavřený.

Využijeme silový mnohoúhelník pro početní řešení. Platí podmínky rovnováhy ve směru os x a y :

$$\Sigma F_x = 0, \quad F - F_t - ma = 0, \quad a = \frac{F - F_t}{m},$$

$$\Sigma F_y = 0, \quad mg - F_n = 0,$$

Platí $F_T = \mu F_n = \mu mg$, kde μ je součinitel tření, tedy

$$a = \frac{F}{m} - \mu g.$$

Bude-li F a μ konstantní, bude i zrychlení a stálé. Pohyb tělesa bude rovnoměrně zrychlený, počáteční rychlost v_0 se po určité době zvýší na koncovou rychlost v .

$$\text{Těleso urazí dráhu } s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}, \text{ tedy} \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2as}, \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2s\left(\frac{F}{m} - \mu g\right)}.$$

Jde-li o pohyb z klidu, je nutno do rovnice dosadit $v_0 = 0$.

Je-li $F < F_t$ a pohybuje-li se těleso ve směru síly F , jde o rovnoměrně zpzděný pohyb. Rychlost i pohybová energie se zmenšuje.

Je-li $F = F_t$, pak $a = 0$ a těleso je buď v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně. V případě $F = 0$ dochází u pohybujícího se tělesa k rovnoměrnému zpzd'ování třením až do úplného zastavení.

Koncovou rychlost po určité proběhnuté dráze lze určit rovněž pomocí zákona o změně pohybové energie:

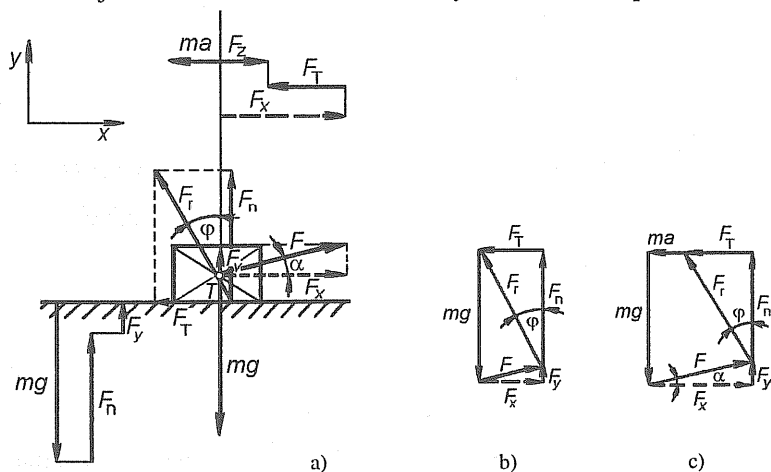
$$F_z \cdot s = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) \quad F_z = F - F_t, \quad F_t = \mu mg, \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2s\frac{F - \mu mg}{m}},$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2s\left(\frac{F}{m} - \mu g\right)},$$

což je dříve uvedený vztah pro rychlost v .

2. Hnací síla působí v obecném směru

Z obrázku 40a je patrné, že daný případ se od případu, kdy hnačí síla působí rovnoběžně s rovinou, liší pouze tím, že hnačí síla F je odkloněna od vodorovné roviny o úhel α . Postup řešení bude proto obdobný.



Obr. 40. Pohyb tělesa po vodorovné rovině – hnačí síla působí v obecném směru

Jak je zřejmé z obrázku, je bod v klidu (obr. 40b) nebo v rovnoměrně zrychleném pohybu (obr. 40c). Uvažujeme setrvačnou sílu a těleso uvedeme do rovnováhy:

$$\Sigma F_x = 0, \quad F_x - F_T - ma = 0, \quad a = \frac{F_x - F_T}{m},$$

$$\Sigma F_y = 0, \quad F_y + F_n - mg = 0, \quad F_n = mg - F_y,$$

$$F_x = F \cdot \cos \alpha, \quad F_y = F \cdot \sin \alpha, \quad F_n = mg - F \cdot \sin \alpha,$$

$$F_T = \mu F_n, \quad F_T = \mu(mg - F \cdot \sin \alpha),$$

2 Dynamika těles

takže po dosazení

$$a = \frac{F \cdot \cos \alpha - \mu mg + \mu F \cdot \sin \alpha}{m} = \frac{F}{m} (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu g.$$

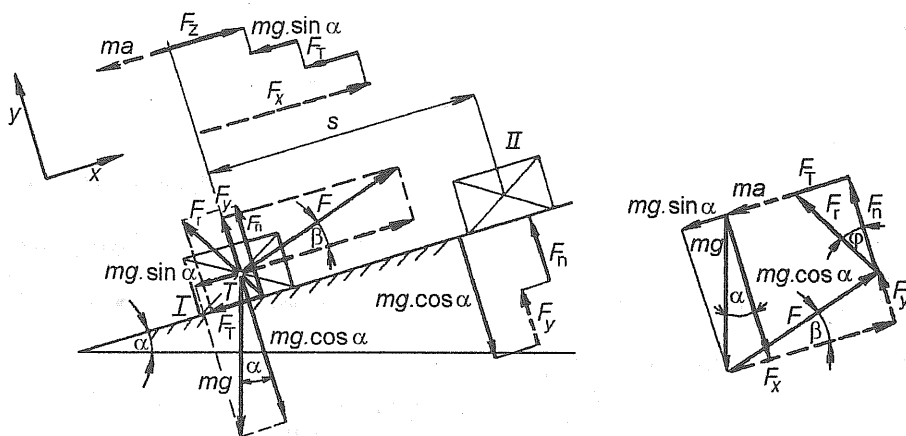
Protože $v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$, získáme po dosazení výslednou rychlost

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2Fs}{m} [(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu g]}.$$

Je zřejmé, že při stálé síle F je pohyb závislý na hodnotě úhlu α , který se může měnit od 0° do 360° .

2.1.1.2 Pohyb tělesa po nakloněné rovině

Na těleso M , které se pohybuje po nakloněné rovině (α je úhel naklonění roviny) v kladném smyslu osy x (obr. 41), začne působit síla F odkloněná od osy x o úhel β .



Obr. 41. Pohyb tělesa po nakloněné rovině

Těleso uvolníme tím, že odstraníme podporu a připojíme reakci podpory F_r . Na uvolněné těleso působí síly mg , F , F_r .

V ose x rovnoběžné s nakloněnou rovinou působí síly

$$F_x = F \cdot \cos \beta, \quad mg \cdot \sin \alpha, \quad F_T = \mu F_n,$$

v ose y kolmé na osu x působí síly

$$F_y = F \cdot \sin \beta, \quad mg \cdot \cos \alpha, \quad F_n.$$

Podmínka rovnováhy sil na tělese v ose y :

$$\sum F_y = 0, \quad mg \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta - F_n = 0,$$

$$F_n = mg \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta.$$

S přihlédnutím k d' Alembertově principu je podmínka rovnováhy sil na tělese v ose x :

$$\sum F_x = 0, \quad F \cdot \cos \beta - \mu F_n - mg \cdot \sin \alpha - ma = 0,$$

odtud vypočítáme zrychlení a :

$$a = \frac{F \cdot \cos \beta - \mu mg \cdot \cos \alpha + \mu F \cdot \sin \beta - mg \cdot \sin \alpha}{m},$$

$$a = \frac{F}{m} (\cos \beta + \mu \cdot \sin \beta) - g(\mu \cdot \cos \alpha + \sin \alpha),$$

Dosazením do vztahu $v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$ získáme výslednou rychlost na dráze s .

Příklad

Těleso smýkající se po vedení ve směru šipky 2 (obr. 42) má počáteční rychlost $v_0 = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. V daném okamžiku začne na těleso působit síla $F = 50 \text{ N}$ pod úhlem $\beta = 30^\circ$. Určete a) zrychlující sílu, b) zrychlení, c) na jaké dráze se zvětší rychlost tělesa na dvojnásobek, je-li součinitel tření $\mu = 0,15$, úhel nakloněné roviny $\alpha = 30^\circ$ a hmotnost tělesa $m = 8 \text{ kg}$.

Řešení:

Rozložíme síly mg , F a F_r do složek a vyjádříme podmínky rovnováhy.

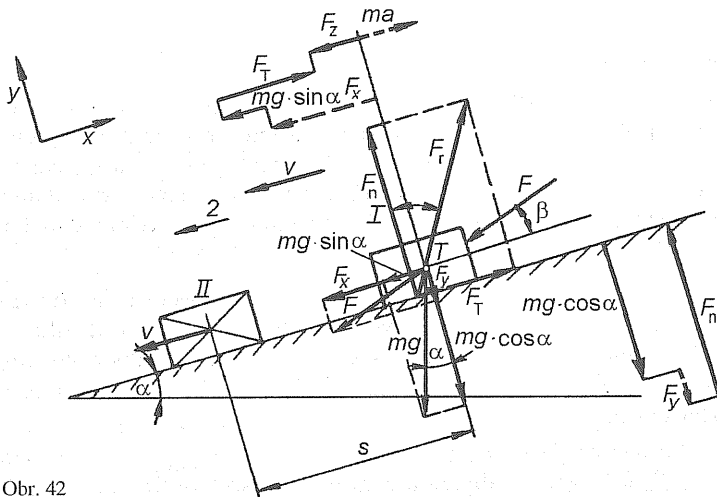
a) Zrychlující síla $F_z = ma = F \cdot (\cos \beta - \mu \cdot \sin \beta) + mg(\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha),$

$$F_z = [5 \cdot (8,66 - 0,15 \cdot 0,5) + 8 \cdot 9,81 \cdot (0,5 - 0,15 \cdot 0,866)] \text{ N} = 68,59 \text{ N}.$$

b) Zrychlení $a = \frac{F_z}{m}, \quad a = \frac{68,59}{8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 8,57 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$

2 Dynamika těles

c) Dráha $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{3v_0^2}{2a}, \quad s = \frac{3 \cdot 0,5^2}{2 \cdot 8,57} \text{ m} = 0,043 \text{ m}.$



Obr. 42

2.1.1.3 Pohyb dopravního prostředku

Při pohybu na rovné vozovce musí vozidlo překonávat odpor, který se skládá z celkového odporu vozidla a odporu prostředí. Celkový odpor vozidla, skládající se z čepového a valivého tření, je dán vztahem

$$F_T = mg \cdot f_v,$$

kde f_v je součinitel valení (nabývá hodnoty 0,01 až 0,04).

Při pohybu těles ve vzduchu a jiných prostředích většími rychlostmi se vyjadřuje odpor prostředí výrazem

$$F_O = c_x \cdot p_d \cdot S_x \quad (\text{N}), \quad p_d = \rho \frac{v^2}{2},$$

kde c_x je součinitel odporu vozidla (nabývá hodnoty 0,01 až 1,34),

p_d – dynamický tlak vzduchu,

ρ – měrná hmotnost prostředí ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$),

S_x – čelní plocha vozidla ve směru jízdy (m^2),

v – rychlost vozidla ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Používá se i jiných vztahů pro odpor prostředí; např. pro automobily se uvedený výraz vyjadřuje ve tvaru

$$F_O = K S_x v^2 \quad (\text{N}), \quad K = \frac{c_x}{2} \rho, \quad \text{kde } K \text{ je tzv. tvarový součinitel (tab. 1).}$$

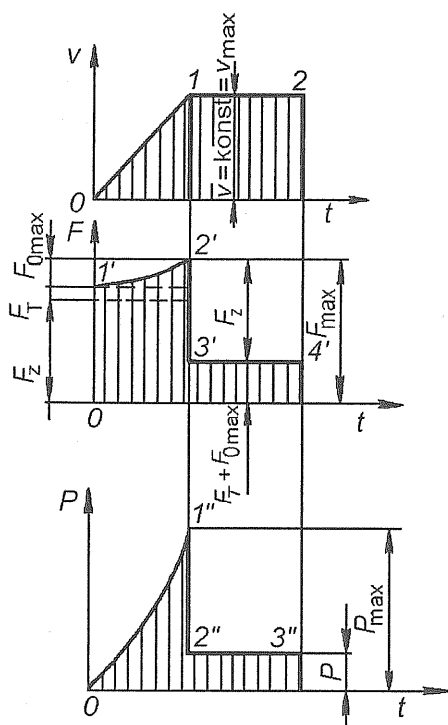
Těleso	Součinitel odporu c_x	Tvarový součinitel K^*	Těleso	Součinitel odporu c_x	Tvarový součinitel K^*	
Polokoule se dnem	1,17	0,75	Pravoúhlá deska	1,1	0,71	
Polokoule bez dna	1,34	0,86		$\frac{a}{b} = 4$	1,2	0,77
				$\frac{a}{b} = 10$	1,3	0,84
Polokoule se dnem	0,34	0,22	Kruhová deska	1,12	0,72	
Polokoule bez dna	0,4	0,26				
Koule	0,38	0,25	Těleso aerodynamického tvaru	0,03	0,02	
				0,01	0,006	

Tab. 1

*) V tabulce je hodnota tvarového součinitele K uvedena pro pohyb tělesa ve vzduchu (měrná hmotnost vzduchu $\rho = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). Například pro osobní automobily bývá $K = 0,22$ až $0,37$, pro nákladní automobily $K = 0,4$ až $0,5$, pro autobusy $K = 0,37$ až $0,4$.

Při řešení pohybu dopravního prostředku jde zpravidla o výpočet hnací a zrychlující síly motoru maximálního a středního výkonu při rozjíždění a výkon při maximální rovnoměrné rychlosti. Pro lepší pochopení výpočtu se kreslí diagram rychlosti, tažné síly a výkonu v závislosti na čase.

Diagramy závislosti rychlosti na čase, hnací síly na čase a výkonu na čase



Obr. 43. Diagram a) $v-t$, b) $F-t$, c) $P-t$

Diagram $v-t$ (obr. 43a). Při konstrukci volíme měřítko pro čas t a rychlost v . Při rozjíždění přibývá rychlost rovnoměrně s časem, proto je křivka rychlosti ve $v-t$ diagramu přímka 01 . Při rovnoměrné jízdě je $v = \text{konst}$, znázorněním je v diagramu přímka 12 rovnoběžná s časovou osou. Vypočítáme maximální rychlost v_{max} a zaneseme ji do diagramu v čase odpovídajícím rozjezdu vozidla.

Diagram $F-t$ (obr. 43b). Diagram znázorňuje průběh hnací síly F při rozjezdu a plné jízdě v závislosti na čase t . Zvolíme měřítko pro čas a hnací sílu.

Při rozjíždění musí hnací síla překonávat odpory tření F_T , odpor prostředí F_O a vozidlo urychluje (působí zrychlující síla F_Z). Maximální rychlosti odpovídá hnací síla $F_{\text{max}} = F_T + F_{O \text{ max}} + F_Z$.

Za rovnoměrné jízdy je $F_Z = 0$ a hnací síla $F_h = F_T + F_{O \text{ max}}$. V okamžiku rozjíždění je $F_h = F_T + F_Z$, v digramu znázorněno úsečkou $01'$. Protože se odpor prostředí mění s druhou mocninou rychlosti, je průběh hnací síly během rozběhu znázorněn křivkou druhého stupně (části paraboly), která začíná v bodě $1'$ a končí – po dosažení maximální rychlosti – v bodě $2'$. V bodě $2'$ dochází k poklesu hnací síly – úsek $2'3'$. Od tohoto okamžiku až do zastavení je hnací síla konstantní, což je graficky znázorněno úsečkou $3'4'$.

$P-t$ diagram (obr. 43c). Podle toho, jak se mění tažná síla, mění se i výkon motoru P , který je dán rovnicí $P = F \cdot v$. Hodnoty opět nanášíme v měřítku výkonu a času.

Na začátku rozjíždění je rychlost $v = 0$, tedy i $P = 0$. Na konci rozjíždění je rychlost i výkon maximální, takže platí: $P_{\text{max}} = F_{\text{max}} \cdot v_{\text{max}}$. V diagramu je to křivka $01''$. Po rozběhnutí klesne výkon na hodnotu $P = (F_T + F_{O \text{ max}}) \cdot v_{\text{max}}$, což odpovídá úsečce $2''3''$.

Příklad

Automobil o hmotnosti 1 500 kg se rozjede za 10 sekund rovnoměrně zrychleně na rychlost $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Jaká je zrychlující a hnací síla motoru při rozjíždění, největší hnací síla a největší výkon motoru, hnací síla a výkon při rovnoměrné jízdě? Uvažujte tvarový součinitel $K = 0,3$, největší průřez pohybujícího se vozidla kolmý k pohybu $S = 3 \text{ m}^2$, součinitel valeň $f_v = 0,01$.

Řešení:

Na počátku rozjezdu

$$v_0 = 0, \quad a = \frac{v}{t}, \quad v = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \quad a = \frac{20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{10 \text{ s}} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Zrychlující síla

$$F_z = ma, \quad F_z = (1\,500 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) = 3\,000 \text{ N},$$

čepové a valivé tření

$$F_T = mgf_v, \quad F_T = (1\,500 \cdot 9,81 \cdot 0,01) \text{ N} = 147,15 \text{ N}.$$

Hnací síla na počátku rozjíždění

$$F_h = F_T + F_z, \quad F_h = (147,15 + 3\,000) \text{ N} = 3\,147,15 \text{ N}.$$

Odpor vzduchu na konci rozjíždění

$$F_O = K \cdot S \cdot v^2, \quad F_O = (0,3 \cdot 3 \cdot 20^2) \text{ N} = 360 \text{ N}.$$

Největší hnací síla na konci rozjíždění

$$F_{\text{max}} = F_z + F_T + F_O, \quad F_{\text{max}} = (3\,000 + 147,15 + 360) \text{ N} = 3\,507,15 \text{ N}.$$

Největší výkon na konci rozjíždění

$$P_{\text{max}} = F_{\text{max}} \cdot v_{\text{max}}, \quad P_{\text{max}} = (3\,507,15 \cdot 20) \text{ W} = 70\,143 \text{ W} = 70,143 \text{ kW}.$$

Hnací síla při plné jízdě

$$F_h = F_T + F_O, \quad F_h = (147,15 + 360) \text{ N} = 507,15 \text{ N},$$

výkon motoru při plné jízdě

$$P = F \cdot v_{\text{max}}, \quad P = (507,15 \cdot 20) \text{ W} = 10\,143 \text{ W} = 10,14 \text{ kW}.$$

Kontrolní otázky

1. Vysvětlíte pojem vázaný pohyb.

2. Odvodte rovnici pro zrychlení pohybu po nakloněné rovině směrem nahoru a dolů, je-li působící síla rovnoběžná s nakloněnou rovinou.

Úlohy

3. V ocelovém žlabu se dopravuje uhlí. Jaký musí být nejmenší úhel α sklonu žlabu, má-li se jím uhlí rovnoměrně pohybovat? Součinitel tření $\mu = 0,24$. Zvětšíme-li úhel sklonu žlabu na 30° , jakým zrychlením uhlí sjíždí a jaké dosáhne rychlosti na konci žlabu o délce 8 m?
4. Těleso je vrženo po nakloněné rovině vzhůru počáteční rychlostí $v_0 = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Zjistěte: a) jakou proběhne těleso dráhu s než se zastaví; b) co se stane po jeho zastavení. Úhel nakloněné roviny $\alpha = 15^\circ$, součinitel tření $\mu = 0,1$.
5. Břemeno hmotnosti m sjíždí po nakloněné rovině s úhlem sklonu α , jeho počáteční rychlost je v_0 . V kterou dobu bude jeho rychlost pohybu trojnásobná? Určete odpovídající dráhu, je-li dán součinitel tření μ .
6. Diesellový motorový železniční vůz o hmotnosti 14 000 kg se rozjede za 12 s na rychlost $8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ při stoupání 1 : 40. Jakým zrychlením se vůz rozjíždí a jaký je maximální výkon motoru? Tvarový součinitel $K = 0,3$, největší průřez pohybového sevozu kolmý k pohybu $S = 3 \text{ m}^2$, součinitel valení $f_v = 0,01$.
7. Elektrická lokomotiva táhne vlak o hmotnosti 750 000 kg a dosáhne na dráze 200 m rychlosti $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Jaká je největší tažná síla a výkon lokomotivy na konci rozjíždění, tažná síla a výkon při plné rychlosti, je-li tvarový součinitel $K = 0,4$, největší průřez pohybující se lokomotivy kolmý k pohybu $S = 6 \text{ m}^2$, součinitel valení $f_v = 0,04$. Nakreslete diagram a) závislosti rychlosti na čase, b) hnací síly na čase a výkonu na čase.
8. Vypočítejte rychlost a zrychlení vozidla o hmotnosti 1 000 kg na konci dráhy 1 000 m, je-li hnací síla 500 N a odpor proti pohybu 25 N.

(Výsledky: 3. $\alpha = 13^\circ 30'$; při $\alpha = 30^\circ$ bude $a = 2,86 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a $v = 6,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; 4. $s = 20,12 \text{ m}$, těleso se bude vracet;

$$5. t = \frac{2v_0}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}, s = \frac{4v_0^2}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}; 6. a = 0,66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, P_{\max} = 112,85 \text{ kW}; 7. F_{\max} = 819,96 \text{ kN}, P_{\max} = 13,67 \text{ MW};$$

$$8. v = 30,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, a = 0,475 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.)$$

2.1.2 Pohybová energie tělesa pro posuvný pohyb

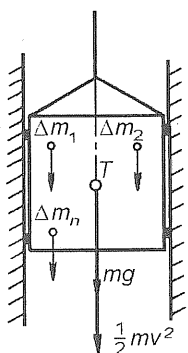
Vztahy pro pohybovou energii hmotného bodu jsou platné i pro těleso. Jako těleso uvažujeme např. klec výtahu o hmotnosti m (obr. 44), sjíždějící rychlostí v . Můžeme si představit, že je klec složena z hmotných bodů m_1, m_2, \dots, m_n , které se rovněž pohybují rychlostí v . Jejich pohybové energie jsou

$$\Delta E_{k1} = \frac{1}{2} \Delta m_1 v^2, \Delta E_{k2} = \frac{1}{2} \Delta m_2 v^2, \dots, \Delta E_{kn} = \frac{1}{2} \Delta m_n v^2, \text{ kde } \Delta m_n \text{ je elementární hmotnost } n\text{-tého bodu tělesa.}$$

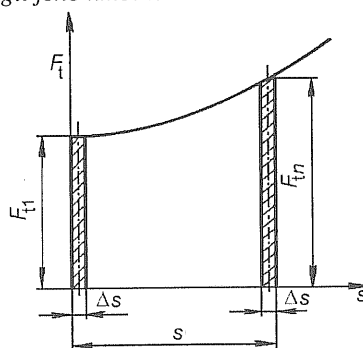
Pohybová energie E_k tělesa se rovná součtu pohybových energií hmotných bodů tělesa:

$$E_k = \frac{1}{2} \Delta m_1 v^2 + \frac{1}{2} \Delta m_2 v^2 + \dots + \frac{1}{2} \Delta m_n v^2, E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2} m v^2.$$

Posuvná energie tělesa je rovna posuvné energii jeho hmotnosti soustředěné v těžišti.



Obr. 44. Posuvná energie tělesa



Obr. 45. Diagram posuvné energie při proměnlivé síle

2.1.3 Změna posuvné energie

Tak jako u hmotného bodu platí, že práce zrychlující síly se projevuje změnou jeho pohybové energie, platí to i pro těleso. Je-li zrychlující síla F_{vz} výslednicí několika sil, je

$$F_{vz} = \sum_{i=1}^n F_{zi}, \quad F_{vz} \cdot s = \sum_{i=1}^n F_{zi} \cdot \Delta s = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2.$$

2 Dynamika těles

Je-li zrychlující síla proměnlivá co do velikosti, směru a smyslu pohybu, graficky znázorníme (obr. 45) průběh tečné složky F_t zrychlující síly F_z . Opět platí

$$E_k = \sum_{i=1}^n F_{ti} \cdot \Delta s = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Příklad

Vlak o hmotnosti $2 \cdot 10^5$ kg se rozjíždí rovnoměrně zrychleně na rychlost $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ na dráze 600 m. Určete: a) zrychlení při rozjíždění, b) zrychlující sílu lokomotivy, c) energii pohybu vlaku na konci rozjíždění, d) velikost odporu, který by působil na vlak, jestliže by se v případě vykolejení zastavil na dráze $s_z = 30$ m, e) důsledek této síly na vlak.

Řešení:

$$m = 2 \cdot 10^5 \text{ kg} = 200\,000 \text{ kg}, v = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, s = 600 \text{ m}, s_z = 30 \text{ m}.$$

- a) Zrychlení při rozjíždění $a = \frac{v^2}{2s}, \quad a = \frac{20^2}{2 \cdot 600} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 0,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$
- b) Zrychlující síla lokomotivy $F_z = ma, \quad F_z = (200\,000 \cdot 0,33) \text{ N} = 66\,000 \text{ N} = 66 \text{ kN}.$
- c) Energie pohybu vlaku na konci rozjíždění $E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad E_k = \left(\frac{1}{2} \cdot 200\,000 \cdot 20^2\right) \text{ J} = 4 \cdot 10^7 \text{ J} = 40 \text{ MJ}.$
- d) Velikost odporu v případě vykolejení $F_0 \cdot s_z = \frac{1}{2}mv^2, \quad F_0 = \frac{mv^2}{2s_z}, \quad F_0 = \frac{4 \cdot 10^7 \text{ J}}{3 \cdot 10 \text{ m}} = 1,33 \cdot 10^6 \text{ N}.$
- e) Odpor (síla F_0) v případě vykolejení je tak značný, že jej vagony nevydrží a rozdrtí se.

Kontrolní otázky

1. Jak se vypočítá pohybová energie tělesa?
2. Proveďte rozbor rovnice pro výpočet pohybové energie.
3. Vyjádřete vzorcem přírůstek pohybové energie a vysvětlete jej.

Úlohy

1. Jaká je posuvná energie automobilu o hmotnosti 2 000 kg, jestliže se pohybuje rychlostí $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?
2. Beran bucharu o hmotnosti 200 kg padá volným pádem na kovaný kus z výšky 2,5 m. Jaký je odpor kovaného kusu při deformaci o 4 mm jedním rázem?
3. Jeřábová kočka o hmotnosti 1 500 kg se pohybuje rychlostí $1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a je zatížena břemenem o hmotnosti 1 500 kg. Určete:
 - a) Jaká je pohybová energie kočky i s břemenem
 - b) Jestliže kočka s břemenem na konci jeřábového mostu narazí na pojistný pružinový tlumič a zastaví se za 0,4 s, o kolik se stlačí pružinový tlumič?
 - c) Jaké bude zpoždění při zastavování kočky s břemenem?
 - d) Jaký bude průměrný odpor pružiny?(Výsledky: 1. $E_k = 2,78 \cdot 10^5 \text{ J}$; 2. $F_0 = 1,25 \cdot 10^6 \text{ N}$; 3. a) $E_k = 2,16 \cdot 10^3 \text{ J}$, b) o 240 mm, c) $a = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, d) $F_0 = 9\,000 \text{ N}$.)

2.2 Dynamika otáčivého pohybu

2.2.1 Moment setrvačnosti tělesa

V pružnosti je užíván výraz $\Delta S y^2 = \Delta I$ – elementární kvadratický moment průřezu (ΔS je obsah elementární plochy v daném průřezu, jehož obsah je S , y je její vzdálenost od zvolené osy ležící v rovině průřezu, k níž se moment určuje; jednotkou je m^4), v dynamice se součin elementární hmotnosti hmotného bodu Δm_j ($j = 1, 2, \dots, n$) a druhé mocniny vzdálenosti r_j hmotného bodu od uvažované osy nazývá *elementární moment setrvačnosti*, značí se ΔI_j , jednotkou je $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Platí $\Delta I_j = \Delta m_j \cdot r_j^2$, celkový moment setrvačnosti tělesa k dané ose je dán vztahem

$$I = \Delta m_1 \cdot r_1^2 + \Delta m_2 \cdot r_2^2 + \dots + \Delta m_n \cdot r_n^2 = \sum_{j=1}^n \Delta m_j \cdot r_j^2 = \sum_{j=1}^n \Delta I_j.$$

2 Dynamika těles

V případě pouze jedné osy, nebo nemůže-li nastat záměna osy, k níž je moment vztažen, se označuje moment setrvačnosti I . Má-li být vyznačeno, že je moment setrvačnosti vztažen k ose procházející těžištěm tělesa, označuje se I_O .

2.2.1.1 Redukovaná hmotnost

V technické praxi často potřebujeme při výpočtech převést (redukovat) hmotnost otáčejícího se tělesa s momentem setrvačnosti I_O do jediného hmotného bodu v předepsané vzdálenosti r od osy otáčení tak, aby moment setrvačnosti tohoto bodu byl stejný jako moment setrvačnosti celého tělesa k téže ose.

Platí $I_O = m_r \cdot r^2$, tedy redukovaná hmotnost $m_r = \frac{I_O}{r^2}$.

Tímto způsobem lze redukovat např. hmotnost setrvačníku do čepu kliky, hmotnost navíjecího bubnu na jeho obvod atd.

Příklad

Vypočítejte redukovanou hmotnost brusného kotouče o průměru $d = 800$ mm, s momentem setrvačnosti $I_O = 200$ kg · m².

Řešení:

$$m_r = \frac{I_O}{r^2}, \quad r = 400 \text{ mm} = 0,4 \text{ m}, \quad m_r = \frac{200}{0,4^2} \text{ kg} = 1\,250 \text{ kg}.$$

2.2.1.2 Poloměr setrvačnosti

Je-li hmotnost tělesa m soustředěna v jednom bodě nebo rozložena na obvodě v takové vzdálenosti i od osy otáčení, aby moment setrvačnosti I_O tohoto hmotného bodu nebo hmotnosti tělesa rozložené po kružnici byl stejný jako moment setrvačnosti celého tělesa, pak

$$I_O = \sum_{j=1}^n \Delta m_j \cdot r_j^2 = m \cdot i^2, \quad i = \sqrt{\frac{I_O}{m}} \text{ je poloměr setrvačnosti tělesa.}$$

Poloměr setrvačnosti určuje vzdálenost hmotného bodu o hmotnosti rovné hmotnosti tělesa od osy, k níž hmotný bod i těleso jím nahrazené mají stejný moment setrvačnosti.

Může se jednat o poloměr setrvačnosti k rovině, k ose, k bodu.

2.2.1.3 Setrvačný moment

Místo momentu setrvačnosti I se při výpočtech setrvačnicků a rotačních částí často používá výraz $m \cdot D^2$, tzv. setrvačný moment; m značí celkovou hmotnost rotačního tělesa a D průměr setrvačnosti, pro který platí vztah

$$D = 2i = 2\sqrt{\frac{I_O}{m}}, \quad mD^2 = 4I_O, \quad I_O = \frac{mD^2}{4}.$$

Jednotkou setrvačného momentu je kg · m².

Podle setrvačného momentu posuzujeme setrvačnost otáčejícího se tělesa. Tento moment bývá uváděn v katalozích elektrických a jiných strojů i technických tabulkách.

2.2.1.4 Momenty setrvačnosti k osám rovnoběžným s osou těžiště

Mějme pravoúhlý systém souřadnic xyz a osu O , procházející těžištěm tělesa (obr. 46), $O = z$.

Moment setrvačnosti tělesa k ose O $I_O = \sum \Delta m_j \cdot r_j^2$.

Sestrojme ve vzdálenosti r_O osu O' rovnoběžnou s osou O (tedy i z). Je-li $\Delta I' = \Delta m \cdot \rho^2$ moment setrvačnosti hmotného elementu Δm k ose O' (ρ je jeho vzdálenost od osy O'), pak je

moment setrvačnosti celého tělesa k ose O' $I' = \sum \Delta m_j \cdot \rho_j^2$.

Ve zvoleném systému souřadnic platí:

$$r_O = \text{konst a } x^2 + y^2 = r^2, \text{ proto} \quad \rho^2 = (r_O + x)^2 + y^2 = r_O^2 + 2r_O x + x^2 + y^2,$$

$$r_O^2 = r_j^2 + r_O^2 + 2r_O x_j,$$

$$I' = \sum \Delta m_j \cdot r_j^2 + \sum \Delta m_j \cdot r_O^2 + 2r_O \cdot \sum \Delta m_j \cdot x_j$$

$$I_O \qquad m \cdot r_O^2 \qquad 0$$

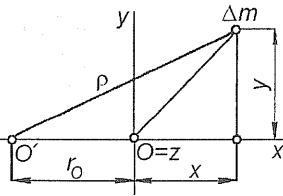
2 Dynamika těles

$\sum \Delta m_j \cdot x_j = 0$, neboť je to statický moment tělesa k ose, jdoucí těžišťem. Proto platí tzv. *Steinerova věta*:

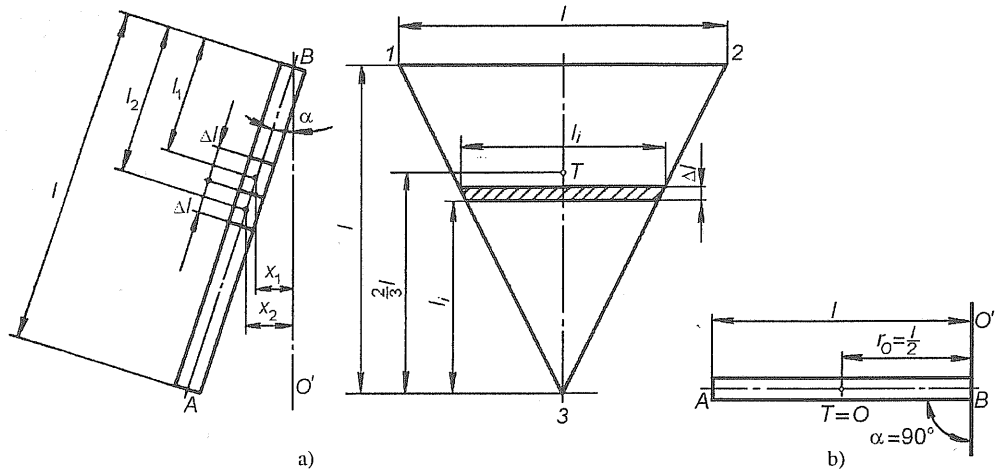
$$I' = I_O + m \cdot r_O^2$$

Moment setrvačnosti tělesa k libovolné ose je roven momentu setrvačnosti k ose s ní rovnoběžné, jdoucí těžišťem, zvětšenému o součin hmotnosti tělesa a druhé mocniny vzdálenosti obou os.

Z toho vyplývá, že moment setrvačnosti k ose procházející těžišťem je nejmenší ze všech momentů setrvačnosti k jakékoliv ose s ní rovnoběžné.



Obr. 46



Obr. 47. Moment setrvačnosti stejnorodé tyče k ose procházející koncovým bodem

2.2.1.5 Momenty setrvačnosti základních geometrických těles

a) Moment setrvačnosti stejnorodé tyče k ose procházející koncovým bodem

Při odvození momentu setrvačnosti stejnorodé tyče (např. rameno řemenice) k ose O' (obr. 47), kolem které se tyč otáčí, postupujeme tak, že rozdělíme tyč (AB) na malé částice délky Δl , které pokládáme za hmotné body. Vzdálenost těžišť těchto částic od osy O' označíme x_1, x_2, \dots, x_n . Je-li hmotnost celé tyče m , je hmotnost připadající na jednotku délky $\frac{m}{l}$.

Elementu Δl přísluší elementární hmotnost $\Delta m = \frac{m}{l} \cdot \Delta l$. Moment setrvačnosti libovolné částice k ose O' je

$$\Delta I_{O'} = \Delta m \cdot x_i^2 = \frac{m}{l} \cdot \Delta l \cdot x_i^2, \text{ kde } x_i^2 = (l_i \cdot \sin \alpha)^2, i = 1, 2, \dots, n, \alpha \text{ je úhel, který svírá tyč s osou } O'.$$

Moment setrvačnosti celé tyče

$$I_{O'} = \sum_{i=0}^n \Delta I_{O'} = \sum_{i=0}^n \frac{m}{l} \cdot \Delta l \cdot l_i^2 \cdot \sin^2 \alpha = \frac{m}{l} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sum_{i=0}^n \Delta l \cdot l_i^2$$

Výraz $\sum_{i=0}^n \Delta l \cdot l_i^2$ představuje statický moment trojúhelníka s výškou a základnou o délce l k ose procházející vrcholem 3

(obr. 47a), takže platí: $\sum_{i=0}^n \Delta l \cdot l_i^2 = \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3}$,

tedy

$$I_{O'} = \frac{m}{l} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2 \cdot \sin^2 \alpha}{3}$$

Je-li osa tyče kolmá k ose O' (obr. 47b), je $\alpha = 90^\circ$, $\sin 90^\circ = 1$, tedy její moment setrvačnosti

$$I_{O'} = \frac{ml^2}{3}$$

Moment setrvačnosti dané tyče k ose O procházející těžišťem tyče a rovnoběžné s osou O' se stanoví podle Steinerovy věty: $I' = I_O + m \cdot r_O^2$.

Protože $r_O = \frac{l}{2}$, je

$$I_O = I_{O'} - m \cdot r_O^2 = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{12}$$

b) Moment setrvačnosti věnce

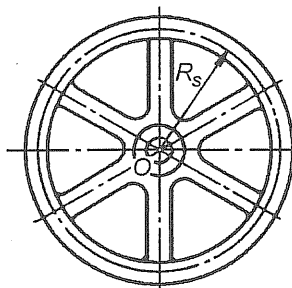
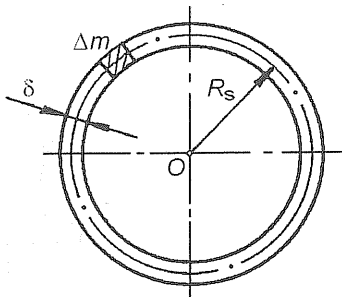
Uvažujme věnec (obr. 48), jehož radiální tloušťka δ je proti střednímu poloměru R_s zanedbatelná. Hmotnost věnce m je rovnoměrně rozložena na poloměru R_s . Věnec se rozdělí na malé hmotné elementy $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_n$, pro které platí

$$\Delta I_1 = \Delta m_1 \cdot R_s^2, \Delta I_2 = \Delta m_2 \cdot R_s^2, \dots, \Delta I_n = \Delta m_n \cdot R_s^2, \quad \sum_{i=0}^n \Delta m_i = m,$$

2 Dynamika těles

tedy moment setrvačnosti tenkého věnce

$$I = \sum_{i=0}^n \Delta m_i \cdot R_s^2 = m \cdot R_s^2.$$



Obr. 48. Moment setrvačnosti tenkého věnce

Obr. 49. Moment setrvačnosti setrvačnicku

c) Moment setrvačnosti setrvačnicku

Při přibližném výpočtu lze uvažovat, že se setrvačnick skládá z kruhového věnce spojujícího ramena stejných průřezů a délek rovnajících se střednímu poloměru R_s (obr. 49). Tím pomíjíme moment setrvačnosti náboje (oprávnění tohoto zjednodušení bude zdůvodněno na příkladu). Je-li hmotnost věnce m_v a celková hmotnost ramen m_r , potom

moment setrvačnosti věnce k ose O

$$I_v = m_v \cdot R_s^2$$

moment setrvačnosti ramen (o délce R_s)

$$I_r = \frac{m_r R_s^2}{3}.$$

Moment setrvačnosti celého setrvačnicku k ose O : $I_O = I_v + I_r = m_v \cdot R_s^2 + \frac{m_r R_s^2}{3} = R_s^2 \cdot (m_v + \frac{m_r}{3})$.

Hmotnost ramen bývá obvykle $\frac{1}{3}$ hmotnosti věnce, tj. $m_r = \frac{1}{3} m_v$, takže

$$I_O = 1,1 \cdot m_v \cdot R_s^2$$

Momenty setrvačnosti válce, hranolu a koule jsou uvedeny (bez odvození) v tab. 2.

Příklad 1

Určete přibližný moment setrvačnosti setrvačnicku o hmotnosti věnce 1 000 kg a středním poloměru 1 m.

Řešení:

$$I_O = 1,1 \cdot m_v \cdot R_s^2, \quad I_O = (1,1 \cdot 1\,000 \cdot 1^2) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 1\,100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Příklad 2

Určete moment setrvačnosti koule k ose procházející středem koule a k libovolné povrchové přímce, je-li hmotnost koule 5 kg a její poloměr 60 mm.

Řešení:

$$r = 60 \text{ mm} = 0,06 \text{ m}, \quad I_O = \frac{2}{5} m \cdot r^2, \quad I_O = (\frac{2}{5} \cdot 5 \cdot 0,06^2) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 0,0072 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_{O'} = I_O + m \cdot r^2, \quad I_{O'} = (0,0072 + 5 \cdot 0,06^2) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 0,0252 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Příklad 3

Brusný kotouč má průměr 600 mm, šířku 100 mm a měrnou hmotnost $3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Určete jeho a) moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm, b) poloměr setrvačnosti, c) moment setrvačnosti k libovolné povrchové přímce, d) redukovanou hmotnost na obvodě kotouče, e) setrvačný moment.

Řešení:

$$D = 600 \text{ mm} = 0,6 \text{ m}, \quad b = 100 \text{ mm} = 0,1 \text{ m}, \quad \rho = 3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

$$\text{a) Moment setrvačnosti (tab. 2) } I_O = \frac{m \cdot D^2}{8},$$

hmotnost brusného kotouče $m = V \cdot \rho = \pi \cdot (\frac{D}{2})^2 \cdot b \cdot \rho$, kde V je objem válce,

$$m = (3,14 \cdot \frac{0,6^2}{4} \cdot 0,1 \cdot 3 \cdot 10^3) \text{ kg} = 84,78 \text{ kg},$$

2 Dynamika těles

tedy

$$I_O = 84,78 \text{ kg} \cdot \frac{0,6^2 \text{ m}^2}{8} = 3,81 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

$$b) i = \sqrt{\frac{I_O}{m}},$$

$$i = \sqrt{\frac{3,81}{84,78}} \text{ m} = 0,212 \text{ m}.$$

$$c) I_O = I_O + m \cdot r^2, \quad r = 0,3 \text{ m},$$

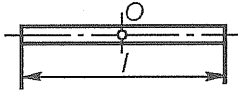


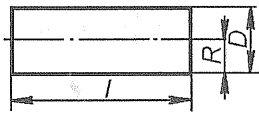
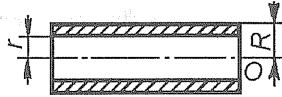
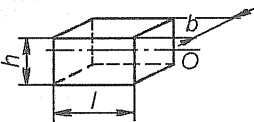
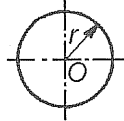
$$I_O = (3,81 + 84,78 \cdot 0,3^2) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 11,44 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

$$d) I_O = m_r \cdot r^2, \quad m_r = \frac{I_O}{r^2},$$

$$m_r = \frac{3,81}{0,3^2} \text{ kg} = 42,3 \text{ kg}.$$

$$e) m \cdot D^2 = 4I_O,$$

$$m \cdot D^2 = (4 \cdot 3,81) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 15,24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Moment setrvačnosti tělesa hmotnosti m k ose O		I_O
Tyče kolmé k ose procházející těžištěm		$\frac{ml^2}{12}$
Tenkého věnce k podélné ose souměrnosti		$m \cdot R_s^2$
Setrvačníku k ose otáčení (přibližný)		$1,1 \cdot m \cdot R_s^2$
Válce nebo kruhové desky k ose souměrnosti		$\frac{m \cdot R^2}{2} = \frac{m \cdot D^2}{8}$
Dutého válce k ose souměrnosti		$m \cdot \frac{R^2 + r^2}{2}$
Hranolu k jeho podélné ose souměrnosti		$m \cdot \frac{b^2 + h^2}{12}$
Koule k ose procházející těžištěm		$\frac{2}{5} m \cdot r^2$

Tab. 2. Přehled momentů setrvačnosti základních geometrických těles

Kontrolní otázky

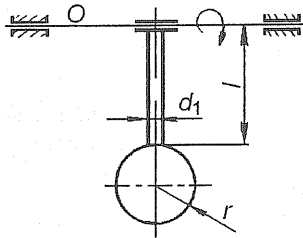
1. Co je to moment setrvačnosti, jaké vztahy pro něj platí, v jakých jednotkách se udává?
2. Odvodte rovnice pro výpočet momentů setrvačnosti tyče, setrvačníku a dutého válce.

Úlohy

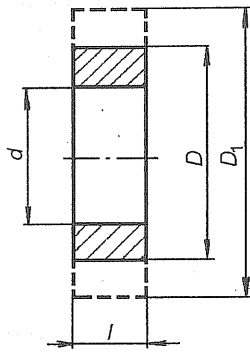
1. Vypočítejte moment setrvačnosti a setrvačný moment setrvačníku o hmotnosti 2 000 kg a středním průměru věnce 3 500 mm.
2. Ocelová tyč o délce 300 mm a průměru 20 mm (obr. 50), na níž je uchycena ocelová koule o průměru 60 mm, rotuje okolo osy O . Měrná hmotnost tyče i koule je $7,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Určete a) moment setrvačnosti celku k ose O , b) redukovanou hmotnost celku na poloměru 0,33 m.
3. U kotouče (obr. 51) je průměr $D = 1,25 d$. Průměr D se má zvětšit na D_1 tak, aby se při konstantní délce l a průměru d moment setrvačnosti kotouče ztrojnásobil. O kolik procent se zvětší hmotnost kotouče?

2 Dynamika těles

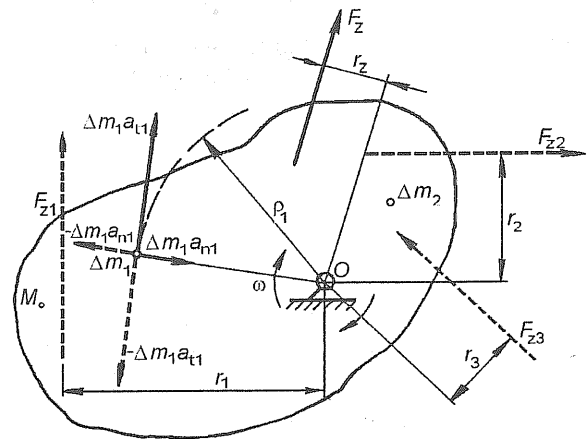
4. Pracovní stroj je opatřen litinovým setrvačником, věnec a náboj spojuje kotouč. Šířka věnce setrvačnicku je 150 mm, vnější průměr 800 mm, vnitřní průměr 500 mm. Při výpočtu uvažujte místo náboje plný vnitřní kotouč o tloušťce 40 mm a průměru 500 mm. Měrná hmotnost litiny $\rho = 7,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Stanovte: a) hmotnost setrvačnicku, b) moment setrvačnosti k ose setrvačnicku, c) redukovanou hmotnost na obvodě setrvačnicku, d) setrvačný moment.



Obr. 50



Obr. 51



Obr. 52. d'Alembertův princip formální dynamické rovnováhy pro otáčivý pohyb

(Výsledky: 1. $I_O = 6\,735 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $mD^2 = 24\,500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; 2. $I_O = 0,118 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $m_r = 1,31 \text{ kg}$; 3. $D_1 = 1,22 D$, 143° ; 4. a) $m_s = 392,53 \text{ kg}$, b) $I_O = 39,08 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, c) $m_r = 244,25 \text{ kg}$, d) $mD^2 = 156,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.)

2.2.2 d'Alembertův princip

Těleso, na které působí zrychlující síly $F_{z1}, F_{z2}, \dots, F_{zn}$, se otáčí kolem osy O (obr. 52). Výslednice všech zrychlujících sil F_z dává vzhledem k pevné ose O zrychlující moment

$$M = F_z \cdot r_z = \sum F_{zi} \cdot r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Libovolná elementární částice hmotnosti Δm má účinkem zrychlujícího momentu vnějších sil určité zrychlení a . Rozložíme zrychlení a_i příslušející bodu hmotnosti Δm_i na složku tečnou a_{ti} a normálovou a_{ni} ($i = 1, 2, \dots, n$). Podle d'Alembertova principu převedeme dynamickou úlohu na statickou, připojíme-li k jednotlivým hmotným bodům elementární setrvačné síly $-\Delta m_i \cdot a_{ti}$ a $-\Delta m_i \cdot a_{ni}$. Tím nastává rovnováha při otáčení tělesa kolem osy O . Platí statická podmínka rovnováhy: algebraický součet momentů vnějších sil a setrvačných sil k ose otáčení se rovná nule. Normálové složky setrvačných sil $\sum m_i \cdot a_{ni}$ procházejí osou otáčení a jejich moment k ose otáčení je roven nule. Platí

$$\sum_{i=0}^n M_i = \sum_{i=0}^n F_i \cdot r_i - \sum_{i=0}^n \Delta m_i \cdot a_{ti} \cdot \rho_i = 0,$$

kde $\Delta m_i a_{ti}$ je elementární zrychlující síla,
 $-\Delta m_i a_{ti}$ – elementární setrvačná síla,
 ρ – vzdálenost částice hmotnosti Δm od osy otáčení.

Úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{a_t}{\rho}$ je v daném okamžiku stejné pro celé těleso, tedy platí

$$M = \sum_{i=0}^n F_i \cdot r_i - \sum_{i=0}^n \Delta m_i \cdot \varepsilon \cdot \rho_i^2 = 0.$$

$\sum F_i \cdot r_i = F_z \cdot r_z$ je moment zrychlujících vnějších sil, proto

$$M = F_z \cdot r_z - \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^n \Delta m_i \cdot \rho_i^2 = 0;$$

$\varepsilon \cdot \sum_{i=0}^n \Delta m_i \cdot \rho_i^2 = \varepsilon \cdot I$ je moment setrvačných sil.

Platí

$$M = F_z \cdot r_z = \varepsilon \cdot I.$$

Je-li moment M vnějších sil F_i stálý, je stálé i úhlové zrychlení ε a jde o pohyb rovnoměrně zrychlený: $\varepsilon = \frac{M}{I} = \text{konst.}$

Je-li $M = 0$, je rovněž $\varepsilon = 0$ a jde o rovnoměrný otáčivý pohyb tělesa.

Základní vztah dynamiky – d'Alembertův princip pro otáčivý pohyb:
 Točivý moment vnější síly k ose otáčení je roven součinu momentu setrvačnosti tělesa k téže ose a úhlového zrychlení.

2.2.3 Fyzické kyvadlo

Těleso zavěšené otočně nad těžištěm T (obr. 53), kývající kolem vodorovné osy O účinkem tíhy G , se nazývá *fyzické kyvadlo*. Jde zde opět o periodický pohyb, téhož druhu jako u matematického kyvadla. Vychýlíme-li kyvadlo z jeho rovnovážné polohy o úhel α , vzniká zrychlující moment

$$M = G \cdot e \cdot \sin \alpha, \quad e \text{ je vzdálenost těžiště tělesa od osy } O.$$

Z podmínky rovnováhy pro otáčivý pohyb plyne vztah $G \cdot e \cdot \sin \alpha = \varepsilon \cdot I_O$,

$$\text{odtud} \quad \varepsilon = \frac{G \cdot e \cdot \sin \alpha}{I_O}, \quad I_O \text{ je moment setrvačnosti tělesa k ose } O, \varepsilon \text{ úhlové zrychlení.}$$

Nahradíme-li fyzické kyvadlo matematickým kyvadlem s hmotným bodem S' , kyvadlo je zavěšeno na vlákně o délce l tak, aby doba kyvu takto vytvořeného matematického kyvadla byla stejná jako doba kyvu fyzického kyvadla, pak pro zrychlující moment M k ose O' platí vztah

$$M = G_m \cdot l \cdot \sin \alpha = \varepsilon \cdot I_{S'},$$

kde G_m je tíha bodu S' ,
 l – vzdálenost těžiště tělesa od osy O' .
 $I_{S'}$ – moment setrvačnosti bodu S' k ose O' .

Protože $I_{S'} = m_{S'} \cdot l^2 = \frac{G_m}{g} \cdot l^2$, platí

$$G_m \cdot l \cdot \sin \alpha = \varepsilon \cdot \frac{G_m}{g} \cdot l^2, \quad \varepsilon = \frac{g \cdot \sin \alpha}{l}.$$

Při stejném vychýlení matematického a fyzického kyvadla musí být u obou stejné úhlové zrychlení:

$$\frac{G \cdot e \cdot \sin \alpha}{I_O} = \frac{g \cdot \sin \alpha}{l}.$$

Odtud lze vypočítat tzv. *redukovanou délku matematického kyvadla*, kterým jsme nahradili fyzické kyvadlo:

$$l = \frac{I_O \cdot g}{G \cdot e}$$

Náhradní matematické kyvadlo má v každé poloze stejné zrychlení s fyzickým kyvadlem. Koná s ním tedy stejný pohyb a má i stejnou dobu kyvu. Dosadíme-li za redukovanou délku do rovnice pro dobu kyvu, dostaneme:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{I_O \cdot g}{G \cdot e \cdot g}} = \pi \sqrt{\frac{I_O}{G \cdot e}}.$$

Přeneseme-li bod S' (rovnoběžně s přímkou $O'O$) do polohy S na fyzickém kyvadle tak, že $|OS| = l$, nazývá se bod S *středem* (centrem) kyvu.

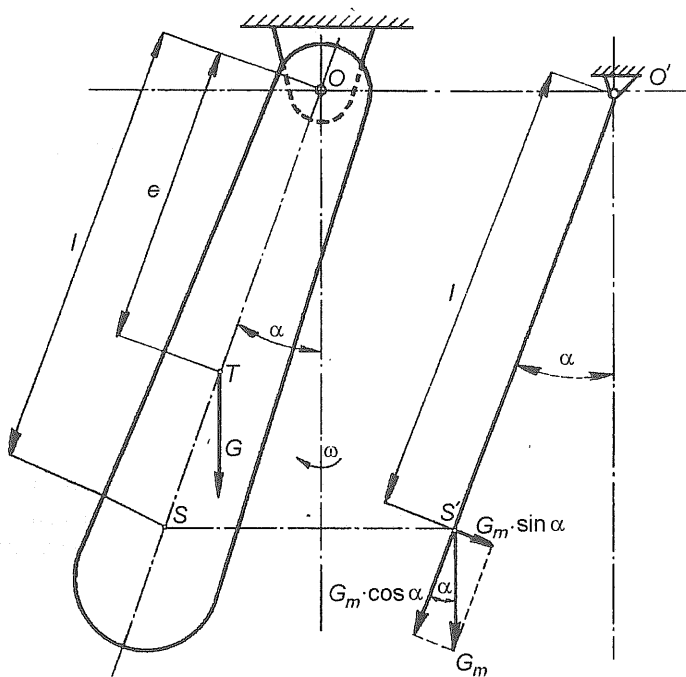
Z rovnice pro dobu kyvu lze vypočítat moment setrvačnosti k ose otáčení:

$$I_O = \frac{t^2 \cdot G \cdot e}{\pi^2}.$$

2.2.4 Zjišťování momentu setrvačnosti pokusem

Moment setrvačnosti složitých, příp. nesterodných těles, se v technické praxi mnohdy určuje experimentálně. Princip záleží v otáčení tělesa kolem jeho nehybné osy. Nejvíce se používají tyto čtyři způsoby zjišťování momentu setrvačnosti:

- způsob kývání založený na principu fyzického kyvadla,
- způsob torzního kyvadla,

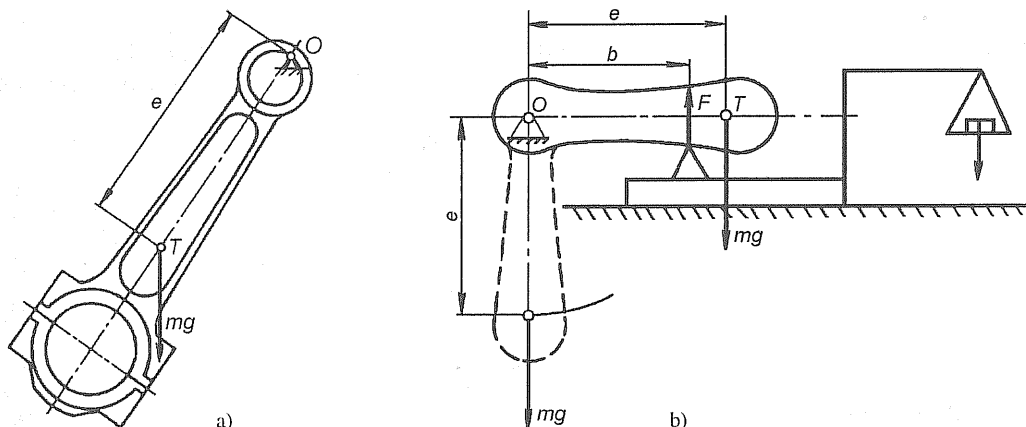


Obr. 53. Fyzické kyvadlo

2 Dynamika těles

- způsob bifilárního závěsu,
- způsob padajícího tělesa.

Nejznámější je způsob kývání (obr. 54). Měřené těleso se zavěsí na břit a rozkývá se. Stopkami se změří doba většího



Obr. 54. Zjišťování momentu setrvačnosti pomocí kývání

počtu (asi 20) kyvů (obr. 54a). Z ní vypočteme dobu t jednoho kyvu, která se dosadí do vzorce pro výpočet momentu setrvačnosti fyzického kyvadla.

Moment setrvačnosti fyzického kyvadla

$$I = m \cdot g \cdot e \cdot \frac{t^2}{\pi^2}$$

kde e je vzdálenost těžiště fyzického kyvadla od osy kývání,
 m – hmotnost tělesa.

Přitom platí:

$$I_O = I - m \cdot e^2$$

Jestliže lze změřit vzdálenost těžiště od osy kývání a známe hmotnost tělesa, je možno dosadit dané hodnoty přímo do uvedeného vzorce. Neznáme-li hmotnost tělesa ani vzdálenost těžiště tělesa k závěsu, určíme dané hodnoty experimentálně. Na tělese ve svislé poloze vyznačíme těžnici (obr. 54b) a vychýlíme těleso tak, aby těžnice byla vodorovná; těleso podepřeme v libovolné vzdálenosti b od osy O a vážením určíme sílu F , kterou působí těleso o odpovídající hmotnosti na podporu a změříme rameno b podpory. Z podmínky rovnováhy momentů k ose O plyne vztah $m \cdot g \cdot e = F \cdot b$, který dosadíme do vzorce pro výpočet momentu setrvačnosti:

$$I = F \cdot b \cdot \frac{t^2}{\pi^2}$$

V daném případě je moment setrvačnosti vztážen k ose O . Moment k těžišti vypočítáme pomocí Steinerovy věty:

$$I_O = I - m \cdot e^2 = F \cdot b \cdot \frac{t^2}{\pi^2} - m \cdot e^2$$

Příklad 1

Určete moment setrvačnosti setrvačníku (obr. 55) o hmotnosti 850 kg k ose procházející těžištěm, je-li vzdálenost těžiště setrvačníku od závěsu 900 mm. Doba deseti kyvů je 11 s.

Řešení:

$$e = 900 \text{ mm} = 0,9 \text{ m, doba jednoho kyvu } t = \frac{11}{10} \text{ s} = 1,1 \text{ s.}$$

Moment setrvačnosti k závěsu

$$I = m \cdot g \cdot e \cdot \frac{t^2}{\pi^2}, \quad I = I_O + m \cdot e^2,$$

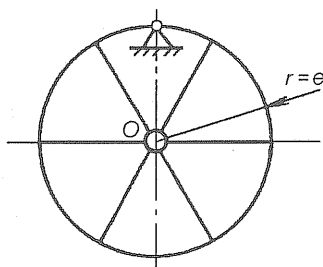
moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm

$$I_O = I - m \cdot e^2$$

Po dosazení

$$I = 850 \cdot 9,81 \cdot 0,9 \cdot \frac{1,1^2}{3,14^2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 925 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_O = 925 - 850 \cdot 0,9^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 236,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



Obr. 55

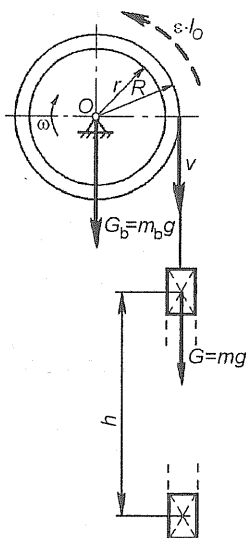
Příklad 2

Buben výtahu o hmotnosti 450 kg má vnější průměr 1 200 mm a vnitřní průměr 1 000 mm (obr. 56). Na bubnu je navinuto lano, na němž visí klec o hmotnosti 620 kg. Po odbrzdění začne klec volně sjíždět. Určete: a) otáčky, které bude buben konat za 4 s, b) osovou sílu F v laně, c) do jaké hloubky klesne klec.

Řešení:

Je dáno $m_b = 450$ kg, $m = 620$ kg, $D = 1\,200$ mm = 1,2 m, $d = 1\,000$ mm = 1 m, (tedy $r = D/2$, $r = d/2$), $t = 4$ s.

Má-li se určit pohyb soustavy hmotných těles, postupujeme tak, že každé z těles uvolníme a určíme jeho pohyb samostatně. Klec koná posuvný pohyb, buben otáčivý pohyb.



a) Uvolníme klec:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0, \\ m \cdot g - F - m \cdot a &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

Uvolníme buben:

$$\begin{aligned} \sum M_i &= 0, \\ F \cdot R - \epsilon \cdot I_O &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

U rovnoměrně zrychleného otáčivého pohybu je $a = a_t = \epsilon \cdot R$. (III)

Řešením soustavy rovnic (I) až (III) a po dosazení $I_O = m_b \cdot \frac{R^2 + r^2}{2}$ dostaneme

$$m \cdot (g - \epsilon \cdot R) \cdot R - \epsilon \cdot m_b \cdot \frac{R^2 + r^2}{2} = 0,$$

$$\epsilon = \frac{m \cdot g \cdot R}{m \cdot R^2 + m_b \cdot \frac{R^2 + r^2}{2}}, \quad \epsilon = \frac{620 \cdot 9,81 \cdot 0,6}{620 \cdot 0,36 + 450 \cdot \frac{0,36 + 0,25}{2}} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} = 10,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}.$$

$$a = 10,2 \cdot 0,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

b) Dosadíme do rovnice (I):

$$\begin{aligned} F &= m \cdot (g - \epsilon \cdot R), \\ F &= 620 \cdot (9,8 - 10,2 \cdot 0,6) \text{ N} = 229 \text{ N}. \end{aligned}$$

c) Hloubka pádu se vypočte z rovnice

$$h = \frac{at^2}{2},$$

$$h = \frac{6,12 \cdot 16}{2} \text{ m} = 48,96 \text{ m}.$$

Obr. 56

Úlohy

- Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose setrvačnicku o hmotnosti 453 kg. Setrvačnick je nasazen nábojem o poloměru 35 mm na břitu. Měřením byla zjištěna doba jednoho kyvu 2,32 s.
- Plný kotouč o hmotnosti 15 kg a poloměru 200 mm se odvíjí vlastní tíhou z vlákna upevněného ve vodorovné rovině. Určete: a) úhlové zrychlení, kterým se bude kotouč otáčet, b) jakým zrychlením se bude kotouč pohybovat, c) koncovou rychlost kotouče na dráze 2 m, d) jaká osová síla vznikne v laně?
- Válec o poloměru 260 mm a hmotnosti 58 kg se otáčí okolo osy procházející jeho těžištěm. Na válec je navinuto lano (hmotnost zanedbatelná), na kterém je zavěšeno břemeno o hmotnosti 37 kg. Jaké počáteční otáčky musí mít válec, aby vyzvedl břemeno do výšky 2,3 m, kde se zastaví.
- Litinový dutý kotouč se roztáčí rovnoměrně zrychleně za 6 minut na 200 otáček za minutu. Kotouč má tyto rozměry: vnější průměr 3,2 m, vnitřní průměr 2,8 m, šířka 400 mm; měrná hmotnost litiny $7,25 \cdot 10^3$ kg \cdot m⁻³. Jakým úhlovým zrychlením se kotouč roztáčí a jaká zrychlující síla působí na jeho obvodě?

(Výsledky: 1. $I_O = 84,43$ kg \cdot m²; 2. $\epsilon = 10,2$ rad \cdot s⁻², $a = a_t = 6,54$ m \cdot s⁻², $v = 5,11$ m \cdot s⁻¹, $F_n = 49,1$ N; 3. $n \doteq 3$ s⁻¹; 4. $\epsilon = 10,2$ rad \cdot s⁻², $F_z = 447,6$ N.)

2.3 Odstředivá síla tělesa

Jak bylo uvedeno v odst. 1.2.5.1 o pohybu hmotného bodu po kružnici ve vodorovné rovině, je velikost odstředivé síly F_C rovna součinu hmotnosti tělesa (m), druhé mocniny úhlové rychlosti (ω^2) a vzdálenosti těžiště tělesa od osy otáčení (r_T):

$$F_C = m \cdot a_n = m \cdot r_T \cdot \omega^2.$$

U tělesa se odstředivá síla určí jako součet všech elementárních odstředivých sil

$$\Delta F_{C1} = \Delta m_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2, \Delta F_{C2} = \Delta m_2 \cdot r_2 \cdot \omega^2, \dots, \Delta F_{Cn} = \Delta m_n \cdot r_n \cdot \omega^2,$$

příslušejících jednotlivým hmotným bodům tělesa, k ose otáčení.

2 Dynamika těles

$$F_C = \sum_{i=1}^n \Delta F_{Ci} = \omega^2 \cdot \sum_i \Delta m_i \cdot r_i, \quad \sum_i \Delta m_i \cdot r_i = m \cdot r_T \text{ je statický moment všech hmotných bodů tělesa k ose otáčení,}$$

r_i – vzdálenosti bodů o hmotnostech Δm_i od osy otáčení;

$$F_C = \omega^2 \cdot m \cdot r_T$$

r_T je vzdálenost těžiště tělesa od osy otáčení.

Nositelka odstředivé síly je kolmá na osu otáčení. Odstředivá síla tělesa působí ve středisku odstředivých sil všech hmotných bodů tělesa (nemusí procházet těžištěm tělesa). Odstředivá síla složeného tělesa je výslednicí odstředivých sil těles, z nichž je složené těleso tvořeno. Při výpočtu odstředivé síly složeného tělesa jsou dvě možnosti:

1. Najdeme těžiště složeného tělesa a vypočítáme jeho vzdálenost od osy otáčení. Do těžiště soustředíme veškerou jeho hmotnost.

2. Rozdělíme těleso na jednoduché geometrické útvary, u nichž dovedeme jednoznačně nalézt těžiště, vypočítáme odstředivou sílu každého geometrického útvaru a geometrickým součtem dostaneme odstředivou sílu celého tělesa.

2.3.1 Odstředivá síla otáčející se tyče

Otáčeli-li se tyč (obr. 57) o délce l , skloněná k svislé ose O pod úhlem α , přísluší hmotnému bodu Δm_i ($i = 1, \dots, n$) jehož vzdálenost od osy O je r_i , odstředivá síla

$$\Delta F_{Ci} = \Delta m_i \cdot r_i \cdot \omega^2.$$

Úhlová rychlost je společná celé tyči. Odstředivá síla se přímo úměrně zvětšuje se vzdáleností od osy otáčení. Při grafickém znázornění, kdy nanášíme odstředivé síly příslušející jednotlivým hmotným bodům na jejich příslušné poloměry kruhové trajektorie, vznikne soustava rovnoběžných sil (obr. 57b), vyplňující plochu trojúhelníku $O12$. Výslednice soustavy sil prochází těžištěm T trojúhelníku ve vzdálenosti jedné třetiny výšky $h = |O1|$ a také bodem A , ležícím ve vzdálenosti $\frac{2}{3}r$ od osy otáčení.

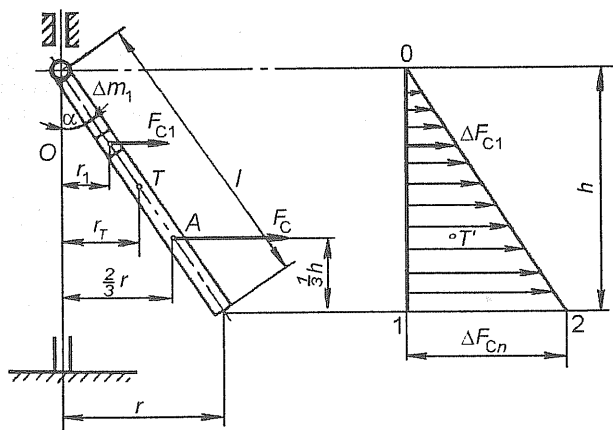
Odstředivou sílu vyjádříme rovnicí

$$F_C = \omega^2 \cdot \sum_i \Delta m_i \cdot r_i = \omega^2 \cdot m \cdot r_T.$$

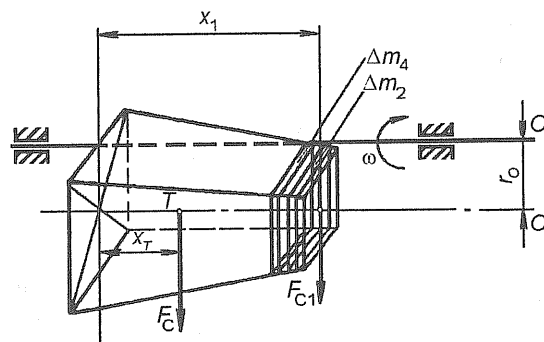
Poněvadž $r_T = \frac{r}{2}$, je

$$F_C = \frac{1}{2} m \cdot r \cdot \omega^2.$$

Odstředivá síla tělesa s osou souměrnosti skloněnou k ose otáčení je stejná, jako v případě, že by hmotnost tělesa byla soustředěna v těžišti tělesa a otáčela se danou úhlovou rychlostí, její působíště však není v těžišti tělesa.



Obr. 57. Odstředivá síla otáčející se tyče



Obr. 58. Odstředivá síla tělesa s osou rovnoběžnou s osou otáčení

2.3.2 Odstředivá síla tělesa, jehož osa je rovnoběžná s osou otáčení

Čtyřboký jehlan (obr. 58) s osou souměrnosti O' rovnoběžnou s osou otáčení O rozdělíme myšlenými blízkými řezy kolmými k ose otáčení na úzké destičky o hmotnostech Δm_i ($i = 1, \dots, n$). Odstředivé síly těchto destiček jsou vzájemně rovnoběžné a protínají osu otáčení. Představují rovinnou soustavu vzájemně rovnoběžných sil: $\Delta F_{C1} \parallel \Delta F_{C2} \parallel \dots \parallel \Delta F_{Cn}$.

2 Dynamika těles

Platí $\Delta F_{Ci} = \Delta m_i \cdot r_O \cdot \omega^2$, $F_C = \sum_{i=1}^n \Delta F_{Ci} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_O \cdot \omega^2 = m \cdot r_O \cdot \omega^2$, r_O je vzdálenost os O a O' .

Polohu výslednice určíme z momentové věty k základně:

$$M = F_C \cdot x_T = F_{C1} \cdot x_1 + F_{C2} \cdot x_2 + \dots + F_{Cn} \cdot x_n = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot x_i \cdot r_O \cdot \omega^2,$$

$$F_C \cdot x_T = r_O \cdot \omega^2 \cdot \sum \Delta m_i \cdot x_i = r_O \cdot \omega^2 \cdot m \cdot x_T,$$

x_T je vzdálenost těžiště od podstavy jehlanu,

$\sum \Delta m_i \cdot x_i$ – moment všech elementárních destiček tělesa jehlanu o hmotnostech Δm_i a jejich vzdálenostech x_i od podstavy jehlanu.

Moment $\sum \Delta m_i \cdot x_i$ je stejně velký jako moment celého tělesa jehlanu o hmotnosti $m = \sum \Delta m_i$, soustředěné v těžišti a jeho vzdálenosti $x_T = \sum x_i$ od podstavy jehlanu.

Po dosazení za F_C dostaneme
$$x_O = \frac{r_O \cdot \omega^2 \cdot m \cdot x_T}{m \cdot r_O \cdot \omega^2} = x_T.$$

Odstředivá síla tělesa, jehož osa je rovnoběžná s osou otáčení, je stejně velká jako odstředivá síla jeho hmotnosti soustředěné v těžišti a je kolmá na osu otáčení.

Příklad 1

Jaká odstředivá síla vznikne u nevyváženého oběžného kola parní turbíny o hmotnosti 60 kg, je-li počet otáček turbíny 50 za sekundu? Těžiště oběžného kola je ve vzdálenosti 1 mm od osy otáčení.

Řešení:

$$r_O = 1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m}, \quad F_C = m \cdot r_O \cdot \omega^2, \quad \omega = 2\pi n, \quad \omega = (2 \cdot 3,14 \cdot 50) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$F_C = (60 \cdot 0,001 \cdot 314) \text{ N} = 5950 \text{ N}.$$

Příklad 2

Určete největší napětí v hřídeli o průměru 50 mm (obr. 59), namáhané odstředivými silami, které vznikají u výstředně uložených koulí, je-li počet otáček hřídele 33,3 za sekundu. Jedna z koulí má hmotnost 3 kg, je na ramenu délky 200 mm, druhá má hmotnost 2 kg a je na ramenu délky 300 mm.

Koule o hmotnostech m_1 a m_2 jsou umístěny v takových vzdálenostech od osy otáčení AB , aby platilo $m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$.

Řešení:

Dáno: $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $r_1 = 200 \text{ mm} = 0,2 \text{ m}$, $r_2 = 300 \text{ mm} = 0,3 \text{ m}$, $d = 50 \text{ mm} = 0,05 \text{ m}$, $n = 33,3 \text{ s}^{-1}$, $b = 500 \text{ mm} = 0,5 \text{ m}$, $a = 200 \text{ mm} = 0,2 \text{ m}$, $c = 300 \text{ mm} = 0,3 \text{ m}$.

Vzhledem k umístění koulí leží těžiště celku na ose otáčení AB , avšak obě koule spolu s osou otáčení nepředstavují útvar souměrný k rovině pohybu, protože $m_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2 = m_2 \cdot r_2 \cdot \omega^2$, tj. $F_{C1} = F_{C2}$. Výslednice odstředivých sil F_C obou koulí je rovna nule. Obě síly dávají však dvojici, jejíž moment $M = F_{C1} \cdot b$, který – redukován na délku l – způsobuje v ložiskách reakce; platí

$$M = F_{C1} \cdot b = m_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2 \cdot b, \quad M = (3 \cdot 0,2 \cdot 209^2 \cdot 0,5) \text{ N} \cdot \text{m} = 13\,104,3 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Úhlová rychlost $\omega = 2\pi n$, $\omega = (2 \cdot 3,14 \cdot 33,3) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 209 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Z redukce plyne $F_{C1} \cdot b + F_{rA} \cdot l = 0$, $F_{rA} = -\frac{F_{C1} \cdot b}{l}$, $F_{rA} = -\frac{3 \cdot 0,2 \cdot 209^2 \cdot 0,5}{1} \text{ N} = -13\,104,3 \text{ N}$,

nebo $F_{C2} \cdot b - F_{rB} \cdot l = 0$, $F_{rB} = \frac{F_{C2} \cdot b}{l}$, $F_{rB} = \frac{2 \cdot 0,3 \cdot 209^2 \cdot 0,5}{1} \text{ N} = 13\,104,3 \text{ N}$.

Pro výpočet je třeba určit maximální ohybový moment $M_{o \max}$, abychom vypočítali největší napětí v hřídeli $\sigma_{o \max}$.

V místě působení síly F_{C1} je $M_{o1} = F_{rA} \cdot a$, $M_{o1} = -13\,104,3 \cdot 0,2 \text{ N} \cdot \text{m} = -2\,620,86 \text{ N} \cdot \text{m}$,

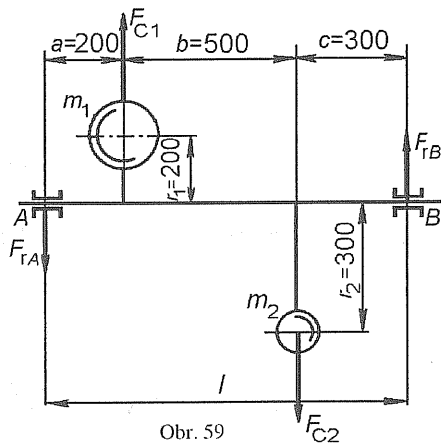
v místě působení síly F_{C2} je $M_{o2} = -F_{rB} \cdot c$, $M_{o2} = -13\,104,3 \cdot 0,3 \text{ N} \cdot \text{m} = -3\,931,29 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Tedy maximální ohybový moment $M_{o \max} = M_{o2} = -3\,931,29 \text{ N} \cdot \text{m}$.

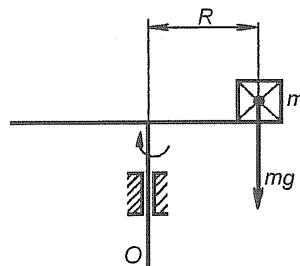
Průřezový modul pro kruhový průřez $W_o = \frac{\pi d^3}{32}$, $W_o = \frac{3,14 \cdot 50^3}{32} \text{ mm}^3 = 12\,265,62 \text{ mm}^3$,

největší napětí v hřídeli $\sigma_{o \max} = \frac{M_{o \max}}{W_o}$, $\sigma_{o \max} = \frac{3\,931\,290}{12\,265,62} \text{ MPa} \doteq 320,5 \text{ MPa}$.

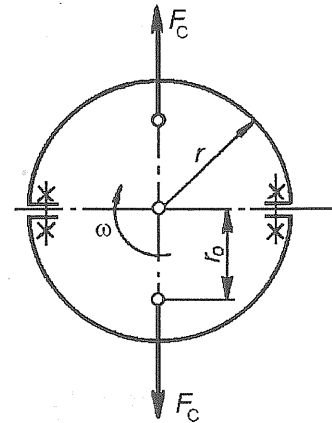
2 Dynamika těles



Obr. 59



Obr. 60



Obr. 61

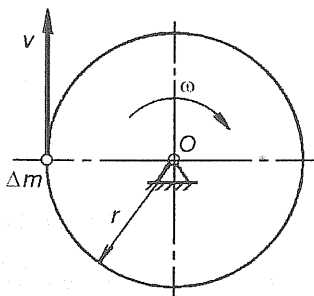
Úlohy

1. Odvoďte rovnici pro odstředivou sílu tělesa, jehož osa souměrnosti je a) šikmá k ose otáčení, b) rovnoběžná se stálou osou.
2. Na vodorovné desce (obr. 60) leží ve vzdálenosti R od středu otáčení těleso hmotnosti m . Určete maximální rychlost, kterou se může deska otáčet, nemá-li těleso sklouznout. Součinitel smykového tření mezi tělesem a deskou je μ_0 .
3. Určete odstředivou sílu tyče průměru $d = 40$ mm, délce $l = 1\,000$ mm, skloněné pod úhlem $\alpha = 30^\circ$ k ose rotace O . Počet otáček tyče $n = 8,3$ s⁻¹. Měrná hmotnost tyče $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ kg · m⁻³.
4. Dělená litinová řemenice je uprostřed stažena šesti šrouby (obr. 61), počet otáček $n = 5$ s⁻¹. Vnější průměr řemenice $d = 1\,200$ mm, vnitřní průměr $d_1 = 1\,000$ mm, šířka $b = 120$ mm. Měrná hmotnost litiny $\rho = 7,35 \cdot 10^3$ kg · m⁻³. Určete průměr šroubů, je-li dovolené napětí v tahu u šroubů $\sigma_{Dt} = 35$ MPa.
5. Určete velikost odstředivé síly lopatky parní turbíny hmotnosti $m = 0,3$ kg, je-li vzdálenost těžiště lopatky od osy otáčení $R = 600$ mm a otáčky oběžného kola $n = 41,6$ s⁻¹.
6. Těžiště řemenice hmotnosti $m = 120$ kg leží (následkem nepřesné výroby) 0,2 mm pod osou. Počet otáček řemenice $n = 50$ s⁻¹. Určete velikost odstředivé síly.

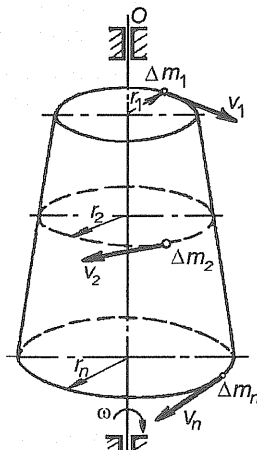
(Výsledky: 2. $v_{\max} = \sqrt{g \cdot R \cdot \mu_0}$ m · s⁻¹; 3. $F_C \doteq 6\,650$ N; 4. 6 šroubů M20; 5. $F_C \doteq 12,3 \cdot 10^3$ N; 6. $F_C \doteq 2,37 \cdot 10^3$ N.)

2.4 Rotační energie tělesa

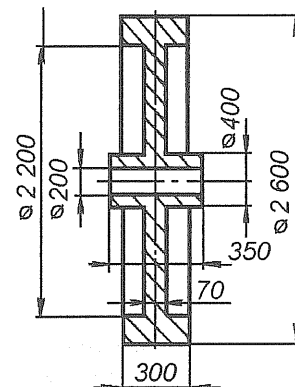
Nejjednodušším případem křivočarého pohybu je pohyb hmotného bodu upevněného na nehmotném vlákně (obr. 62) rychlostí po kružnici poloměru r .



Obr. 62



Obr. 63



Obr. 64

Posuvná energie bodu o hmotnosti m je

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2,$$

a protože se bod pohybuje po kruhové trajektorii (otáčí se), mluvíme o *rotační energii* E_r . Je $v = r \cdot \omega$, tedy

$$E_r = \frac{1}{2}m \cdot r^2 \cdot \omega^2.$$

2 Dynamika těles

Moment setrvačnosti k okamžité ose otáčení

$$I = m \cdot r^2,$$

tedy

$$E_r = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2.$$

Rotační energie hmotného bodu, který se rovnoměrně pohybuje po kružnici, je dána polovičním součinem z momentu setrvačnosti tohoto bodu k okamžité ose otáčení a druhé mocniny úhlové rychlosti.

Rotační energie otáčejícího se tělesa (obr. 63) se skládá z pohybových energií hmotných bodů Δm_i , $i = 1, \dots, n$, jejichž vzdálenost od osy O otáčení (poloměr otáčení) je r_i :

$$E_r = \Sigma \Delta E_r = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \Sigma \Delta m_i \cdot r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \Sigma \Delta I_O = \frac{1}{2} I_O \cdot \omega^2.$$

Rotační energie tělesa otáčejícího se kolem osy procházející těžištěm tělesa je dána polovičním součinem momentu setrvačnosti a druhé mocniny úhlové rychlosti.

Příklad

Jaká je rotační energie litinového setrvačnicku (na obr. 64 jsou uvedeny jeho rozměry), jestliže jeho měrná hmotnost $\rho = 7,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a počet otáček $n = 2,5 \text{ s}^{-1}$?

Řešení:

Vypočteme hmotnost věnce m_v , kotouče m_k a náboje m_n .

Pro objem V dutého rotačního válce výšky b , vnějšího průměru D a vnitřního průměru d platí $V = \frac{\pi}{4} b(D^2 - d^2)$,

tedy $m_v = [0,785 \cdot 0,3 \cdot (2,6^2 - 2,2^2) \cdot 7,3 \cdot 10^3] \text{ kg} = 3\,300 \text{ kg}$,

$$m_k = [0,785 \cdot 0,07 \cdot (2,2^2 - 0,4^2) \cdot 7,3 \cdot 10^3] \text{ kg} = 1\,877 \text{ kg}.$$

$$m_n = [0,785 \cdot 0,35 \cdot (0,4^2 - 0,2^2) \cdot 7,3 \cdot 10^3] \text{ kg} = 241 \text{ kg}.$$

Moment setrvačnosti setrvačnicku

$$I_O = I_{Ov} + I_{Ok} + I_{On} = m_v \cdot \frac{D_1^2 + D_2^2}{8} + m_k \cdot \frac{D_2^2 + D_3^2}{8} + m_n \cdot \frac{D_3^2 + D_4^2}{8},$$

$$I_O = (3\,300 \cdot 1,45 + 1\,877 \cdot 0,625 + 241 \cdot 0,025) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 5964,15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

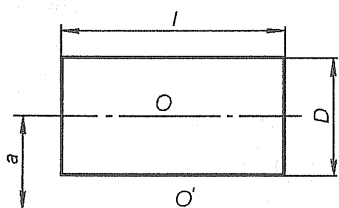
Rotační energie setrvačnicku

$$E_r = \frac{1}{2} I_O \cdot \omega^2,$$

$$E_r = \left(\frac{1}{2} \cdot 5964,15 \cdot 2^2 \cdot 3,14^2 \cdot 2,5^2\right) \text{ J} = 735\,051 \text{ J} = 7,35 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Úlohy

1. Určete rotační energii brusného kotouče o průměru $D = 600 \text{ mm}$ a šířce $b = 100 \text{ mm}$, je-li počet otáček $n = 10 \text{ s}^{-1}$ a měrná hmotnost $\rho = 2,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.



Obr. 65

2. Jakými otáčkami n se otáčí kovový válec o hmotnosti $m = 8 \text{ kg}$ a průměru $D = 200 \text{ mm}$ okolo své osy, je-li rotační energie válce $E_r = 24 \cdot 10^{-2} \text{ J}$.

3. Vypočítejte rotační energii E_r ocelového válce (obr. 65) otáčejícího se okolo osy O' . Dáno: $n = 4 \text{ s}^{-1}$, $D = 500 \text{ mm}$, $l = 2\,000 \text{ mm}$, $a = 600 \text{ mm}$, $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

(Výsledky: 1. $E_r = 6,27 \cdot 10^3 \text{ J}$, 2. $n = 0,55 \text{ s}^{-1}$, 3. $E_r = 10,25 \text{ kJ}$.)

2.5 Změna rotační energie – práce zrychlujících sil

Těleso se účinkem zrychlujících sil F_{zi} ($i = 1, \dots, n$) otáčí kolem osy O (obr. 66). Všechny hmotné body tělesa mají v daném okamžiku společnou úhlovou rychlost ω .

Bod A , ležící ve vzdálenosti r od osy otáčení, je působištěm síly F_{zi} , která svírá s osou x úhel β . Síla F_{zi} je v bodě P , ležícím na nositelce této síly, kolmá k rameni OP a vytváří moment $F_{zi} \cdot r_O$, kde $r_O = |OP|$. Spojnice OP svírá s osou y také úhel β a platí

$$\cos \beta = \frac{r_O}{r}.$$

V elementárním časovém okamžiku vykoná působiště A elementární dráhu Δs do bodu A' , spojnice OA' svírá s osou y úhel $\Delta \varphi$ a platí $\Delta s = r \cdot \Delta \varphi$. Elementární práce síly F_{zi} na dráze Δs je

$$\Delta W = F_{zi} \cdot \Delta s \cdot \cos \beta,$$

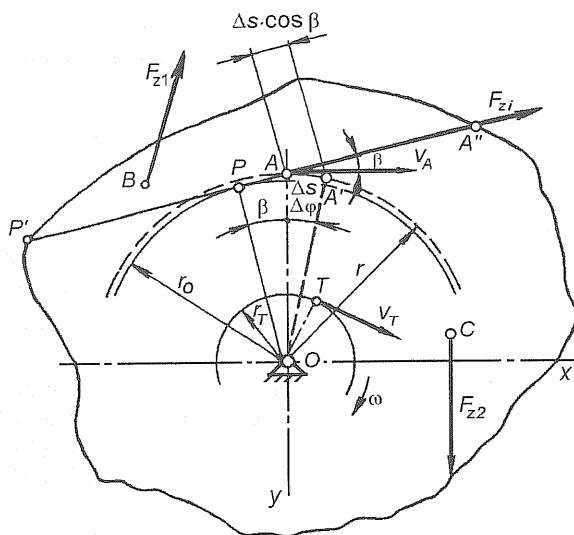
2 Dynamika těles

po dosazení

$$\Delta W = F_{zi} \cdot r_O \cdot \Delta\varphi = M_i \cdot \Delta\varphi,$$

$$W = \sum M_i \cdot \Delta\varphi,$$

kde M_i je moment síly F_{zi} .



Obr. 66

Pro $M_i = M = \text{konst}$ je

$$W = M \cdot \sum \Delta\varphi = M \cdot \varphi,$$

kde φ je celkový úhel pootočení v obloukové míře.

Práce zrychlující síly při otáčení tělesa kolem dané osy je dána součinem momentu síly k ose otáčení a úhlu pootočení tělesa v obloukové míře. Práce síly se nemění, přeloží-li se její působíště do libovolného bodu, který je pevně spojen s původním působíštěm.

Práce zrychlující síly zvětší počáteční energii tělesa

$$E_{r0} = \frac{1}{2} I \cdot \omega_0^2 \text{ na pohybovou energii } E_r = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2,$$

kde I je moment setrvačnosti tělesa k ose O ; platí

$$W = M \cdot \varphi = E_r - E_{r0} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 - \frac{1}{2} I \cdot \omega_0^2 = \frac{1}{2} I (\omega^2 - \omega_0^2).$$

Pro pohyb z klidu, tj. pro $\omega_0 = 0$, je práce $W = M \cdot \varphi = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$.

Podle Steinerovy věty

$$I = I_O + m \cdot r_T^2,$$

kde I_O je moment setrvačnosti tělesa k ose O procházející těžištěm T ,
 r_T – vzdálenost těžiště od osy otáčení,
 v_T – obvodová rychlost v těžišti.

Po dosazení dostaneme pro práci zrychlujících sil vztah

$$W = M \cdot \varphi = \frac{\omega^2}{2} (I_O + m \cdot r_T^2) = \frac{1}{2} I_O \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m \cdot r_T^2 \cdot \omega^2.$$

Obvodová rychlost těžiště tělesa vzhledem k ose otáčení $v_T = r_T \cdot \omega$, tedy

$$W = E_r = \frac{1}{2} I_O \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m \cdot v_T^2$$

Pohybová energie tělesa při otáčení okolo libovolné osy nebo bodu je dána součtem rotační energie tělesa k ose, která prochází těžištěm rovnoběžně s osou otáčení, a energie posuvného pohybu hmotnosti soustředěné v těžišti.

Příklad 1

Jakou práci spotřebuje setrvačnick s momentem setrvačnosti $I_O = 1\,260 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, který se z klidu rozbíhá na 3 otáčky za sekundu? Kolik při tom proběhne otáček (i_n), působí-li hnací síla $F = 200 \text{ N}$ na poloměru $R = 1 \text{ m}$?

Řešení:

$$W = E_r = \frac{1}{2} I_O \cdot \omega^2, \quad \omega = 2\pi n, \quad n = 3 \text{ s}^{-1},$$

$$W = [0,5 \cdot 1\,260 \cdot (2 \cdot 3,14 \cdot 3)^2] \text{ J} \doteq 2,24 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

$$E_r = F \cdot 2\pi R \cdot i_n, \quad i_n = \frac{E_r}{F \cdot 2\pi R},$$

$$i_n = \frac{224\,000}{200 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 1} \doteq 178.$$

Příklad 2

Jaké otáčky musí konat ocelový kotouč o průměru $d = 1\,600 \text{ mm}$ a šířce $b = 140 \text{ mm}$, má-li být jeho rotační energie $1,8 \cdot 10^6 \text{ J}$? Kolik kW bude průměrný výkon motoru, jestliže při rozbíhání vykoná 55 otáček? Měrná hmotnost ocelového kotouče $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Řešení:

Počet otáček určíme ze vztahu $\omega = 2\pi n$:

$$n = \frac{\omega}{2\pi};$$

protože $E_r = \frac{1}{2} I_O \cdot \omega^2$, je

$$\omega = \sqrt{\frac{2E_r}{I_O}}.$$

Určíme tedy nejdříve moment setrvačnosti kotouče:

$$I_O = \frac{m \cdot r^2}{2} = \frac{V \cdot \rho \cdot r^2}{2};$$

$d = 2r = 1\,600 \text{ mm} = 1,6 \text{ m}$, $b = 140 \text{ mm} = 0,14 \text{ m}$, tedy objem kotouče $V = \pi r^2 b$,

$$V = 3,14 \cdot 0,8^2 \cdot 0,14 \text{ m}^3 = 0,28 \text{ m}^3,$$

2 Dynamika těles

moment setrvačnosti

$$I_O = 0,5 \cdot 0,28 \cdot 7,8 \cdot 10^3 \cdot 0,8^2 = 702,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Po dosažení dostaneme

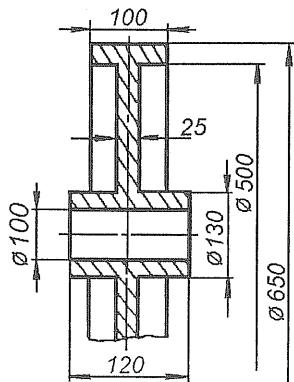
$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,8 \cdot 10^6}{702,23}} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 72 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad n = \frac{72}{2 \cdot 3,14} \text{ s}^{-1} \doteq 11,5 \text{ s}^{-1}.$$

Průměrný výkon motoru $P = 2\pi \cdot M_k \cdot n$, $M_k = \frac{E_k}{\varphi}$,

$$P = (6,28 \cdot \frac{1,8 \cdot 10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 55} \cdot 11,5) \text{ W} = 376 \, 338 \text{ W} \doteq 376 \text{ kW}.$$

Úlohy

1. Uvedte rovnici pro pohybovou energii a) při translačním pohybu tělesa, b) při rotačním pohybu tělesa.
2. Odvoďte rovnici pro změnu rotační energie způsobenou prací zrychlující síly, neprochází-li tato síla osou otáčení.



3. Hřídel o poloměru r se otáčí úhlovou rychlostí ω . Účinkem třecích odporů v ložisku se hřídel zastavuje. O jaký úhel φ se hřídel ještě pootočí, nebude-li dále poháněn? Kolik vykoná otáček, než se zastaví, má-li součinitel smykového tření stejnou hodnotu jako součinitel čepového tření ($\mu = \mu_{\xi}$)?
4. Setrvačnick hnacího stroje s profilem podle obr. 67, s otáčkami $n = 6,6 \text{ s}^{-1}$, má měrnou hmotnost $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Určete moment setrvačnosti setrvačnicku a setrvačný moment. Bude-li stroj přetížen, klesnou jeho otáčky o 10 %. Jakou při tom vykoná setrvačnick práci? Zabrzdí-li se setrvačnick za 5 otáček, jaké je třeba brzdicí síly na obvodě a jak velké napětí v krutu (τ_k) vznikne v hřídeli?

(Výsledky: 1. a) $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, b) $E_r = \frac{1}{2} I_O \cdot \omega^2$; 3. $\varphi = \frac{r \cdot \omega^2}{4g \cdot \mu_{\xi}}$, $i_n = \frac{r \cdot \omega^2}{8\pi \cdot g \cdot \mu_{\xi}}$;

4. $I_O = 10,07 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $m \cdot D^2 = 40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $W = 1 \, 635 \text{ J}$, $F = 849,7 \text{ N}$, $\tau_k = 1,39 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$.)

Obr. 67

2.6 Impulz momentu a moment hybnosti

Působí-li na těleso v bodě A (obr. 66) zrychlující síla F_{zr} , je tato síla podle d'Alembertova principu v rovnováze se setrvačnou silou $\Delta m a_t$. Potom i pro momenty platí, že

$$M - \sum \Delta m a_t \cdot r_O = 0;$$

tečné zrychlení $a_t = \varepsilon \cdot r_O$, tedy

$$M = \sum \Delta m \cdot \varepsilon \cdot r_O \cdot r_O = \varepsilon \cdot \sum \Delta m \cdot r_O^2,$$

točivý moment vnější síly na tělese

$$M = \varepsilon \cdot I_O,$$

kde ε je úhlové zrychlení.

Jestliže je počáteční rychlost rovna nule a točivý moment M je stálý, je $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$ (t je doba působení momentu výslednice vnějších sil), tedy $M \cdot t = I_O \cdot \omega$.

Není-li točivý moment stálý, počítáme se střední hodnotou točivého momentu M_s v určeném čase; platí $M_s \cdot t = I_O \cdot \omega$.

Součin $M \cdot t$ ($M_s \cdot t$) se nazývá *impulz momentu* I_M a veličina $I_O \cdot \omega$ je *moment hybnosti* M_H .

Jestliže není počáteční rychlost tělesa rovna nule, ale těleso se otáčí úhlovou rychlostí ω_0 a začne na ně působit impulz momentu, je přírůstek momentu hybnosti vyjádřen vztahem

$$M \cdot t = I_O \cdot (\omega - \omega_0),$$

kde ω je konečná úhlová rychlost.

Výsledný moment vnějších sil

$$M = \frac{I_O \cdot (\omega - \omega_0)}{t},$$

tedy platí 2. *impulzová věta*:

Výsledný moment vnějších sil k libovolnému pevnému bodu nebo ose je roven časové změně momentu hybnosti soustavy hmotných bodů k témuž bodu nebo ose.

Všimněme si, s jakými veličinami a vztahy pracujeme při posuvném pohybu a s jakými při otáčivém pohybu:

2 Dynamika těles

	Posuvný pohyb	Otáčivý pohyb
Veličiny	hmotnost m rychlost v zrychlení a dráha s síla F	moment setrvačnosti I_O úhlová rychlost ω úhlové zrychlení ε dráha φ točivý moment M
Pohybová energie	$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$	$E_k = \frac{1}{2} I_O \cdot \omega^2$
Základní rovnice dynamiky	$F = m \cdot a$	$M = I_O \cdot \varepsilon$
Impulz a hybnost	$F_z \cdot t = m \cdot (v - v_0)$	$M \cdot t = I_O \cdot (\omega - \omega_0)$
Práce zrychlující síly	$W = F \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot (v^2 - v_0^2)$	$W = M \cdot \varphi = \frac{1}{2} I_O (\omega^2 - \omega_0^2)$

Příklad

Určete moment vnějších sil, kterým musíme po dobu $t = 480$ s působit na setrvačnick, jehož věnec má vnější průměr $D = 3\,200$ mm, vnitřní průměr $d = 2\,800$ mm, šířku $b = 250$ mm, jestliže se účinkem momentu počet otáček zvětšil z $n_0 = 1,66$ s⁻¹ na $n = 3$ s⁻¹. Měrná hmotnost setrvačnicku $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ kg · m⁻³, přibližný moment setrvačnosti setrvačnicku $I_O = 1,1 m_v \cdot r_s^2$,

Řešení:

$$M = I_O \cdot \frac{\omega - \omega_0}{t} = I_O \cdot \frac{2\pi \cdot (n - n_0)}{t}, \quad I_O = 1,1 m_v \cdot r_s^2, \quad \text{kde } m_v = \pi \cdot \frac{D^2 - d^2}{4} \cdot b \cdot \rho \text{ a poloměr otáčení setrvačnicku } r_s = \frac{D + d}{4},$$

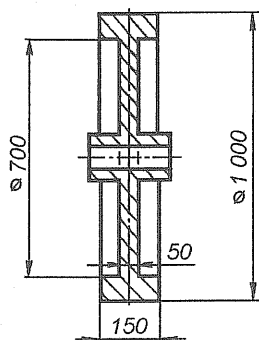
$$\text{tedy } I_O = (1,1 \cdot 3,14 \cdot \frac{3,2^2 - 2,8^2}{4} \cdot 0,25 \cdot 7,8 \cdot 10^3 \cdot \frac{6^2}{16}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = (3,45 \cdot 0,6 \cdot 0,25 \cdot 7,8 \cdot 10^3 \cdot 2,25) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \doteq 9\,092 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

$$\text{Potom } M = (9\,092 \cdot \frac{6,28 \cdot (3 - 1,66)}{480}) \text{ N} \cdot \text{m} \doteq 159 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

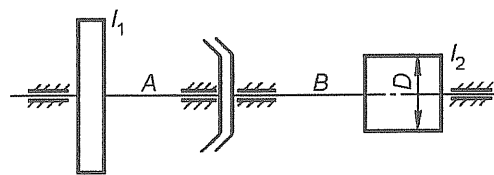
Úlohy

1. Na setrvačnick (obr. 68) s počtem otáček $n = 2$ s⁻¹ začne po dobu 4 s působit moment vnějších sil $M = 150$ N · m. Určete konečné otáčky setrvačnicku. Měrná hmotnost setrvačnicku $\rho = 7,25 \cdot 10^3$ kg · m⁻³. Při výpočtu uvažujte místo náboje plný kotouč o tloušťce 50 mm a průměru 700 mm.
2. Na hnacím hřídeli A je naklínována řemenice s momentem setrvačnosti $I_1 = 150$ kg · m², jejíž počet otáček $n = 2,5$ s⁻¹. Třecí spojkou z (obr. 69) je hřídel A spojen s hřídelem B, který je v klidu. Na hřídeli B je řemenice s momentem setrvačnosti $I_2 = 120$ kg · m². Určete společnou úhlovou rychlost, otáčky a úbytek rotační energie.
3. V jakém čase dosáhne setrvačnick s momentem setrvačnosti $I = 160$ kg · m² počtu otáček $n = 3$ s⁻¹ konstantním momentem vnějších sil $M = 120$ N · m, jestliže původní počet otáček byl $n_0 = 2$ s⁻¹?
4. Odvoďte obecný vzorec pro výpočet momentu setrvačnosti setrvačnicku konajícího n otáček za minutu, který se bez přičinění hnací síly zastaví působením čepového tření za dobu t . Poloměr čepu je r a součinitel čepového tření μ_z .

$$(\text{Výsledky: } 1. n \doteq 3 \text{ s}^{-1}; 2. \omega_s = 11,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, n_s = 1,86 \text{ s}^{-1}, E_{t2} \doteq 6,8 \text{ J}; 3. t \doteq 8,37 \text{ s}; 4. I_O = \frac{30m \cdot g \cdot r \cdot \mu_z \cdot t}{3,14 \cdot n}.)$$



Obr. 68



Obr. 69

2.7 Pohybová energie při obecném pohybu

Pohybová energie tělesa, které se otáčí úhlovou rychlostí ω okolo okamžité osy O a zároveň se posouvá rychlostí v , je dána vztahem

$$E_k = \frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{2}I_O \cdot \omega^2.$$

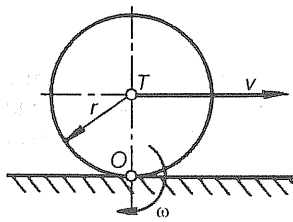
Pohybová energie při obecném pohybu je dána součtem energie posuvného pohybu hmotnosti soustředěné v těžišti a rotační energie hmotnosti k ose jdoucí těžištěm rovnoběžné s osou otáčení.

Příklad

Jaká je pohybová energie ocelové koule o průměru $r = 50$ mm, která se valí po vodorovné rovině rychlostí $v = 6$ m \cdot s $^{-1}$ (obr. 70)? Měrná hmotnost koule $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ kg \cdot m $^{-3}$.

Řešení:

Koule se v daném okamžiku otáčí okolo styčného bodu O , který je okamžitým středem otáčení, takže



Obr. 70

úhlová rychlost otáčení

$$\omega = \frac{v}{r}, \quad v = \omega \cdot r,$$

moment setrvačnosti koule

$$I_O = \frac{2}{5}m \cdot r^2, \quad m = V \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \rho,$$

$$m = (4,18 \cdot 1,25 \cdot 10^{-4} \cdot 7,8 \cdot 10^3) \text{ kg} \doteq 4,1 \text{ kg}.$$

Pohybová energie koule

$$E_k = \frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{2}I_O \cdot \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}m \cdot r^2 \cdot \omega^2 = 0,7m \cdot v^2,$$

$$E_k = (0,7 \cdot 4,1 \cdot 6^2) \text{ J} \doteq 103,3 \text{ J}.$$

Úlohy

1. Odvoďte rovnici pro výpočet energie u tělesa konajícího obecný pohyb.
2. Na nakloněné rovině skloněné pod úhlem α jsou umístěny vedle sebe dva válce stejných průměrů D i stejné hmotnosti m . První je plný dřevěný, druhý dutý ocelový o vnitřním průměru d . Určete jejich rychlosti na dráze s , jestliže neuvažujeme tření.
3. Ocelová koule o poloměru $r = 100$ mm sjíždí po nakloněné rovině délky $l = 800$ mm, skloněné o úhel 30° . Určete: a) rychlost koule na konci dráhy, jestliže na počátku dráhy měla koule rychlost $v_0 = 10,8$ km \cdot h $^{-1}$ (tření neuvažujte), b) pohybovou energii na konci dráhy délky l . Měrná hmotnost oceli $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ kg \cdot m $^{-3}$.
4. Určete pohybovou energii litinového setrvačnicku o průměru $D = 800$ mm a šířce $b = 60$ mm, je-li jeho počet otáček $n = 4$ s $^{-1}$. Setrvačnick je nasazen na šroubu ($d_1 = D_1 = 100$ mm), jehož stoupání $p_n = 25$ mm. Měrná hmotnost litiny $\rho = 7,3 \cdot 10^3$ kg \cdot m $^{-3}$. Návod k řešení: setrvačnick se otáčí a zároveň posouvá.

(Výsledky: 2. $v_1 = 1,33 \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha$, $v_2 = \frac{4g \cdot s \cdot D^2 \cdot \sin \alpha}{3D^2 + d^2}$; 3. $v = 3,82$ m \cdot s $^{-1}$, $E_k \doteq 333,7$ J; 4. $E_k \doteq 5 554$ J.)

3 VYVAŽOVÁNÍ

Zajištění klidného chodu strojních zařízení je velice důležité hlavně z těchto hledisek:

- * fyziologického – vibrace a hluk stroje i jejich škodlivé účinky na obsluhu se minimalizují;
- * technického – přispívá k dlouhodobému bezporuchovému provozu a příznivě ovlivňuje kvalitu výrobků;
- * ekonomického – prodlužuje se životnost stroje a zkracuje doba prostojů na nutné opravy.

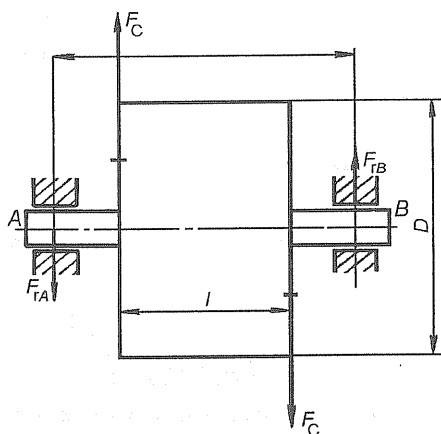
Nevyváženost otáčejících se částí vzniká nerovnoměrným rozložením hmotnosti (nebo materiálu) součásti vzhledem k ose otáčení. Při otáčení těchto součástí vznikají nevyvážené odstředivé síly, které, jak je známo, rostou s druhou mocninou počtu otáček. Z toho je zřejmé, že i malá nevyváženost může, zejména u rychloběžných strojů, vyvolat velké odstředivé síly, a tím značná chvění. Rozoznáváme vyvažování

- * otáčejících se hmotností,
- * hmotností konajících přímočarý vratný pohyb.

3.1 Vyvažování otáčejících se hmotností

Otáčející se hmotnosti lze vyvažovat staticky nebo dynamicky. Metody statického vyvažování, používané na vyvažování jen určitých součástí (kotoučů), úplně nevyhovovaly vývoji rychloběžných strojů ani nárokům na klidnost chodu moderních strojů. Současné metody dynamického vyvažování mají zaručit co nejpřesnější splnění všech požadavků správného vyvážení, a to nejen po stránce technické, ale i ekonomické.

3.1.1 Statické vyvažování



Obr. 71. Statické vyvažování

Staticky vyvažujeme jen takové součásti, které mají tvar tenkého kotouče, tzn., že mají malou tloušťku, a pracují při nízkých provozních otáčkách. Při otáčení těchto součástí vznikají vlivem nevyváženosti odstředivé síly, které se přenášejí na ložiska, kde vznikají reakce proměnné velikosti i směru a způsobují kmitání hřídele a chvění stroje (obr. 71).

Pouze v případech, kdy poměr $l : D < 0,2$ (l je tloušťka a D průměr kotouče), je možno zanedbat účinek momentu dvojice sil ($F_C \cdot l$) a použít pouze statické vyvažování nezávisle na počtu otáček. Pro praxi byl podle získaných zkušeností sestaven graf, který znázorňuje oblast použití statického vyvažování v závislosti na poměru $l : D \geq 0,2$. Je však nutné mít na zřeteli otáčky a další provozní podmínky.

Při statickém vyvažování se nechá vyvažované těleso volně kývat nebo odvalovat na předem zvoleném přípravku. Nejjednodušší a nejčastěji používaná jsou tzv. *vyvažovací pravítka*.

Vyvažovací metody

• Zkusmé vyvažování (obr. 72)

Vyvažované těleso se volně položí na vodorovná hladká pravítka (nebo jiný přípravek) a na nich se odvaluje. Zastaví-li se v libovolné poloze, je vyvážené. Nevyvážené těleso se momentem $G \cdot e$ ustálí vždy těžší částí dolů. Na těžší straně se pak materiál ubírá, nebo na protější straně přidává tak dlouho, až se těžiště tělesa T přesune do osy otáčení a zůstane v libovolné poloze v klidu. Na obrázku je nevyváženost znázorněna nevyvážkem o hmotnosti m_n .

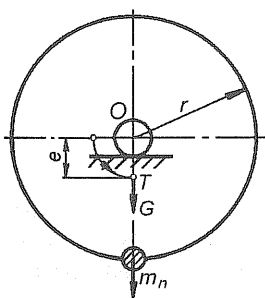
• Vyvažování pomocným vývažkem (obr. 73)

Nejdříve se opět určí „těžší“ místo (nevyvážek hmotnosti m_n). Potom se umístí do bodu A, který je na obvodu vyvažovaného kotouče posunut o úhel 90° (obr. 73a), vývažek o hmotnosti m_v . Těleso ihned zaujme novou rovnovážnou polohu (obr. 73b). Z rovnováhy momentů dvojice sil $m_n \cdot r \cdot \cos \alpha = m_v \cdot r \cdot \sin \alpha$ určíme velikost nevyvážku:

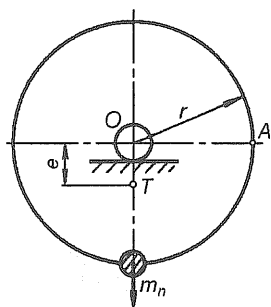
$$m_n = m_v \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

3 Vyvažování

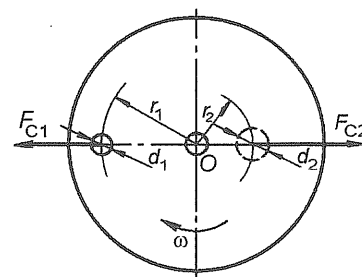
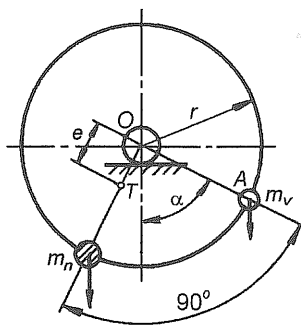
Příčinou nevyváženosti součástí může být i nerovnoměrné rozložení materiálu, které je způsobeno tvarem součástí. Tuto nevyváženost je nutno odstranit již při konstrukčním návrhu součástí. Při řešení problému se využívá znalostí podmínek rovnováhy sil, jak o nich pojednává mechanika (statika).



Obr. 72. Zkusmé vyvažování



Obr. 73. Vyvažování pomocným vývažkem



Obr. 74

Postup statického vyvažování ukážeme na dvou praktických příkladech.

Příklad 1

Máme vyvážit kotouč stálé tloušťky s a měrné hmotnosti ρ , který je ve vzdálenosti r_1 od osy otáčení opatřen průchozím otvorem průměru d_1 . Zásah na kotouči však můžeme provést z konstrukčních důvodů na poloměru r_2 (obr. 74).

Řešení:

Vyjdeme z podmínky

pro úhlovou rychlost ω a hmotnosti m_1, m_2 platí

$$F_{C1} = F_{C2};$$

$$m_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2 = m_2 \cdot r_2 \cdot \omega^2,$$

$$\frac{1}{4}\pi \cdot d_1^2 \cdot s \cdot \rho \cdot r_1 = \frac{1}{4}\pi \cdot d_2^2 \cdot s \cdot \rho \cdot r_2,$$

$$d_2 = d_1 \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}.$$

tedy

Vyvážení lze provést ve vzdálenosti r_2 od osy otáčení tím, že na protější (těžší) straně kotouče vyvrtáme otvor o vypočítaném průměru d_2 .

Příklad 2

Je třeba vyvážit kotouč stálé tloušťky s se dvěma (popř. i více) nálitky o hmotnostech m_1, m_2 (obr. 75).

Řešení:

Jedná se o rovnováhu tří sil v rovině, což je možno řešit graficky nebo početně. Početní řešení je stejné jako při zjišťování rovnováhy tří sil v rovině se společným působištem. Provede se rozkladem sil F_{Ci} do dvou složek v osách x a y .

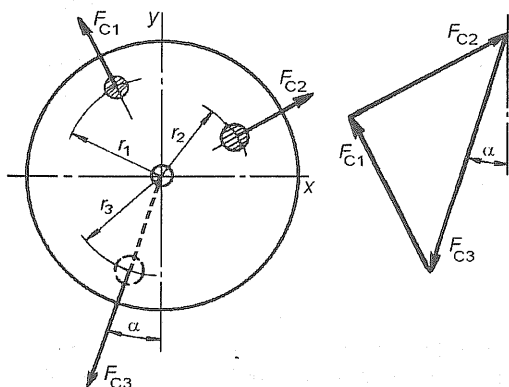
Vypočítáme velikost odstředivých sil: $F_{C1} = m_{n1} \cdot r_1 \cdot \omega^2,$
 $F_{C2} = m_{n2} \cdot r_2 \cdot \omega^2.$

Úhlovou rychlost ω nemusíme dále uvažovat, ovlivňuje totiž všechny síly stejně – položíme $\omega = 1$.

Síly F_{C1} a F_{C2} složíme a uvedeme do rovnováhy. Získáme směr a velikost síly F_{C3} :

$$F_{C3} = m_{v3} \cdot r_3 \cdot \omega^2.$$

Jednu z uvedených hodnot zvolíme (např. r_3) a vypočítáme hmotnost vývažku m_{v3} .



Obr. 75

3.1.2 Dynamické vyvažování

Teorie vyvažování není jednoduchá, a proto se omezíme v dalším výkladu pouze na základní seznámení s dynamickým vyvažováním otáčejících se součástí.

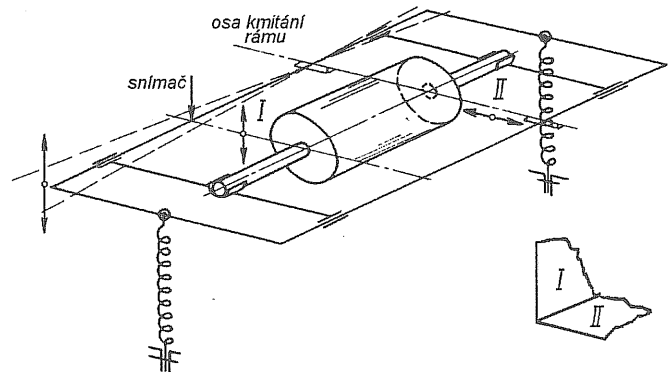
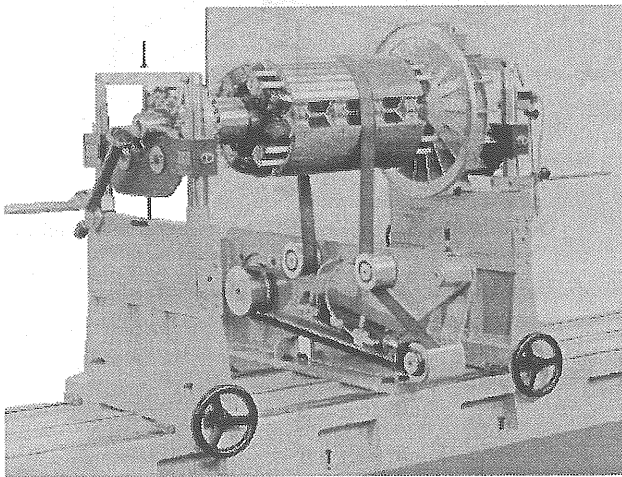
3 Vyvažování

Dynamické účinky nevyvážených hmotností jsou vyvolány jejich odstředivými silami, které jsou úměrné součinu jejich hmotností a vzdáleností od osy otáčení.

Dynamické vyvažování se provádí na *vyvažovacích strojích*, které lze podle speciálních zařízení na zjišťování nevyváženosti otáčejících se součástí rozdělit do tří základních skupin:

- * rezonanční nebo doběhové,
- * kompenzační,
- * s přímou elektrickou nebo optickou indikací měřených veličin.

Základním zařízením těchto strojů jsou buď pružné ložiskové stojany, nebo pružně uložené rámy (obr. 76). Vyvažování se provádí ve dvou navzájem kolmých vyznačovacích rovinách (I, II).



Obr. 76. Dynamické vyvažování

Kompenzační vyvažovací stroje jsou konstruovány tak, že velikost i polohu vývažků v obou vyvažovacích rovinách je možno určit při jediném rozběhu stroje.

Vyvažovací stroje s přímou indikací měřených veličin používají při měření amplitudy a fází kmitu nejmodernější techniku.

Vyvažování klikových hřídelů

Klikové hřídele není možné z konstrukčních důvodů vyvážit v rovině pohybu, a proto jsou v rovinách rovnoběžných s rovinou pohybu (obr. 77) umístěna dvě protizávaží (hmotností m_2, m_3). Do hmotnosti klikového mechanismu m_1 se zahrnuje hmotnost klikového čepu, redukovaná hmotnost ramena kliky a hmotnost až jedné poloviny ojnice.

Pro vyvážení hřídelele musí platit podmínky rovnováhy (viz [1], čl. 6.1):

$$\Sigma F_y = 0, \quad F_{C2} + F_{C3} - F_{C1} = 0, \quad m_2 \cdot r_2 \cdot \omega^2 + m_3 \cdot r_3 \cdot \omega^2 - m_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2 = 0,$$

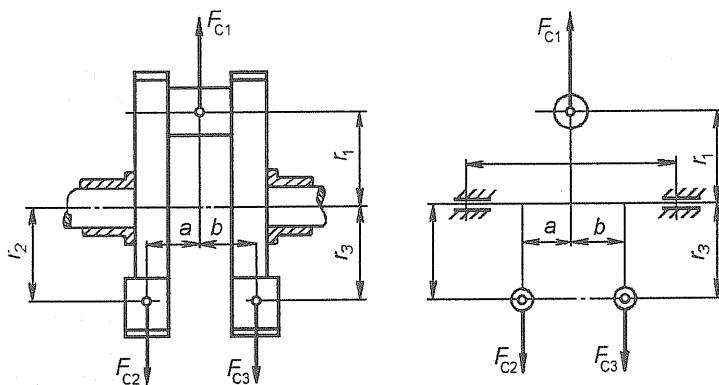
$$\Sigma M = 0, \quad -F_{C2} \cdot a + F_{C3} \cdot b = 0, \quad -m_2 \cdot r_2 \cdot a + m_3 \cdot r_3 \cdot b = 0.$$

U klikových hřídelů bývá $a = b$ a $r_2 = r_3$, takže z druhé rovnice plyne

$$m_2 = m_3.$$

Dosažením do rovnice pro rovnováhu sil ve svilém směru dostaneme

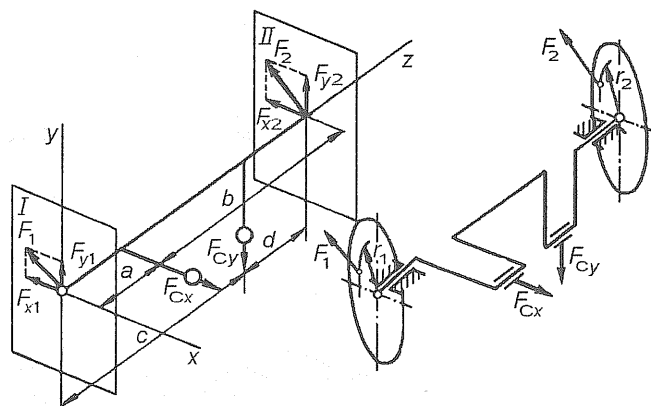
$$m_2 = \frac{m_1 \cdot r_1}{2r_2},$$



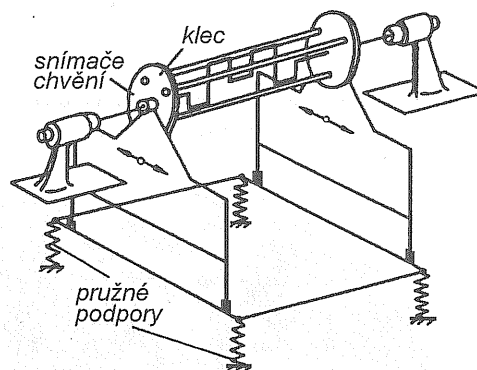
Obr. 77. Vyvažování klikového hřídele

3 Vyvažování

Jde-li např. o vyvážení klikového hřídele, který má zalomení ve dvou rovinách k sobě kolmých, provedeme výpočet i vyvážení také ve dvou rovinách (obr. 78).



Obr. 78. Vyvažování klikového hřídele, který má zalomení ve dvou rovinách k sobě kolmých



Obr. 79. Vyvažování klikových hřídelů metodou přímé indikace

I zde platí podmínky rovnováhy:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0, \\ \Sigma F_y &= 0, \\ \Sigma M &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{Cx} - F_{x1} - F_{x2} &= 0, \\ F_{Cy} - F_{y1} - F_{y2} &= 0, \\ F_{x1} \cdot a - F_{x2} \cdot b &= 0, \\ F_{y1} \cdot c - F_{y2} \cdot d &= 0.\end{aligned}$$

Řešením těchto rovnic získáme velikosti složek sil potřebných pro vyvážení (F_{x1} , F_{y1} , F_{x2} , F_{y2}) a z nich určíme jejich výslednice:

$$F_1 = \sqrt{F_{x1}^2 + F_{y1}^2}, \quad F_2 = \sqrt{F_{x2}^2 + F_{y2}^2}.$$

Pro vyvažovací (odstředivé) síly platí

$$F_1 = m_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2, \quad F_2 = m_2 \cdot r_2 \cdot \omega^2.$$

Zvolíme-li poloměry r_1 a r_2 , na nichž bude uchyceno protizávaží, můžeme vypočítat jejich hmotnost m_1 , m_2 . Protizávaží pak umístíme v rovinách I, II, které jsou kolmé na osu otáčení, nejlépe v ramenech kol. Tím je hřídel připraven k obrobení a k dynamickému vyvážení.

Zatímco u většiny otáčivých strojů je vyvažování závěrečnou fází výroby, je uvedený postup u klikových hřídelů nevhodný. Proto byla vypracována zvláštní metoda pro jejich vyvažování (obr. 79). Klikový hřídel se ukládá do zvláštní dokonale vyvážené *klece*, která je uložena na pružných podporách. K podporám jsou připojeny *snímače chvění*. Nevyvážené odstředivé síly vzniklé při otáčení neobrobeného hřídele jsou zaznamenány snímačem. Nevyváženost se odstraňuje za chodu posouváním obou konců hřídele pomocí elektromotoru až do okamžiku, kdy snímač ukáže výchylku rovnou nule. Potom se na obou koncích hřídele vyvrtají středící otvory a pomocí nich se dokončí obrobení. Po obrobení se hřídel znovu kontroluje na vyvažovací stroji a zbylá nevyváženost se běžným způsobem odstraní.

3.2 Vyvažování hmotností konajících přímočarý vratný pohyb

Zatímco vyvážení odstředivé síly otáčejících se součástí lze dosáhnout různými protizávažími, setrvačné síly hmotností konajících přímočarý vratný pohyb se vyvažují velice obtížně, protože nejen jejich velikost, ale i směr se při pohybu neustále mění. Vyvážení není často úplné a dokonalé. Vyvažuje se dvojím způsobem:

- * hmotnostmi konajícími rovněž vratný pohyb,
- * hmotnostmi, které se otáčejí.

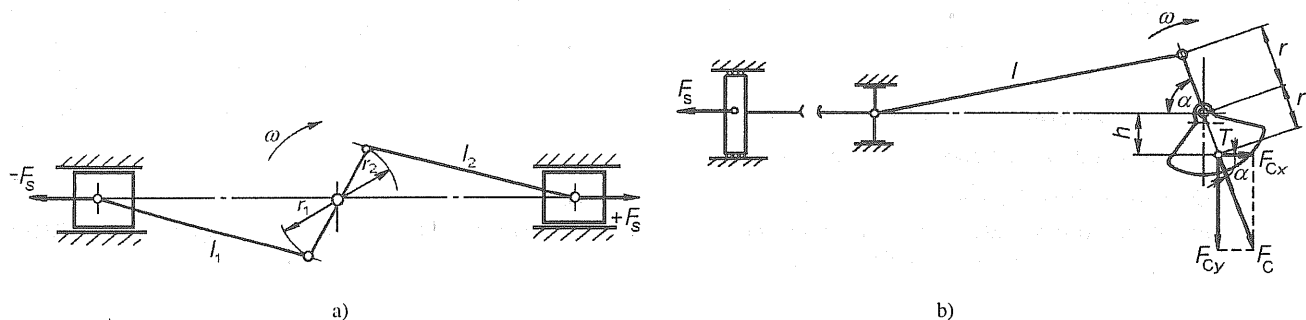
Vyvažování klikových mechanismů

Naprostou dokonalost vyvážení dosáhneme u klikového mechanismu (obr. 80a) prvním způsobem, tj. hmotnostmi, které konají vratný pohyb. Je pochopitelné, že je to podmíněno konstrukcí stroje, která by takové vyvážení připouštěla.

Předpokládáme, že jsou stejné oba poloměry klikového hřídele ($r_1 = r_2$) i délky obou ojníc ($l_1 = l_2$), a proto ke správnému vyvážení postačí splnění podmínky, aby hmotnost posuvných částí na jedné straně a hmotnost posuvných částí, které

3 Vyvažování

vykonávají sružený pohyb na protější straně klikového hřídele, byla stejná. Poněvadž se tato možnost vyvážení v praxi vyskytuje zřídka, je častější vyvažování otáčejícími se hmotnostmi (obr. 80b). Je konstrukčně velmi jednoduché, není však přesné a dokonalé.



Obr. 80. Vyvažování klikových mechanismů a) hmotnostmi konajícími rovněž vratný pohyb, b) hmotnostmi, které se otáčejí

Sledujme průběh zrychlení a pístu (křížáku) klikového mechanismu (obr. 80b). Setrvačná síla (podle druhého pohybového zákona)

$$F_s = m \cdot a = m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot (\cos \alpha \pm \lambda \cdot \cos 2\alpha), \quad m = m_p + m_t + m_k + m_{os},$$

- kde
- m je hmotnost posuvných částí,
 - m_p – hmotnost úplného pístu (včetně pístního čepu),
 - m_t – hmotnost pístní tyče,
 - m_k – hmotnost křížáku,
 - m_o – hmotnost ojnice,
 - m_{os} – hmotnost posuvné části ojnice, $m_{os} = 0,3 m_o$,
 - v – obvodová rychlost klikového čepu,
 - r – poloměr klikové kružnice,
 - l – délka ojnice,
 - λ – poměr $r : l$,
 - α – úhel, který svírá klika s vodorovnou osou x .

Jak zrychlení, tak i setrvačná síla se během zdvihu pístu mění přibližně podle paraboly. Setrvačná síla F_s je vyvažována vodorovnou složkou F_{Cx} odstředivé síly protizávaží:

$$F_{Cx} = F_s, \quad m_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha = m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot (\cos \alpha \pm \lambda \cdot \cos 2\alpha),$$

kde ω je úhlová rychlost klikového čepu.

Nejdůležitější je vyvážení setrvačných sil v krajní poloze pístu ($\alpha = 0^\circ$), kde jsou tyto síly největší. Zjistíme potřebnou hmotnost protizávaží m_1 :

$$m_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2 = m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot (1 \pm \lambda), \quad m_1 = \frac{m \cdot r \cdot (1 \pm \lambda)}{r_1}.$$

Jak již bylo uvedeno, není toto vyvážení dokonalé. Je nutné si uvědomit, že průběh zrychlení je vyjádřen parabolou, kdežto průběh složky odstředivé síly F_{Cx} je graf funkce kosinus. Zcela nevyvážena zůstává také síla F_{Cy} , která při poloze kliky $\alpha = 90^\circ$ a 270° nabývá maximální hodnoty rovné velikosti odstředivé síly. Také zbylý moment $F_{Cx} \cdot h = F_s \cdot h$ nepůsobí příznivě. Poněvadž za tohoto stavu vznikají ve svislém směru ořesy stroje, které mohou být značné, musí se snížit hmotnost protizávaží (m_1) asi na polovinu. Tím se stane, že setrvačná síla není zcela vyvážena, ovšem je značně snížena nepříznivý účinek síly F_{Cy} , který se projevuje např. u lokomotiv proměnlivými tlaky na kolejnice.

Příklad

Vypočítejte, o kolik se liší největší a nejmenší síla, kterou působí kolo železničního vagonu na kolejnici, je-li hmotnost kola $m_k = 380$ kg, jeho průměr $d = 800$ mm, vzdálenost těžiště od osy otáčení $e = 2$ mm a rychlost vlaku $v = 40$ km \cdot h⁻¹.

Řešení:

Odstředivá síla $F_C = m_k \cdot e \cdot \omega^2, \quad \omega = \frac{v}{r}, \quad \omega = \frac{40 \cdot 10^3}{3,6 \cdot 10^3 \cdot 0,4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 27,77 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$

$$F_C = (380 \cdot 0,002 \cdot 27,77^2) \text{ N} \doteq 586,1 \text{ N}.$$

Maximální tlak na vozovku $F_{\max} = m_k g + F_C, \quad F_{\max} = (380 \cdot 9,81 + 586,1) \text{ N} = 4\,313,9 \text{ N},$

3 Vyvažování

minimální tlak na vozovku $F_{\min} = m_k g - F_C$ $F_{\min} = (380 \cdot 9,81 - 586,1) \text{ N} = 3\,141,7 \text{ N}$.
Tedy $F_{\max} - F_{\min} = 1\,172,2 \text{ N}$.

Kontrolní otázky

1. Proč se vyvažují strojní součásti?
2. Jaký je rozdíl mezi statickým a dynamickým vyvažováním?
3. Popište metody statického vyvažování.
4. V čem je podstata dynamického vyvažování?
5. Jak se vyvažují klikové hřídele?
6. Sestavte rovnice pro vyvážení otáčejících se hmotností jedenkrát lomeného hřídele a proveďte jejich rozbor. Které hmotnosti redukuje do osy klikového čepu?

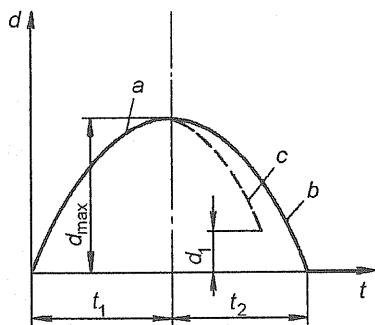
Úloha

1. V kotouči tloušťky b jsou vyvrtány tři otvory průměrů $D_1 = 60 \text{ mm}$, $D_2 = 80 \text{ mm}$, $D_3 = 50 \text{ mm}$ tak, že osa prvního otvoru leží na vodorovné kladné ose, osa druhého otvoru s ní svírá úhel $\alpha_2 = 60^\circ$ ve smyslu otáčení hodinových ručiček a osa třetího otvoru svírá s osou prvního otvoru úhel $\alpha_3 = 160^\circ$ ve stejném smyslu jako osa druhého otvoru. Jaký průměr musí mít a jaký úhel s osou prvního otvoru musí svírat osa čtvrtého otvoru, aby byl kotouč vyvážen? Vzdálenosti středů otvorů od osy otáčení jsou $r_1 = 150 \text{ mm}$, $r_2 = 200 \text{ mm}$, $r_3 = 100 \text{ mm}$, $r_4 = 120 \text{ mm}$.

(Výsledky: $D_4 \doteq 112,6 \text{ mm}$, $\alpha_4 \doteq 231^\circ 41'$.)

4 RÁZY TĚLES

Ráz je proces, při němž ve velmi malém časovém okamžiku dochází ke změně pohybového stavu srážejících se těles. Pohybují-li se dvě tělesa v takovém směru a smyslu, že se v některém okamžiku setkají, nastane jejich ráz. Při rázu se tělesa deformují za současné změny jejich hybnosti. Průběh deformací při rázu je možno rozdělit na dvě periody: po periodě či době od okamžiku setkání až po okamžik dosažení největších deformací, tj. *perioda komprese* (stlačování), následuje *perioda expanze* či navrácení až do okamžiku oddělení. Průběh deformace v závislosti na čase je znázorněn na obr. 81.



Obr. 81. Průběh deformace při rázu
a – ideálně plastický ráz,
b – ideálně pružný ráz,
c – částečně pružný ráz,
d – deformace,
d_{max} – maximální deformace,
d₁ – zbytková deformace,
t₁ – perioda komprese,
t₂ – perioda expanze

U dokonale *nepružných těles* mizí druhá perioda a tělesa se pohybují společnou rychlostí, jakou měly v okamžiku maximální komprese. *Pružná tělesa* se snaží deformaci vyrovnat, tlačí na sebe silami zmenšujícími se s ubývajícím deformací. Kdyby tělesa byla dokonale pružná, vyrovnala by se deformace úplně. Druhá perioda by měla stejný účinek jako první. Skutečná tělesa jsou částečně pružná, deformace se úplně nevyrovnejí, zůstává určitá zbytková deformace a změny hybnosti (rychlosti) jsou menší než v první periodě.

Poměr změny rychlosti v druhé periodě ke změně rychlosti v první periodě se nazývá *součinitel rázu* (nebo též *vzpruživost*) a značí se *k*. Určuje se pokusem tak, že kulička ze zkoušeného materiálu se spustí z určité výšky *h₁* na desku ze stejného materiálu jako je kulička a změří se výška *h₂*, do které se kulička odrazí. Dopadová rychlost na počátku rázu je dána vztahem $v_0^2 = 2g \cdot h_1$. Po rázu odskočí kulička do výšky *h₂*, čemuž odpovídá rychlost na konci rázu: $v_2^2 = 2g \cdot h_2$. Součinitel rázu

$$k = \frac{v_2^2}{v_0^2} = \frac{h_2}{h_1}.$$

Součinitel rázu je závislý na materiálu těles a velikosti rázu. Při dokonale nepružném rázu je $k = 0$, u dokonale pružných těles a při mírných rázech je $k = 1$, při silných rázech je tento součinitel

u těles např. ze slonové kosti $\frac{8}{9}$, z oceli $\frac{5}{9}$, ze skla $\frac{15}{16}$, ze dřeva $\frac{1}{5}$ (obě tělesa jsou z daného materiálu).

Součinitel rázu pro dvě srážející se tělesa, z nichž každé je z jiného materiálu, určíme tak, že zjistíme součinitele rázu k_1, k_2 pro každé těleso a využijeme vztah

$$k_{1,2} = \frac{k_1 E_1 + k_2 E_2}{E_1 + E_2},$$

kde E_1 a E_2 jsou moduly pružnosti příslušných materiálů.

Rozdělení rázů

Příkladem toho, že při rázu dochází ve velmi malém časovém intervalu Δt k okamžité změně rychlosti těles, a tím i jejich hybnosti, je náraz kladiva na výkovek, beranu na pilot, ráz kulečnickových koulí apod. Příčinou této změny jsou rázové síly působící v místě styku obou těles. Dotyk srážejících se těles trvá setiny až desetitisíciny sekundy. Vzniká velké zpoždění srážejících se hmotností a rázová síla, která je dynamickou silou, je tak velká, že mnohdy dojde až k překročení meze pevnosti materiálu. Velikost rázové síly vyplývá z rovnice

$$\sum_i F_i \cdot \Delta t_i = m \cdot v - m \cdot v_0.$$

Podle směru rázových sil působících v místě rázu se určuje druh rázu. Prochází-li společná normála těžišti obou těles, jde o *centrální (středový) ráz*. Souhlasí-li směr rychlosti se směrem rázu, jde o *přímý centrální ráz*, jinak se jedná o *šikmý centrální ráz*. Neprochází-li společná normála těžišti obou těles, jde o *výstředný (excentrický) ráz*.

Ztráta pohybové energie při rázu

Protože jiné síly působící na tělesa během rázu (např. odpor prostředí, tíha) jsou obvykle nepatrné proti nárazovým silám, lze na soustavu obou těles při jejich rázu aplikovat *zákon zachování hybnosti* (celková hybnost obou těles po rázu se rovná jejich hybnosti před rázem) a obdobný zákon zachování momentu hybnosti.

Součet pohybových energií obou těles po rázu se rovná součtu jejich pohybových energií před rázem zmenšenému o energii spotřebovanou v tělesech. Jestliže jsou tyto ztráty energie (v ideálním případě) nulové, je ráz *dokonale pružný*, jsou-li maximální, je ráz *dokonale plastický*.

U těles nedokonale pružných a nepružných se část pohybové energie spotřebuje k trvalé deformaci a malá část se změní chvěním v teplo. Je-li E_{k0} pohybová energie na začátku rázu a E_k pohybová energie na konci rázu, je ztráta pohybové energie

$$E_z = E_{k0} - E_k.$$

$$\text{Ztráta pohybové energie pro přímý centrální ráz} \quad E_z = \left(\frac{1}{2}m_1 \cdot v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_{02}^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2^2\right); \quad (1)$$

je to část práce vnitřních sil, která se převážně přemění na teplo.

Podle zákona o zachování hybnosti lze vyjádřit závislost rychlostí v_1, v_2 po rázu na původních rychlostech v_{01}, v_{02} :

$$m_1 \cdot v_{01} + m_2 \cdot v_{02} = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2, \quad (2)$$

Rychlosti v_1, v_2 získáme jako řešení soustavy rovnic (1), (2) tak, že sečteme druhou mocninu rovnice (1) a rovnicí (2) násobenou

výrazem $-2E_z(m_1 + m_2)$; dostaneme výraz

$$v_1 - v_2 = \pm \sqrt{(v_{01} - v_{02})^2 - 2E_z \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}.$$

Po dosazení za v_2 z rovnice (2)

$$v_1 = \frac{m_1 \cdot v_{01} + m_2 \cdot v_{02}}{m_1 + m_2} \pm \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{(v_{01} - v_{02})^2 - 2E_z \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}},$$

podobně

$$v_2 = \frac{m_1 \cdot v_{01} + m_2 \cdot v_{02}}{m_1 + m_2} \pm \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{(v_{01} - v_{02})^2 - 2E_z \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}.$$

Při kování a drcení je třeba, aby deformační energie byla co největší. Jestliže kladivo o hmotnosti m_1 dopadne rychlostí v na kovaný kus o hmotnosti m_2 , který je v klidu, tj. $v_{02} = 0$, pak při dokonale nepružném rázu, kdy $k = 0$ (např. při bítém žáru kované oceli), je přetvárná či užitečná energie dána úbytkem pohybové energie E_u a platí

$$E_u = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{01}^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_{01}^2 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Před rázem měla soustava energii rovnou pohybové energii kladiva v okamžiku rázu

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_{01}^2.$$

Účinnost rázu

$$\eta = \frac{E_u}{E_k} = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}.$$

Účinnost rázu je poměr deformační práce (energie) k práci vynaložené – např. na zvedání kladiva.

Je zřejmé, že účinnost rázu se zvětšuje, zmenšuje-li se poměr $m_1 : m_2$, tj. čím větší je m_2 . Toto dosáhneme tím, že klademe kovaný kus na kovadlinu, čímž se hmotnost kovadliny a kovaného kusu sčítá. Při zatluštění pilotu chceme, aby deformační energie byla co nejmenší a pohybová energie, a tím i účinnost, co největší. To nastane tehdy, je-li poměr $m_1 : m_2$ co největší, čili hmotnost kladiva či beranu větší než hmotnost pilotu.

Při zjišťování rázů se používají tři *teorie*: *klasická*, *statická* a *vlnová*. Z klasické teorie při řešení příkladů vycházel již Galileo Galilei (1564 – 1642). Isaac Newton ze známých rychlostí před rázem a ze součinitele rázu určil rychlosti těles po rázu. Jeho teorie předpokládala, že zanedbatelná část pohybové energie soustavy přechází do kmitání těles při rázu.

4.1 Přímý centrální ráz

Pohybují-li se koule o hmotnostech m_1 a m_2 (obr. 82a) tak, že rychlost $v_{01} > v_{02}$ ve stejném směru a smyslu, dojde po určité době k rázu (obr. 82b). Jde o přímý centrální ráz, protože společná normála n prochází těžišti obou těles. Od okamžiku setkání nastává přetváření těles až do doby, kdy se jejich rychlosti vzájemně vyrovnají. V tomto okamžiku mají společnou rychlost v , kterou vypočítáme ze zákona o změně hybnosti.

a) *Dokonale plastická tělesa* se po rázu pohybují jako jedno těleso, pro jejich rychlosti tedy platí $v_1 = v_2$, potom

$$m_1 \cdot v_{01} + m_2 \cdot v_{02} = (m_1 + m_2) \cdot v, \quad v = \frac{m_1 \cdot v_{01} + m_2 \cdot v_{02}}{m_1 + m_2}.$$

4 Rázy těles

Ztráta pohybové energie (tj. práce vnitřních sil) je v tomto případě maximální,

$$(v_{01} - v_{02})^2 - 2E_z \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = 0,$$

$$E_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{01} - v_{02})^2.$$

b) *Dokonale pružná tělesa* se vyznačují tím, že při rázu je jejich ztráta pohybové energie rovna nule ($E_z = 0$). Jejich rychlosti určíme ze vztahů

$$v_1 = \frac{m_1 \cdot v_{01} + m_2 \cdot v_{02}}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_{01} - v_{02}),$$

$$v_2 = \frac{m_1 \cdot v_{01} + m_2 \cdot v_{02}}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (v_{01} - v_{02});$$

tato tělesa nemají společnou rychlost, odrazí se od sebe.

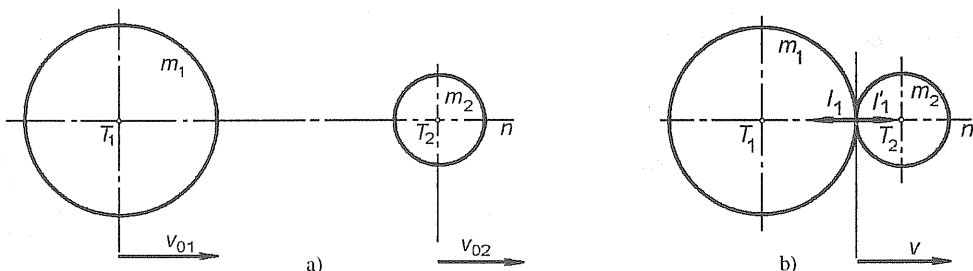
c) *Polopružná tělesa* jsou taková, jejichž deformace se vyrovnávají jen částečně, ale nejsou ani dokonale plastická. Rychlosti, jimiž se budou po rázu pohybovat, určíme podobně jako u pružných těles při zavedení součinitele rázu (vzpruživosti) k :

$$v_1 = \frac{m_1 \cdot v_{01} + m_2 \cdot v_{02}}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot k(v_{01} - v_{02}),$$

$$v_2 = \frac{m_1 \cdot v_{01} + m_2 \cdot v_{02}}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot k(v_{01} - v_{02});$$

dosazením do výrazu pro určení rozdílu rychlostí $v_1 - v_2$ dostaneme

$$E_z = \frac{1}{2} (1 - k^2) \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{01} - v_{02})^2.$$



Obr. 82. Přímý centrální ráz

V periodě expanze, tj. od okamžiku největšího přetvoření až do okamžiku opuštění, jsou u dokonale pružných těles změny hybností stejné jako v první periodě (komprese) a jejich velikost postupně klesá k nule. Skutečná tělesa nejsou dokonale pružná, a proto jsou změny hybností v druhé periodě v důsledku energetických ztrát menší než v první periodě.

Platí

$$m_1 \cdot (v_1 - v) = k \cdot m_1 \cdot (v - v_{01}), \quad v_1 = v \cdot (1 + k) - k \cdot v_{01}.$$

Dosadíme-li za v , dostaneme vztah

$$v_1 = \frac{m_1 \cdot v_{01} + m_2 \cdot v_{02} + k m_2 (v_{02} - v_{01})}{m_1 + m_2},$$

a podobně pro v_2 dostaneme vztah

$$v_2 = \frac{m_1 \cdot v_{01} + m_2 \cdot v_{02} - k m_1 (v_{02} - v_{01})}{m_1 + m_2}.$$

Jsou-li tělesa dokonale nepružná, je $k = 0$, ráz je ukončen první periodou a platí

$$v_1 = v_2 = v.$$

U těles dokonale pružných je $k = 1$ a rychlosti těles po rázu

$$v_1 = 2v - v_{01}, \quad v_2 = 2v - v_{02}.$$

Je-li jedno těleso o „nekonečně velké“ hmotnosti m_2 v klidu (např. stěna) a na stěnu narazí koule o hmotnosti m_1 , pak se koule o rychlosti v_{01} od stěny odrazí rychlostí $v_1 = -k v_{01}$ a pohybuje se zpět. Kdyby se tělesa pohybovala proti sobě, změní se ve výpočtech znaménko rychlosti jednoho z těles.

Příklad 1

Dvě dokonale nepružné koule se pohybují proti sobě stejnou rychlostí ($v_{02} = v_{01}$). Hmotnosti koulí jsou v poměru $m_1 : m_2 = 5 : 1$. Určete velikost ztráty pohybové energie při přímém centrálním rázu.

Řešení:

Hybnost soustavy zůstane během rázu konstantní, ráz bude ukončen první periodou, kdy koule dosáhnou společnou rychlost v .

Při centrálním rázu

$$v = \frac{m_1 \cdot v_{01} + m_2 \cdot v_{02}}{m_1 + m_2},$$

a protože $m_1 = 5m_2$, je

$$v = \frac{5m_2 \cdot v_{01} - m_2 \cdot v_{01}}{5m_2 + m_2} = \frac{2}{3} v_{01}.$$

4 Rázy těles

Ztráta pohybové energie

$$E_z = \frac{1-k^2}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_{01} - v_{02})^2,$$

tedy pro $k = 0$, $m_1 = 5m_2$, $v_{02} = -v_{01}$

$$E_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{5m_2^2}{6m_2} \cdot 4v_{01}^2 = \frac{5}{3}m_2 \cdot v_{01}^2 \left(= \frac{1}{3}m_1 \cdot v_{01}^2 \right).$$

Příklad 2

Beran bucharu o hmotnosti $m_1 = 300$ kg padá na kovaný kus, jehož hmotnost i s kovádkou je $m_2 = 1\,800$ kg, z výšky $h = 1,5$ m. Součinitel rázu $k = 0,4$. Určete: a) dopadovou rychlost beranu, b) společnou rychlost v okamžiku maximální komprese, c) rychlost beranu po rázu, d) ztracenou energii při rázu, e) deformační energii, f) účinnost rázu.

Řešení:

a) $v_{01} = \sqrt{2gh}$,

$$v_{01} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 5,42 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

b) $v = \frac{m_1 \cdot v_{01} + m_2 \cdot v_{02}}{m_1 + m_2}$,

$$v = \frac{300 \cdot 5,42}{300 + 1\,800} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,77 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

c) $v_1 = v \cdot (1+k) - k \cdot v_{01}$,

$$v_1 = [0,7 \cdot (1+0,4) - 0,4 \cdot 5,42] \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq -1,19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

d) $E_z = E_u = \frac{1-k^2}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{01}^2$,

$$E_z = \left(\frac{1-0,4^2}{2} \cdot \frac{300 \cdot 1\,800}{300 + 1\,800} \cdot 5,42^2 \right) \text{ J} = 3\,173 \text{ J} = 3,17 \text{ kJ}.$$

e) Tato energie se spotřebuje na přetvárnou práci a je v tomto případě užitečnou energií.

f) $\eta = \frac{E_u}{E_k} = \frac{1-k^2}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$,

$$\eta = \frac{1-0,4^2}{1 + \frac{300}{1\,800}} = 0,72.$$

Kontrolní otázky

1. Čím je charakterizován ráz?
2. Odvoďte rovnice pro výpočet společné rychlosti a rychlosti po rázu u částečně pružných koulí.
3. Jak se určí součinitel rázu?

Úlohy

1. Koule o hmotnosti $m = 5$ kg narazí na pevnou stěnu rychlostí $v_{01} = 10$ m \cdot s⁻¹, součinitel rázu $k = \frac{1}{2}$. Určete rychlost, jakou se koule odrazí. Jaká energie se rázem ztratí?
2. Koule o hmotnosti $m_1 = 4$ kg, pohybující se rychlostí $v_{01} = 10$ m \cdot s⁻¹, narazí na druhou kouli o hmotnosti $m_2 = 3$ kg, pohybující se rychlostí $v_{02} = 4$ m \cdot s⁻¹. Obě tělesa se pohybovala ve stejném směru a smyslu, jsou dokonale nepružná. Určete: a) společnou rychlost po rázu, b) společnou pohybovou energii po rázu, c) deformační energii při rázu.
3. Beranidlo o hmotnosti $m_1 = 1\,400$ kg, zatlučující pilotu o hmotnosti $m_2 = 500$ kg, padá z výšky $h = 1,5$ m. Účinkem rázu se pilot posune v zemi o dráhu $s = 0,8$ mm. Ráz je dokonale nepružný. Určete: a) odpor zeminy, předpokládáme-li, že je během zarážení pilotu stálý, b) účinnost rázu.

(Výsledky: 1. $v_1 = 5$ m \cdot s⁻¹, $E_z \doteq 187,5$ J; 2. $v \doteq 7,43$ m \cdot s⁻¹, $E_k = 193,21$ J, $E_z \doteq 30,8$ J; 3. $F_{0z} = 2,57 \cdot 10^7$ N, $\eta \doteq 0,73$.)

4.2 Šikmý centrální ráz

Dvě koule o hmotnostech m_1 a m_2 se k sobě přibližují v šikmém směru (obr. 83) rychlostmi v_{01} a v_{02} . V okamžiku šikmého centrálního rázu prochází společná normála středy obou koulí a bodem rázu.

Rozložíme-li rychlosti v_{01} a v_{02} na složky navzájem kolmé ve směru zvolených os x a y a nebudeme uvažovat tření, pak tangenciální složky v_{01y} a v_{02y} se rázem nezmění. Složky v_{01x} a v_{02x} se v průběhu rázu mění jako při přímém centrálním rázu. Společná rychlost v_x v okamžiku maximální komprese, tj. u dokonale pružných těles (podle zákona o změně hybnosti):

$$m_1 \cdot v_{01x} + m_2 \cdot v_{02x} = (m_1 + m_2) \cdot v_x, \quad v_x = \frac{m_1 \cdot v_{01x} + m_2 \cdot v_{02x}}{m_1 + m_2}.$$

Změny hybnosti v druhé periodě jsou částí změny hybnosti v první periodě, tedy po dosažení platí:

$$v_{1x} = v_x \cdot (1+k) - k \cdot v_{01x}, \quad v_{2x} = v_x \cdot (1+k) - k \cdot v_{02x}.$$

4 Rázy těles

Výsledná rychlost koulí po rázu:

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{01y}^2},$$

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{02y}^2}.$$

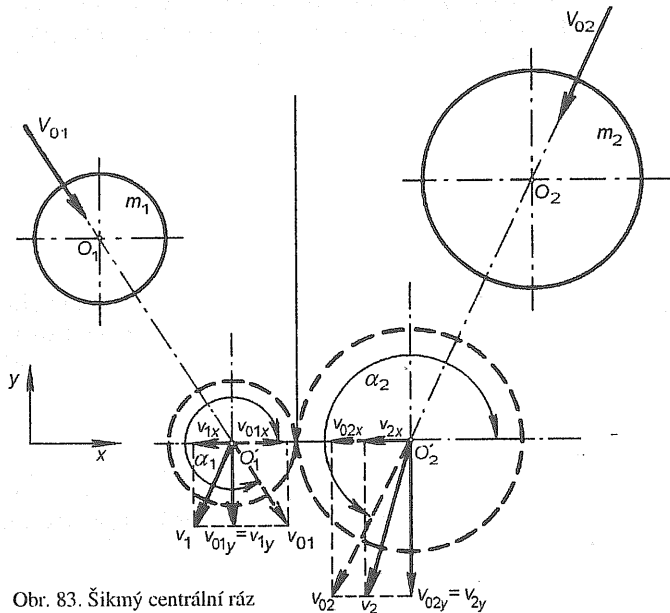
Pro sklon výsledných rychlostí ke směru rázu α_1, α_2 platí:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v_{01y}}{v_{1x}},$$

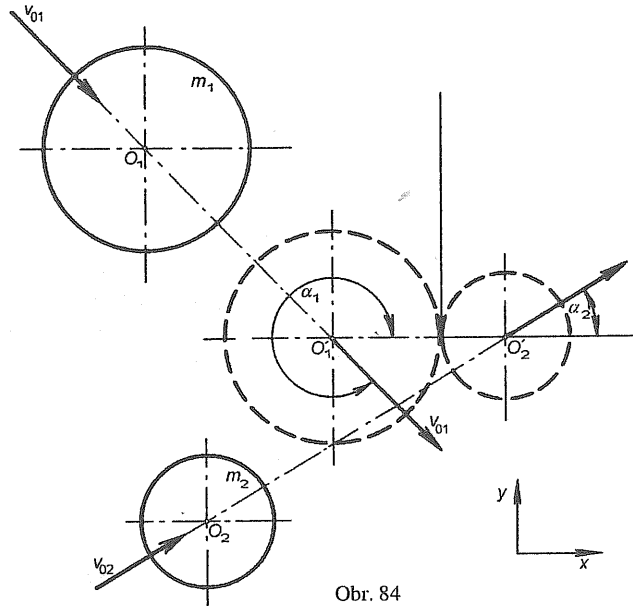
$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{v_{02y}}{v_{2x}}.$$

Příslušný smysl složek rychlostí v_{1x} a v_{2x} je vyjádřen znaménkem funkce.

V případech dokonale pružných a skutečných těles bychom postupovali obdobně jako u přímého rázu.



Obr. 83. Šikmý centrální ráz



Obr. 84

Příklad

Dvě koule o hmotnostech $m_1 = 5 \text{ kg}$ a $m_2 = 3 \text{ kg}$ se k sobě přibližují v šikmém směru (obr. 84). První koule se pohybuje rychlostí $v_{01} = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, druhá rychlostí $v_{02} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. V okamžiku rázu svírají nositelky rychlostí se spojnicí středů obou koulí (procházející bodem rázu) úhel $\alpha_1 = 315^\circ$ a $\alpha_2 = 30^\circ$. Součinitel rázu $k = 0,93$.

Určete: a) společnou rychlost koulí v okamžiku maximální komprese, b) rychlosti obou koulí po rázu, c) úhly, které svírají výsledné rychlosti koulí po rázu se společnou normálou.

Řešení:

a) Provedeme rozklad rychlostí v_{01} a v_{02} do složek ve směru os volené pravoúhlé soustavy souřadnic (osa x je totožná se společnou normálou):

$$v_{01x} = v_{01} \cdot \cos \alpha_1,$$

$$v_{01x} = (6 \cdot 0,707) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 4,24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_{02x} = v_{02} \cdot \cos \alpha_2,$$

$$v_{02x} = (4 \cdot 0,866) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,46 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_{01y} = v_{01} \cdot \sin \alpha_1,$$

$$v_{01y} = [6 \cdot (-0,707)] \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = -4,24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_{02y} = v_{02} \cdot \sin \alpha_2,$$

$$v_{02y} = (4 \cdot 0,5) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\text{Společná rychlost } v_x = \frac{m_1 \cdot v_{01x} + m_2 \cdot v_{02x}}{m_1 + m_2},$$

$$v_x = \frac{5 \cdot 4,24 + 3 \cdot 3,46}{5 + 3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,95 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

b) Rychlosti koulí po rázu:

$$v_{1x} = v_x \cdot (1 + k) - k \cdot v_{01x},$$

$$v_{1x} = [3,95 \cdot (1 + 0,93) - 0,93 \cdot 4,24] \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_{2x} = v_x \cdot (1 + k) - k \cdot v_{02x},$$

$$v_{2x} = [3,95 \cdot (1 + 0,93) - 0,93 \cdot 3,46] \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 4,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{01y}^2},$$

$$v_1 = \sqrt{3,67^2 + (-4,24)^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 5,61 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{02y}^2},$$

$$v_2 = \sqrt{4,4^2 + 2^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 4,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c) Sklon výsledných rychlostí ke směru rázu:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v_{01y}}{v_{1x}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-4,24}{3,67} = -1,153, \quad \alpha_1 = 311^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{v_{02y}}{v_{2x}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{2}{4,4} = 0,454, \quad \alpha_2 = 24^\circ 30'.$$

Kontrolní otázky

1. Jaké podmínky je nutno splnit, abychom šikmý centrální ráz mohli řešit jako přímý centrální ráz?
2. Nakreslete schematicky šikmý centrální ráz dvou těles a naznačte postup jeho řešení.

Úloha

Dvě koule o hmotnostech $m_1 = m_2 = 5 \text{ kg}$ k sobě přibližují v šikmém směru. První koule se pohybuje rychlostí $v_{01} = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, druhá rychlostí $v_{02} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. V okamžiku rázu svírají nositelky rychlostí se spojnicí středů obou koulí úhel $\alpha_1 = 300^\circ$ a $\alpha_2 = 225^\circ$. Považujeme ráz za dokonale pružný. Doba od okamžiku setkání až po maximální kompresi $t = 0,01 \text{ s}$. Určete: a) rychlosti koulí po rázu a jejich směry, b) jaké jsou průměrné normální tlaky při rázu?

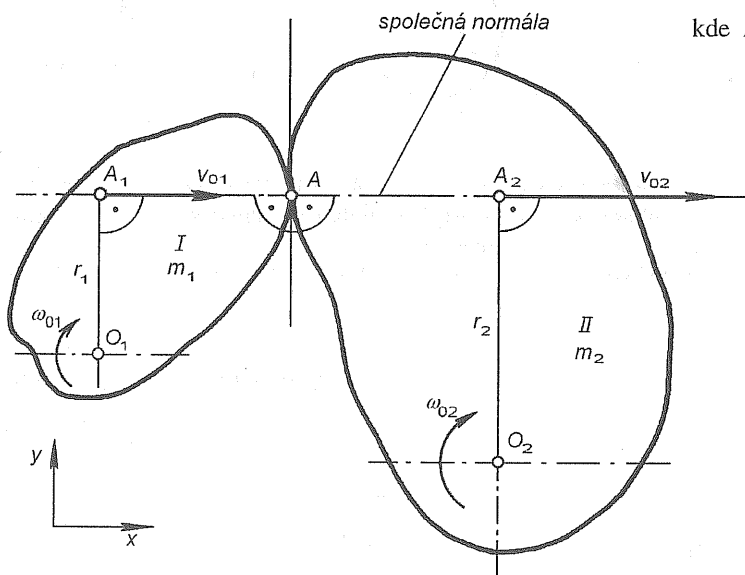
(Výsledek: a) $v_1 = 4,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_2 = 3,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\alpha_1 = 216^\circ 20'$, $\alpha_2 = 293^\circ$, b) $F_s = 1\,257,5 \text{ N}$.)

4.3. Přímý excentrický ráz

Narazí-li těleso o hmotnosti m_1 , které se otáčí úhlovou rychlostí ω_1 kolem osy O_1 , na druhé těleso, otáčející se okolo osy O_2 úhlovou rychlostí ω_2 , dochází k *excentrickému* (výstřednému) rázu (obr. 85). Abychom mohli tento ráz vyšetřovat jako přímý centrální ráz, redukoveme hmotnost prvního tělesa do bodu A_1 a hmotnost druhého tělesa do bodu A_2 , které leží na společné normále procházející bodem dotyku A . Redukované hmotnosti m_{1red} a m_{2red} v bodech A_1 a A_2 se určí ze vztahu

$$m_{1red} = \frac{I_1}{r_1^2}, \quad m_{2red} = \frac{I_2}{r_2^2},$$

kde I_1, I_2 jsou momenty setrvačnosti těles k osám otáčení, r_1, r_2 – poloměry otáčení bodů A_1, A_2 .



Obr. 85. Přímý excentrický ráz

Neuvažujeme-li tření, pak hmotné body A_1 a A_2 se před rázem pohybují rychlostmi kde ω_{01}, ω_{02} jsou příslušné úhlové rychlosti těles o hmotnostech m_1, m_2 .

$$v_{01} = r_1 \cdot \omega_{01}, \quad v_{02} = r_2 \cdot \omega_{02},$$

Směrnice těchto rychlostí jsou totožné se společnou normálou.

Společná rychlost obou těles v okamžiku maximální komprese:

$$v = \frac{m_{1red} \cdot v_{01} + m_{2red} \cdot v_{02}}{m_{1red} + m_{2red}}$$

Rychlost po ukončení rázu, tj. se určí z těchto rovnic: $v_1 = r_1 \cdot \omega_1$, $v_1 = v \cdot (1 + k) - k \cdot v_{01}$, kde k je součinitel rázu.

$$v_2 = r_2 \cdot \omega_2, \quad v_2 = v \cdot (1 + k) - k \cdot v_{02},$$

Ztráta pohybové energie E_z obou těles – nedokonale pružných i dokonale pružných – se vypočítá z příslušných vztahů pro přímý centrální ráz. Do rovnic je však nutno dosazovat redukované (ne skutečné) hmotnosti.

Pro skutečná (nedokonale pružná) tělesa, kde $k < 1$, platí

$$E_z = \frac{1 - k^2}{2} \cdot \frac{m_{1red} \cdot m_{2red}}{m_{1red} + m_{2red}} \cdot (v_{01} - v_{02})^2,$$

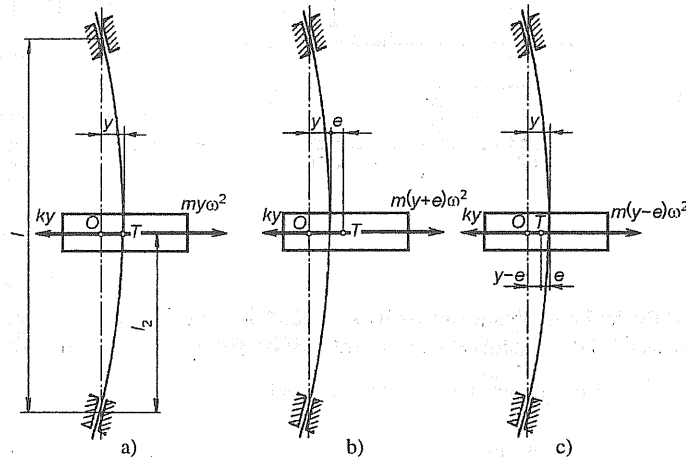
pro tělesa dokonale pružná, kde $k = 0$,

$$E_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_{1red} \cdot m_{2red}}{m_{1red} + m_{2red}} \cdot (v_{01} - v_{02})^2.$$

5 KRITICKÉ OTÁČKY

U hřídelů nastává tzv. *ohybové kmitání*, působí-li periodicky proměnlivé síly kolmo k ose hřídele. Rezonance vzniká, jestliže se perioda vlastního kmitání hřídele shoduje s periodou některé proměnlivé síly.

Svislý hřídel s jedním kotoučem (hmotnosti m) umístěným uprostřed mezi podporami má těžiště na ose hřídele. Otáčeli-li se hřídel s kotoučem (úhlovou rychlostí ω), vzniká odstředivá síla F_C , která hřídel ohýbá a způsobuje jeho kmitání. Tím se těžiště kotouče (T) vzdálí od osy otáčení o průhyb y (obr. 86a).



Obr. 86. Závislost průhybu hřídele účinkem odstředivé síly na poloze těžiště kotouče: a) těžiště leží na ose hřídele, b) v důsledku nedokonalého vyvážení leží těžiště ve vzdálenosti e od osy hřídele, c) těžiště leží mezi ohybovou čarou a osou otáčení (úhlová rychlost je větší než kritická úhlová rychlost)

Roste-li počet otáček, zvětšuje se i odstředivá síla, a tím i průhyb hřídele. Kritickou úhlovou rychlost určíme z rovnosti sil, které působí na kotouč. Je to odstředivá síla, snažící se hřídel prohnout, a pružná síla hřídele, která tomuto průhybu brání. Bude tedy (k_s je tzv. konstanta tuhosti hřídele):

$$F_C - F_{p \text{ hř}} = 0, \quad m \cdot y \cdot \omega_k^2 - k_s y = 0,$$

a odtud určíme *kritickou úhlovou rychlost*:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k_s}{m}}.$$

Konstanta tuhosti hřídele k_s je závislá na uspořádání hřídele a pro jednoduchá uspořádání je spolu s ω_k uvedena v tab. 3. Je-li y_1 jednotkový průhyb, pak pro $F = 1 \text{ N}$ je $k_s = 1$.

V nauce o pružnosti a pevnosti byl pro největší průhyb nosníku, který vznikl vlastní tíhou kotouče se zatěžující silou F uprostřed nosníku, odvozen tento vztah:

$$y_{st} = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J},$$

kde l je vzdálenost podpor (ložisek),
 E – modul pružnosti v tahu,
 J – kvadratický moment průřezu.

Zatěžující silou je vlastní tíha kotouče G o hmotnosti m , tedy největší průhyb y_{st} vzniklý vlastní tíhou kotouče

$$y_{st} = \frac{G \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J} = \frac{m \cdot g}{48 \cdot E \cdot J} = \frac{m \cdot g}{k_s}, \quad k_s = \frac{48 \cdot E \cdot J}{l^3}.$$

g je gravitační zrychlení.

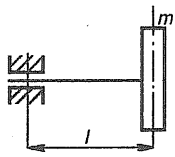
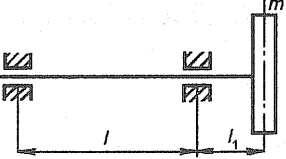
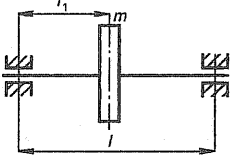
Úpravou dostaneme pro kritickou úhlovou rychlost ω_k tento vztah:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k_s \cdot g}{m \cdot g}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{m \cdot g}{k_s}}} = \sqrt{\frac{g}{y_{st}}}$$

Kritické otáčky:

$$n_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{y_{st}}}$$

5 Kritické otáčky

	Kritická úhlová rychlost ω_k	Konstanta tuhosti hřídele k_s
I. Kotouč je ve vetknutém otočném uložení 	$\omega_k = \sqrt{\frac{3E \cdot J}{m \cdot l^3}}$	$k_s = \frac{3E \cdot J}{l^3}$
II. Kotouč je uložen vně ložisek 	$\omega_k = \sqrt{\frac{3E \cdot J}{m \cdot (l + l_1) \cdot l_1^2}}$	$k_s = \frac{3E \cdot J}{(l + l_1) \cdot l_1^2}$
III. Kotouč je uložen mezi ložisky 	$\omega_k = \sqrt{\frac{3E \cdot J \cdot l}{m \cdot (l - l_1)^2 \cdot l_1^2}}$	$k_s = \frac{3E \cdot J \cdot l}{(l - l_1)^2 \cdot l_1^2}$

Tab. 3

Je třeba předpokládat, že v důsledku nepřesnosti výroby kotouče a jeho nedokonalého vyvážení neleží těžiště kotouče přesně v ose hřídele, ale ve vzdálenosti e (i když malé) od této osy (obr. 86b). Pak pro rovnováhu odstředivé a pružné síly platí:

$$m \cdot (y + e) \cdot \omega^2 - k_s y = 0, \quad m \cdot y \cdot \omega^2 + m \cdot e \cdot \omega^2 - k_s y = 0$$

a odtud určíme průhyb hřídele:
$$y = \frac{e \cdot m \cdot \omega^2}{k_s - m \cdot \omega^2}, \quad y = \frac{e}{\frac{k_s}{m \cdot \omega^2} - 1},$$

a protože $\frac{k_s}{m} = \omega_k^2$, dostaneme
$$y = \frac{e}{\frac{\omega_k^2}{\omega^2} - 1}.$$

V případě $\omega_k = \omega$ by rostl průhyb hřídele nade všechny meze, hřídel by se dostal do kritických otáček a došlo by k poruchám, nestabilitám, příp. ke zlomu hřídele. Proto se hřídel musí z klidu velmi rychle roztáčet na provozní otáčky, které jsou dostatečně menší nebo větší než kritické otáčky. Zvýší-li se otáčky nad kritické, zaujme hřídel novou rovnovážnou plohu, prohne se tak, že těžiště přejde mezi ohybovou čarou a osu otáčení (obr. 86c), čímž se výstřednost těžiště kotouče zmenší na $y - e$.

Hodnota y se zvětšuje s rostoucí úhlovou rychlostí ω (protože se zmenšuje velikost jmenovatele zlomku).

Podle normy musí provozní otáčky ležet v pásmu 20 % pod nebo nad kritickými otáčkami.

Je-li na hřídeli mezi ložisky naklínováno několik kotoučů (setrvačnick, řemenice), pak lze kritické otáčky n_k přibližně vypočítat také podle vzorce

$$n_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{y_{st}}},$$

kde za y_{st} dosadíme největší průhyb.

Přesný výpočet je složitější, neboť se musí brát v úvahu energetické ztráty, způsobené vnitřním tlumením (pružná hystereze materiálu) a vnějším tlumením (odpor prostředí), ale hlavně vliv gyroskopických momentů. Gyroskopický moment (M_G) vzniká tehdy, není-li kotouč uložen uprostřed mezi podporami pružného hřídele, což má při průhybu hřídele za následek odklonění roviny kotouče od roviny kolmé na osu ložisek. Gyroskopický moment zvyšuje hodnoty kritické úhlové rychlosti.

Příklad 1

Určete kritickou úhlovou rychlost a kritické otáčky letmo uchyceného kotouče na hřídeli (obr. 87), je-li dán průměr hřídele $d = 40$ mm, vzdálenost podpor $l = 450$ mm, vzdálenost kotouče od podpory $l_1 = 120$ mm, hmotnost kotouče $m = 34$ kg, modul pružnosti v tahu $E = 2,2 \cdot 10^{11}$ Pa.

Řešení:

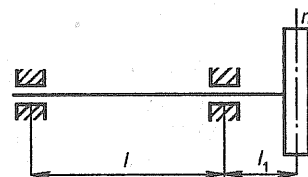
Jedná se o případ II tab. 3, takže
$$\omega_k = \sqrt{\frac{3E \cdot J}{m \cdot (l + l_1) \cdot l_1^2}},$$

5 Kritické otáčky

podle teorie pevnosti a pružnosti kvadratický moment průřezu $J = \frac{\pi d^4}{64}$, $J = \frac{3,14 \cdot 0,04^4}{64} \text{ m}^4 = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$,

takže kritická úhlová rychlost $\omega_k = \sqrt{\frac{3 \cdot 2,2 \cdot 10^{11} \cdot 1,25 \cdot 10^{-9}}{34 \cdot (0,45 + 0,12) \cdot 0,12^2}} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 54,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Kritické otáčky $n_k = \frac{\omega_k}{2\pi}$, $n_k = \frac{54,5}{6,28} \text{ s}^{-1} \doteq 8,67 \text{ s}^{-1}$.



Obr. 87

Příklad 2

Hřídel s několika kotouči umístěnými mezi ložisky koná 46 provozních otáček za sekundu. Jak velký je největší průhyb y , jestliže kritické otáčky jsou o 20 % větší než provozní otáčky.

Řešení:

Kritické otáčky $n_k = 1,2 n$,

$$n_k = 1,2 \cdot 46 \text{ s}^{-1} = 55,2 \text{ s}^{-1}$$

Platí $n_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{y_{\max}}}$, tedy $y_{\max} = \frac{g}{4\pi^2 \cdot n_k^2}$,

$$y_{\max} = \frac{9,81}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 55,2^2} \text{ m} = 8,17 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,08 \text{ mm}$$

Úloha

- Určete kritickou úhlovou rychlost a kritické otáčky hřídele o průměru $d = 40 \text{ mm}$, je-li na hřídeli naklínována řemenice o hmotnosti $m = 10 \text{ kg}$. Řemenice je naklínována uprostřed mezi ložisky. Vzdálenost ložisek $l = 600 \text{ mm}$. Volte $E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.
- Vypočítejte kritické otáčky hřídele, jehož největší průhyb způsobený hmotností kotoučů $y_{\max} = 0,15 \text{ mm}$.
(Výsledky: 1. $\omega_k \doteq 78,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $n_k = 12,46 \text{ s}^{-1}$; 2. $n_k \doteq 40,72 \text{ s}^{-1}$.)

Kontrolní otázky

- Vysvětlete pojem kritických otáček.
- Zdůvodněte, proč hřídel v provozu nesmí běžet v kritických otáčkách.
- V jakém otáčkovém pásmu smí běžet provozní otáčky a proč?

LITERATURA

- [1] JULINA, M – ŘEŘÁBEK, A. *Mechanika. Statika*. Praha : Scientia 2000. ISBN 80-7183-188-3.
- [2] JULINA, M – VENCLÍK, V. *Mechanika. Kinematika*. Praha : Scientia 2000. ISBN 80-7183-219-7.
- [3] KRÍŽ, R. - VÁVRA, P. *Strojírenská příručka*, sv. 1 – 8. Praha : Scientia, 1992 – 1998.
- [4] LEINVEBER, J. – ŘASA, J. – VÁVRA, P. *Strojnické tabulky*. Praha : Scientia 1999. ISBN 80-7183-164-6.
- [5] MIČKAL, K. *Sbírka úloh z technické mechaniky*. Praha : Informatorium 1998.
- [6] MRŇÁK, L. – DRDLA, A. *Mechanika. Pružnost a pevnost*. Praha : SNTL 1977.
- [7] SLAVÍK, J. *Mechanika III*. Praha : SNTL 1980.
- [8] ŠREJTR, J.: *Technická mechanika. Dynamika*. Praha : SNTL 1954.
- [9] TUREK, J.: *Zbierka úloh z dynamiky*. Prešov : KPU 1972.
- [10] VACHEK, J. *Fyzika*. Praha : SPN 1985.

REJSTŘÍK

Bod hmotný 9

Čas 10

Deformace 59

– maximální 59

– zbytková 59

délka kyvadla 23

diagram $v-t$, $F-t$, $P-t$ 34

dynamika 9

– bodu 13

– těles 29

– otáčivého pohybu 21

Energie mechanická 20

– napjatosti 20

– pohybová 20

– polohová 20

– posuvná 35

– rotační 47

Hřídel klikový 55

hustota energie 21

hybnost 10

Impulz momentu 50

– síly 10

Kmitání ohybové 65

konstanta tuhosti hřídele 65

kyvadlo fyzické 42

– matematické 23

– sekundové 24

Mechanismus klikový 56

modul průřezu 46

– pružnosti 65

moment gyroskopický 66

– hybnosti 50

– krouticí 14

– ohybový 46

– průřezu kvadratický 65

– setrvačný 37

– zrychlujících sil 49

Napětí maximální 43

– minimální 23

– v ohybu 46

– v tahu 22

nevývažek 53

Objem zdvihový 15

odpor řezný 16

– vozidla celkový 33

otáčky 13

– kritické 65

Perioda expanze 59

– komprese 59

pohyb dopravního prostředku 33

– kývavý 23

– po nakloněné rovině 30

– tělesa vázaný 30

plocha průřezu 22

poloměr 13

– křivosti 20

– setrvačnosti 37

práce celková 14

– deformační 20

– , grafické znázornění 15

– mechanické síly proměnné velikosti 14

– mechanické síly stálé velikosti 13

– na klíce 14

– na pružině 14

– pístového motoru 14

– užitečná 18

– ztrátová 18

pravítka vyvažovací 53

princip d' Alembertův 29

průhyb 65

průměr 39

– setrvačnosti 37

průtok objemový 17

předpětí 14

příkon 18

přírůstek hybnosti 12

Ráz 59

– centrální 60

– excentrický 64

– ideálně plastický 60

– ideálně pružný 61

– polopružný 61

– šikmý 62

reakce 46

rovnice pohybová 9

rychlost 10

– koncová 10

– obvodová 12

– počáteční 10

– společná 61

– úhlová 17

Síla 10

– dostředivá 12

– normálová 9

síla odstředivá 12
– k ose rovnoběžné s osou otáčení 45
– tyče 45
– tělesa 44
– setrvačná 29
– střední 14
– , tečná složka 24
– třecí 9
– zrychlující 9
snímače chvění 56
součinitel odporu 33
– rázu 59
– smykového tření 9
– tvarový 33
– valení 33
stoupání 52

Teorie rázu 60

těžiště 9

tíha 9

tlak střední 15

trajektorie 47

tření smykové 9

Účinnost 18

– celková 19

– vodních strojů 19

úhel třecí 24

– výkyvu 23

Vázaný pohyb tělesa 30

věta Steinerova 38

– 1. impulzová 11

– 2. impulzová 56

Vyvažování 53

– dynamické 54

– indikační 55

– klikových hřídelů 56

– – mechanismů 57

– kompenzační 55

– rezonanční 55

– statické 53

výkon 16

– , jednotky 17

– okamžitý 17

– vodních strojů 17

– užitečný

– ztrátový 18

Zákon pohybový Newtonův 9

– zachování energie 26

zjišťování momentu setrvačnosti kýváním 43

– – – pokusem 42

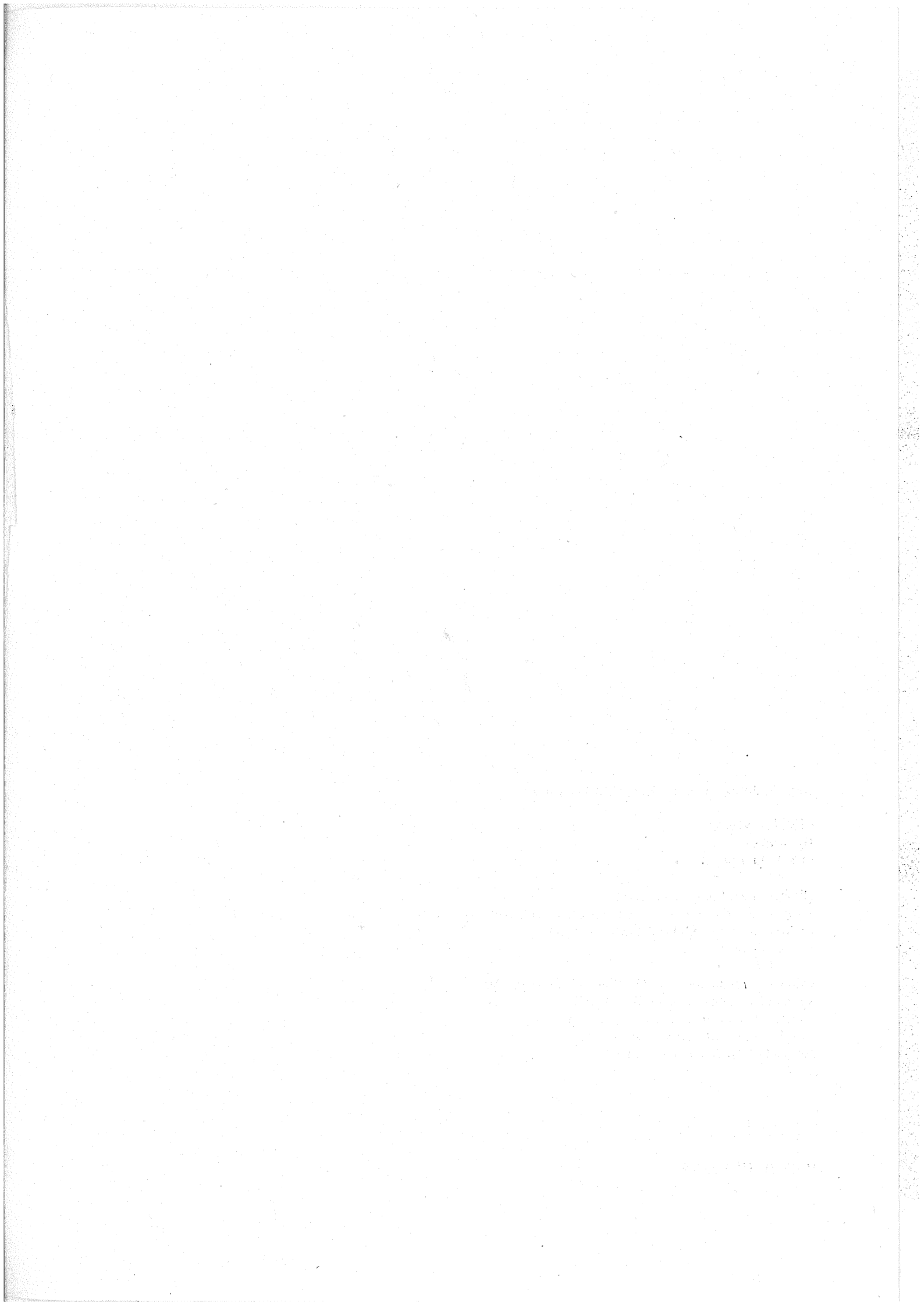
zrychlení 9

– dostředivé (normálové) 12

– tečné 56

– tíhové 17

– úhlové 50



Ing. Vladimír Venclík - Ing. Miloslav Julina

**MECHANIKA
Dynamika
pro školu a praxi**

Obálka Miloš Lang, akad. malíř
Vydala Scientia, spol. s r. o., pedagogické nakladatelství,
Radimova 37/50, 169 00 Praha 6 – Břevnov,
v roce 2001

1. vydání

Odpovědná redaktorka RNDr. Blanka Plášilová, CSc.

Technická redaktorka Eva Kovaříková

Sazba Scientia, spol. s r. o.

Tisk Příbramská tiskárna, spol. s r. o.,

Nádražní 190, 261 01 Příbram

777 5642

ISBN 80-7183-235-9