

Ing. Oldřich Šámal

TECHNICKÁ MECHANIKA
KINEMATIKA

PRAHA 2018

®
INFOR~
MATO~
RIUM

Učebnice je určena především studentům středních průmyslových škol strojnických, lze ji však využít i pro výuku v dalších maturitních oborech se strojním zaměřením.
Zabývá se kinematikou přímočarého a křivočarého pohybu hmotných bodů i těles. U složených pohybů řeší pomocí základního nebo Coriolisova rozkladu rychlosti a zrychlení jednotlivých členů mechanismů. U převodů určuje převodový poměr mezi jednotlivými členy u různých systémů.
Pro lepší pochopení teorie je zařazeno 80 řešených příkladů a také neřešené úlohy pro domácí přípravu studentů.

Za podporu vydání této učebnice děkujeme

- firmě Zima
www.zima-engineering.cz



Všechna práva vyhrazena. Tato kniha ani její části nesmějí být rozmnožovány tiskem, fotokopii, elektronickými datovými soubory ani jiným způsobem bez předchozího písemného souhlasu vydavatele.

Lektoroval: Ing. Jan Chlebný

© Ing. Oldřich Šámal, 2018

© INFORMATORIUM, spol. s r. o., 2018

ISBN 978-80-7333-134-4

PŘEHLED VELIČIN A JEJICH JEDNOTEK

Název veličiny	Značka	Jednotka
amplituda	r	mm
čas, doba	t	s
délka	l	m
délka kliky	r	mm
délka ojnice	l	mm
délka dopadu při šikmém a vodorovném vrhu	x_D	m
doba dopadu	t_D	s
doba výstupu	t_v	s
dráha	s	m
dráha absolutní	s_a	m
dráha pístu	x	m, mm
dráha relativní	s_r	m
dráha ve svislém směru	s_y	m
dráha ve vodorovném směru	s_x	m
dráha úhlová	φ	rad
frekvence	f	s^{-1}
frekvence úhlová	ω	$\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$
hloubka pádu	h	m
hmotnost	m	kg
kmitočet	f	Hz
otáčky	n	s^{-1}, min^{-1}
perioda	T	s
počet obecných dvojic	o	1
počet posuvných dvojic	p	1
počet rotačních dvojic	r	1
počet stupňů volnosti	i	1

Název veličiny	Značka	Jednotka
počet zubů	z	1
poloměr	r, R	m, mm
poměr klikový	$\lambda = r/l$	1
průměr	d, D	m, mm
převodový poměr	i	1
rychlost	v	m.s^{-1} , m.min^{-1} , km.h^{-1}
rychlost absolutní	c	m.s^{-1}
rychlost pístu	c_p	m.s^{-1}
rychlost relativní	w	m.s^{-1}
rychlost ve svislém směru	v_y	m.s^{-1}
rychlost ve vodorovném směru	v_x	m.s^{-1}
rychlost úhlová	ω	rad.s^{-1}
rychlost unášivá	u	m.s^{-1}
úhel	φ	rad
zrychlení	a	m.s^{-2}
zrychlení Coriolisovo	a_{cor}	m.s^{-2}
zrychlení gravitační	g	m.s^{-2}
zrychlení normálové (dostředivé)	a_n	m.s^{-2}
zrychlení tečné	a_t	m.s^{-2}
zrychlení úhlové	ε	rad.s^{-2}

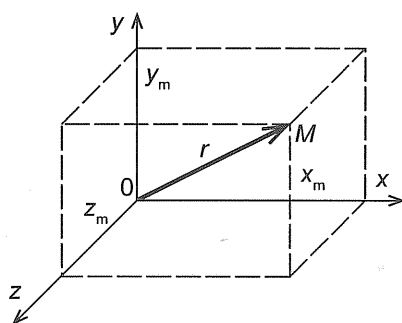
1 ÚVOD DO KINEMATIKY

Mechanika je součástí fyziky, vědy, která zkoumá základní, nejobyčejnější zákony tohoto světa. Velmi důležitou součástí mechaniky tuhých těles je **kinematika** (z řeckého *kineó*, tj. pohybují se). Při návrhu strojů konstruktér obvykle kinematikou začíná, navrhuje skladbu a pohyby mechanismů a teprve v dalším pořadí určuje působící síly. Naposledy pevnostně řeší velikost jednotlivých součástí a jejich průřezů.

Kinematika se zabývá pohybem těles bez zřetele k jeho příčinám, to znamená, že neuvažuje působící síly. To řeší až dynamika. Abychom mohli pohyb těles popsat, potřebujeme jednoznačně určit jejich polohu v prostoru vzhledem k jinému tělesu. Takové těleso pak nazýváme vztažnou soustavou.

Pohyb těles je vždy relativní. Neexistuje absolutní pohyb. Zvláštním případem je klid tělesa, při kterém se poloha tělesa vůči vztažné soustavě nemění.

Polohu tělesa určujeme pomocí souřadnic ve zvoleném souřadnicovém systému. Nejčastěji budeme používat tzv. kartézské pravoúhlé souřadnice, ve kterých je poloha bodu určena třemi souřadnicemi x , y a z . Pro tyto souřadnice platí, že osy jsou vzájemně kolmé a jednotkové úseky zvolené na osách x , y a z jsou navzájem stejné (obr. 1.1).



Obr. 1.1

Základními pojmy v kinematice jsou:

- prostor,
- pohyb,
- hmota,
- čas,
- dráha,
- rychlost
- a zrychlení.

Základem všech měření je měření délky, času a hmotnosti.

Hmotou rozumíme vše co je kolem nás. Pozorujeme ji svými smysly nebo přístroji. Existuje ve formě látky nebo pole. Základní vlastností hmoty (látky) je hmotnost, ta se

projevuje tíží a setrvačností. Jednotkou hmotnosti je jeden kilogram (1 kg). Je to hmotnost platinoiridiového válcového etalonu uloženého v Mezinárodním úřadě pro míry a váhy u Paříže.

Jednotkou délky je v soustavě SI jeden metr (1 m). Větší jednotkou je 1 km = 1 000 m. Ve strojírenství na výkresech pracujeme s jednotkou 1 000krát menší než 1 m, tj. 1 mm.

V roce 1791 francouzští inženýři definovali 1 metr jako desetimiliontou část kvadrantu zemského poledníku. V současnosti je 1 metr definován jako délka dráhy, kterou světelný paprsek urazí ve vakuu za 1/299 792 458 s.

Další základní veličinou je čas. Mění se vždy jen jedním směrem, dopředu. V klasické newtonské mechanice plyne čas v různých vztažných soustavách stejně rychle. To ale neplatí v relativistické mechanice při rychlostech blízkých rychlosti světla. V soustavě SI je základní jednotkou jedna sekunda (1 s). O čase má význam hovořit vždy pouze v souvislosti s hmotou a pohybem. Čas zjišťujeme nepřímou podle přírodních dějů, které se pravidelně opakují, tj. pohyb Země kolem Slunce, rotace Země kolem vlastní osy apod. Dříve byla jedna sekunda definována jako určitý díl tzv. tropického roku.

Současná definice trvání času: sekunda je doba trvání 9 192 631 770 period záření, které odpovídá přechodu mezi dvěma hladinami jemné struktury základního stavu atomu cesia 133. Čas je to, co měří hodiny. Nejpřesnější jsou atomové hodiny, které měří s přesností 1 s za 30 milionů let.

Poznámka: V důsledku zmenšování obrázků oproti originální předloze u většiny z nich nesouhlasí uváděná měřítka délek, rychlostí a zrychlení se skutečnými měřítky v obrázcích.

Kontrolní otázky

1. Čím se zabývá kinematika?
2. Definujte mechanický pohyb.
3. Jak určujeme polohu tělesa?
4. Které jsou základní pojmy v kinematice?
5. Co je charakteristické pro kartézské souřadnice?
6. Vysvětlete rozdíl mezi pojmy hmota a hmotnost.
7. Jak je určena jednotka hmotnosti 1 kg?
8. Jak je definována jednotka délky?
9. V jakých souvislostech hovoříme o čase?
10. Jaký je rozdíl v měření času v klasické mechanice a relativistické mechanice?

2 KINEMATIKA BODU

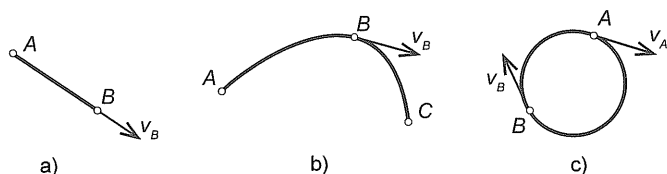
2.1 HMOTNÝ BOD, ZÁKLADNÍ ÚLOHA KINEMATIKY

Hmotný bod je myšlený, idealizovaný útvar, jehož rozměr vzhledem k dráze pohybu je zanedbatelný a jehož hmotnost není nulová. Takové nahrazení tělesa je v kinematice možné, jestliže tvar a rozměry tělesa neovlivní průběh pohybu. Základním úkolem kinematiky bodu je zjistit, jak se při pohybu mění jeho souřadnice s časem.

2.2. ROZDĚLENÍ POHYBŮ BODU

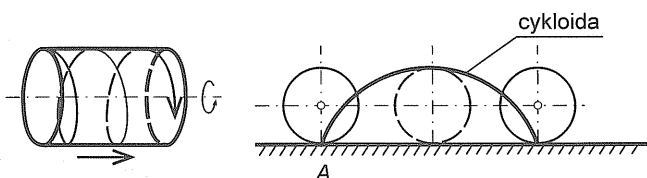
Podle druhu dráhy dělíme pohyb bodu na **přímocharý** a **křivočarý** (obr. 2.1a, b). Křivočarý pohyb je v přírodě častější. Zvláštním případem křivočarého pohybu je pohyb kruhový (obr. 2.1c). U křivočarého pohybu má rychlost pohybu směr tečny k dané křivce. Vedle pohybu v rovině existuje také pohyb prostorový.

Trajektorie pohybu je myšlená spojitá křivka. Je to množina všech poloh bodu při pohybu.



Obr. 2.1

Několik jednoduchých pohybů můžeme sloučit, vzniká tak pohyb složený. Příkladem je např. šroubový pohyb, který vzniká při rotaci bodu kolem osy za současného posunu podél této osy (obr. 2.2). Při valivém pohybu válce po rovině bod válce A koná cykloidální pohyb (obr. 2.3). Válec koná složený pohyb, rotační a posuvný.



Obr. 2.2

Obr. 2.3

2.3 DRUHY PŘÍMOČARÉHO POHYBU PODLE RYCHLOSTI A ZRYCHLENÍ POHYBU

2.3.1 Rychlost přímočarého pohybu

Rychlost pohybu je odvozená fyzikální veličina, která popisuje rychlost změny polohy pohybujícího se bodu. Je to přímá dráha, kterou bod urazí za 1 sekundu (za 1 hodinu). Označujeme ji písmenem v , u složených pohybů také u , w a c . Rychlost je obdobně jako síla ve staticce vektor.

Rozlišujeme rychlost konstantní, např. rychlost světla ve vakuu nebo rychlost zvuku ve vzduchu při konstantní teplotě. **Průměrnou rychlost** zjišťujeme, jestliže se rychlost na určité vzdálenosti mění, např. při jízdě na kole, automobilem, vlakem či letadlem. O **okamžité rychlosti** mluvíme při nerovnoměrném pohybu. Sprinter v běhu na 100 m má v každém okamžiku jinou rychlost. Okamžitou rychlost měříme u automobilů přibližně tachometrem, u letadel Pitotovou trubicí.

Jestliže se bod pohybuje rovnoměrně přímočaře **konstantní rychlostí**, dráha je přímá a přibývá jí rovnoměrně s časem, potom velikost rychlosti se vypočítá podle vztahu:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{konst.} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}). \quad (2.1)$$

V tomto vztahu jsou: s_2 a s_1 (m) dráhy, které bod urazí v časech t_2 , případně t_1 .

Jestliže v čase $t_1 = 0$ je také dráha s_1 nulová, potom výraz (2.1) se zjednoduší:

$$v = \frac{s}{t} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}). \quad (2.1a)$$

Z tohoto vztahu vypočítáme velikost dráhy s :

$$s = v \cdot t. \quad (2.1b)$$

Jestliže v čase $t_0 = 0$ vykonal bod již určitou dráhu, potom pro dráhu platí vztah:

$$s = s_0 + v \cdot t. \quad (2.2)$$

Při jízdě dopravního prostředku obvykle zjišťujeme, jakou vzdálenost tento prostředek ujel např. za 1 hodinu. Počítáme **průměrnou rychlost** \bar{v} podle vztahu

$$\bar{v} = \frac{\text{celková dráha}}{\text{celkový čas}} = \frac{s}{t} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ nebo } \text{km} \cdot \text{h}^{-1}). \quad (2.3)$$

Proměnlivost rychlosti sledujme u pohybu sprintera světové třídy v běhu na 100 m. Předpokládejme, že tuto trať uběhne právě za 10 s. Jeho průměrná rychlost je $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Tabulka 2.1. Běh sprintera světové třídy na 100 m

Čas t (s)	0	2	4	6	8	10
Dráha s (m)	0	12	32	54	78	100
Změna dráhy Δs (m)		12	20	22	24	22
Průměrné rychlosti v ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)		6	10	11	12	11

Rychlosti uvedené v posledním řádku jsou rychlosti průměrné během dvousekundového intervalu. Pokud bychom časové intervaly zkrátali např. na 0,5 s, opět bychom získali průměrné rychlosti v tomto časovém intervalu. Okamžitě rychlosti získáme teprve v limitním případě, když časový interval Δt se bude blížit nule. Na zpomaleném záběru běhu, sprintera bychom rozpoznali nerovnoměrnost běhu, a tedy i různou okamžitou rychlost v každé chvíli.

Okamžitá rychlost je dána vztahem:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (2.4)$$

Okamžitá rychlost je derivací dráhy podle času.

• Převod jednotek

Základní jednotku rychlosti $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ často převádíme na jednotku $1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a naopak.

Příklad 1.

Rychlost $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ vyjádříme v $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$:

$$\begin{aligned} v &= 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \cdot 3\,600 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{1 \cdot 3\,600}{1\,000} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \\ &= 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}. \end{aligned}$$

Rychlost $1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ vyjádříme v $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$:

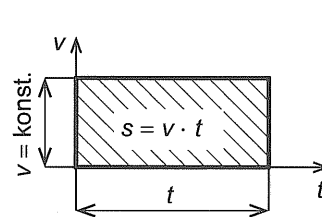
$$\begin{aligned} v &= 1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{1 \cdot 1\,000 \text{ m}}{\text{h}} = \frac{1 \cdot 1\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \frac{1 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \\ &= 0,278 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

V tabulce 2.1 jsou uvedeny uběhlé dráhy na konci dvousekundových časových intervalů a dále průměrné rychlosti v tomto intervalu. Z tabulky vyplývá, že nejmenší rychlost je v prvních dvou sekundách po startu, kdy závodník uběhne pouze 12 m a má průměrnou rychlost $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Potom se jeho rychlost zvyšuje. Maxima dosahuje mezi 6. a 8. sekundou. Před cílem sprinter – jistý vítěz, „na cílové šachovnici vypnul“, zpomalil.

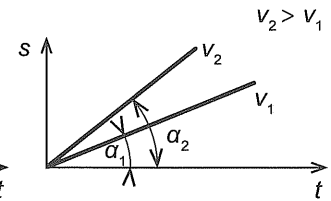
• Grafické znázornění rovnoměrného přímočarého pohybu ($v = \text{konst.}$)

Průběh pohybu obvykle znázorňujeme v souřadnicích $v-t$ nebo $s-t$. V diagramu $v-t$ plocha pod úsečkou vyjadřuje velikost dráhy s .

Na obr. 2.5 tangenta úhlu α udává velikost rychlosti v .



Obr. 2.4



Obr. 2.5

Příklad 2.

Radiová vlna vyslaná radarem k letadlu se na displej radaru vrátí za 0,8 ms. Určete vzdálenost letadla od řídicí věže. Uvažujte rychlost radiové vlny $v = 300\,000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Řešení

Z rovnice (2.1a) určíme vzdálenost radaru od letadla:

$$\begin{aligned} 2s &= v \cdot t \Rightarrow s = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}}{2} = \\ &= 1,2 \cdot 10^5 \text{ m} = 120 \text{ km}. \end{aligned}$$

Příklad 3.

Vlak míjí železniční trať mezi 83. a 86. kilometrovíčkem za čas $t = 105 \text{ s}$. Určete průměrnou rychlost vlaku.

Řešení

Vycházíme z rovnice (2.2):

$$s = s_0 + \bar{v} \cdot t \Rightarrow \bar{v} = \frac{s - s_0}{t} = \frac{(86 - 83) \cdot 10^3 \text{ m}}{105 \text{ s}} = 28,57 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 102,9 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Další dva příklady na výpočet průměrné rychlosti se zdají být podobné. Způsob výpočtu je však rozdílný.

Příklad 4.

Vypočítejte průměrnou rychlost motocyklu, který za první hodinu ujede 60 km a druhou hodinu jede průměrnou rychlostí 30 km.h⁻¹.

Řešení

Podle zadání jsou časy $t_1 = t_2$. Průměrná rychlost v se vypočítá podle vztahu:

$$\bar{v} = \frac{\text{celková dráha}}{\text{celkový čas}} = \frac{v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{(60 + 30) \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}{2} = 45 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Příklad 5.

Určete průměrnou rychlost motocyklu, který se pohyboval na trati mezi místy AB rychlostí 60 km.h⁻¹ a na cestě zpět rychlostí 30 km.h⁻¹.

Řešení

Celková délka trati je 2 s. Čas $t_1 = \frac{s}{v_1}$, čas $t_2 = \frac{s}{v_2}$.

Průměrná rychlost \bar{v} :

$$\bar{v} = \frac{\text{celková dráha}}{\text{celkový čas}} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 60}{30 + 60} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Příklad 6.

Při závodech formule 1 vjely dva vozy do $l = 1\,600$ m dlouhé cílové rovinky s časovým rozdílem 0,3 s. Předpokládejme, že oba automobily projely cílovou rovinku rovnoměrným přímočarým pohybem. První vůz jel rychlostí 302,4 km.h⁻¹, druhý rychlostí 307,8 km.h⁻¹.

Za jaký čas se v cílové rovině oba vozy potkají a v jaké vzdálenosti od cíle?

Řešení

Rychlosti převedeme z km.h⁻¹ na m.s⁻¹:

$$v_1 = 302,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{302,4}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 84 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_2 = 307,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{307,8}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 85,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Označme ujeté dráhy v cílové rovině s_1 a s_2 :

$$s_1 = v_1 \cdot t, \quad s_2 = v_2 \cdot (t - 0,3).$$

V okamžiku dojetí platí $s_1 = s_2$:

$$v_1 \cdot t = v_2 \cdot (t - 0,3) \Rightarrow t = \frac{0,3 v_2}{v_2 - v_1} = \frac{0,3 \text{ s} \cdot 85,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{(85,5 - 84) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 17,1 \text{ s}.$$

Ujetá dráha s v cílové rovině:

$$s = v_1 \cdot t = 84 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 17,1 \text{ s} = 1\,436,4 \text{ m}.$$

Po vzájemném dojetí automobilů zbývá do cíle vzdálenost $l - s = 1\,600 \text{ m} - 1\,436,4 \text{ m} = 163,6 \text{ m}$.

Příklad 7.

Vzdálenost mezi Pardubicemi a Hradcem Králové je $s = 20$ km. V 16 hodin vyjel z Pardubic cyklista průměrnou rychlostí $\bar{v}_1 = 25,2$ km.h⁻¹ směrem k Hradci Králové. Po patnácti minutách vyjel z Hradce Králové opačným směrem automobil průměrnou rychlostí $\bar{v}_2 = 61,2$ km.h⁻¹.

Za jaký čas se spolu setkají a v jaké vzdálenosti od Pardubic?

A) Početní řešení

Cyklista jede t sekund, doba jízdy automobilisty je $(t - 900)$ s.

Převod rychlostí:

$$\bar{v}_1 = \frac{25,2}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\bar{v}_2 = \frac{61,2}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pro dráhy pohybu platí vztah:

$$s = s_1 + s_2; \quad s_1 = \bar{v}_1 \cdot t, \quad s_2 = \bar{v}_2 \cdot (t - 900),$$

$$s = \bar{v}_1 \cdot t + \bar{v}_2 \cdot (t - 900) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{s + 900 \bar{v}_2}{\bar{v}_1 + \bar{v}_2} = \frac{20\,000 \text{ m} + 900 \text{ s} \cdot 17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{(7 + 17) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} =$$

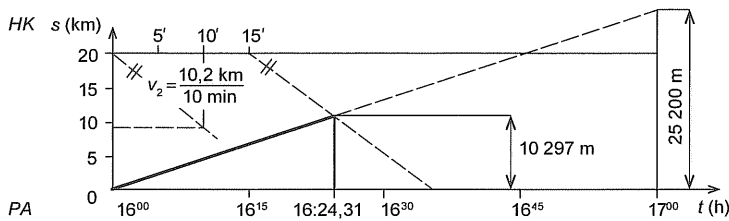
$$= 1\,471 \text{ s} = 24 \text{ min } 31 \text{ s}.$$

$$s_1 = \bar{v}_1 \cdot t = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 1\,471 \text{ s} = 10\,297 \text{ m}.$$

Cyklista s automobilem se potkají za 24 minut 31 sekund ve vzdálenosti 10,297 km od Pardubic.

B) Grafické řešení (obr. 2.6)

V levém horním rohu vytvoříme pomocnou konstrukci. Automobil ujede za 10 minut právě 10,2 km. Sestrojíme v této konstrukci úhlopříčku, se kterou vedeme rovnoběžku v čase 15 minut.



Obr. 2.6

Příklad 8.

Malý motocykl vyjíždí v 15 hodin z místa A směrem k místu B průměrnou rychlostí $v_1 = 36 \text{ km.h}^{-1}$ a dále pokračuje k místu C. V 15:15 vyjíždí z místa B cyklista také směrem k místu C průměrnou rychlostí $v_2 = 24 \text{ km.h}^{-1}$. Vzdálenost mezi místy AB je $s_{AB} = 24 \text{ km}$.

Kdy a kde dohoní malý motocykl cyklistu? Řešte početně i graficky.

A) Početní řešení

Malý motocykl dohoní cyklistu v čase t po projetí dráhy:

$$s_1 = v_1 \cdot t.$$

Cyklista jedoucí stejným směrem ujede dráhu:

$$s_2 = v_2(t - 0,25).$$

Dále platí:

$$s_1 = s_{AB} + s_2,$$

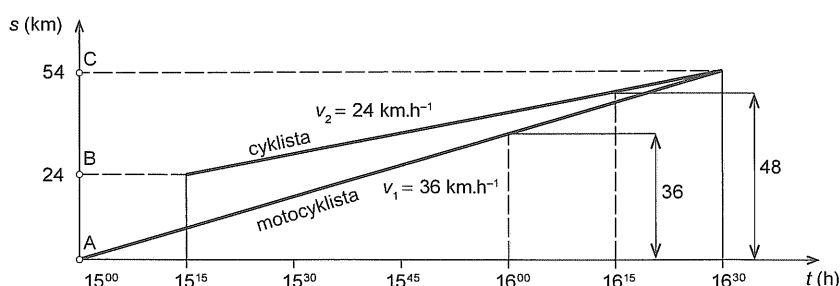
$$v_1 \cdot t = s_{AB} + v_2(t - 0,25).$$

Z této rovnice vyjádříme hledaný čas t :

$$t = \frac{s_{AB} - 0,25 v_2}{v_1 - v_2} = \frac{24 \text{ km} - 0,25 \text{ h} \cdot 24 \text{ km.h}^{-1}}{(36 - 24) \text{ km.h}^{-1}} = 1,5 \text{ h}.$$

$$s_2 = v_2(t - 0,25) = 24 \text{ km.h}^{-1} (1,5 - 0,25) \text{ h} = 30 \text{ km}.$$

Malý motocykl dojde cyklistu ve vzdálenosti 30 km od místa B za 1,5 hodiny.

B) Grafické řešení (obr. 2.7)

Obr. 2.7

Úlohy

- ① Vlak jede rychlostí $v = 108 \text{ km.h}^{-1}$. Jak velká je to rychlost v m.s^{-1} ?
($v = 30 \text{ m.s}^{-1}$)
- ② Sprinter běží trať 200 m za 20 s. Jaká je jeho rychlost v km.h^{-1} ?
($v = 36 \text{ km.h}^{-1}$)
- ③ Automobil ujede vzdálenost 20 km za čas $t = 12$ minut. Jaká je jeho průměrná rychlost?
($v = 27,78 \text{ m.s}^{-1} = 100 \text{ km.h}^{-1}$)
- ④ Mostový jeřáb má pojezdovou dráhu dlouhou $s = 90 \text{ m}$. Jeho průměrná rychlost při pojezdu je $v = 1,5 \text{ m.s}^{-1}$. Za jak dlouho jeřáb projede celou pojezdovou dráhu?
($t = 60 \text{ s} = 1$ minuta)
- ⑤ Nákladní automobil jede z Brna do Olomouce, tj. 77 km. V první polovině **jízdní doby** jede rychlostí $v_1 = 56 \text{ km.h}^{-1}$, v druhé polovině **jízdní doby** rychlostí $v_2 = 89 \text{ km.h}^{-1}$. Na zpáteční cestě projede první polovinu **vzdálenosti** rychlostí $v_1 = 56 \text{ km.h}^{-1}$, v druhé polovině **vzdálenosti** rychlostí $v_2 = 89 \text{ km.h}^{-1}$. Jaká je průměrná rychlost na cestě z Brna do Olomouce a zpět?
($v = 70,57 \text{ km.h}^{-1}$)
- ⑥ Automobil jede po přímé silnici rychlostí 86 km.h^{-1} . Po ujetí 10,4 km mu dojde benzin a řidič pokračuje pěšky k benzinové pumpě vzdálené 2,4 km. Cestu tam ujede za 27 minut, cestu zpět k autu s plným kanystrem za 35 minut. Jaká je jeho průměrná rychlost od okamžiku výjezdu až po návrat od čerpací stanice?
($v = 13,17 \text{ km.h}^{-1}$)
- ⑦ Kýchnutí trvá asi 0,5 s. Jakou vzdálenost ujede za tuto dobu jezdec formule 1 v cílové rovině při rychlosti 288 km.h^{-1} ?
($s = 40 \text{ m}$)
- ⑧ Cyklista jede trať dlouhou 6 km. První kilometr jede do kopce rychlostí 10 km.h^{-1} . Další dva kilometry jede po rovině rychlostí 20 km.h^{-1} . Poslední tři kilometry jede z kopce rychlostí 30 km.h^{-1} .

Vypočítejte průměrnou rychlost cyklisty.

$$(v_{pr} = 20 \text{ km.h}^{-1}).$$

- 9) Automobil urazil třetinu své celkové dráhy s průměrnou rychlostí $v_1 = 100 \text{ km.h}^{-1}$. Zbývající dvě třetiny dráhy projížděl městem. Jakou průměrnou rychlostí se ve městě pohyboval, jestliže průměrná rychlost po celé trase činila $v_p = 50 \text{ km.h}^{-1}$?

$$(v_m = 40 \text{ km.h}^{-1}).$$

- 10) Automobil ujede dráhu 10 km za 10 minut. Ta se skládá z jízdy do kopce a z jízdy po rovině. Do svahu jede průměrnou rychlostí 54 km.h^{-1} , po rovině průměrnou rychlostí 72 km.h^{-1} . Jaká je délka stoupání s_1 a jak je dlouhá dráha po rovině s_2 ?

$$(s_1 = 6\,000 \text{ m}, s_2 = 4\,000 \text{ m})$$

- 11) Skupina závodníků soutěží v běhu na 1 000 m. První běžec má v cíli čas o 50 s lepší než poslední závodník. Průměrná rychlost vítěze je o 1 m.s^{-1} větší než rychlost posledního. Vypočítejte časy vítěze a posledního běžce a jejich průměrné rychlosti.

Návod: Napište vztahy pro oba časy a dále využijte skutečnosti, že rozdíl rychlostí je 1 m.s^{-1} . Navrhněte a vypočítejte kvadratickou rovnici.

$$(v_1 = 5 \text{ m.s}^{-1}, v_2 = 4 \text{ m.s}^{-1}, t_1 = 200 \text{ s}, t_2 = 250 \text{ s})$$

- 12) Automobil ujede vzdálenost 12 km o 5 minut rychleji než moped. Určete rychlost automobilu a mopedu. Navrhněte a vypočítejte kvadratickou rovnici.

$$(v_a = 48 \text{ km.h}^{-1}, v_m = 36 \text{ km.h}^{-1}).$$

- 13) Vzdálenost, kterou cyklista jel $1\frac{1}{6}$ hodiny, projel automobilista za $\frac{1}{3}$ hodiny. Za 5 minut ujel automobilista o $3\frac{3}{4}$ km více, než ujel za stejnou dobu cyklista. Jakou rychlostí jeli cyklista a automobilista?

$$(v_c = 18 \text{ km.h}^{-1}, v_a = 63 \text{ km.h}^{-1}).$$

2.3.2 Zrychlení přímočarého pohybu

V přírodě se většinou vyskytují pohyby nerovnoměrné. Rychlost se při tom mění. Zvětšuje-li se rychlost, hovoříme o pohybu zrychleném. Zmenšuje-li se rychlost, jde o pohyb zpomalený.

Nerovnoměrný pohyb je charakterizován fyzikální veličinou zrychlení, kterou poprvé popsal Galileo Galilei (1564 – 1642) při studiu volného pádu těles a pohybu na nakloněné rovině. Průměrné zrychlení je definováno jako podíl přírůstku rychlosti a přírůstku času:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \text{konst.} \quad (\text{m.s}^{-2}). \quad (2.5)$$

Okamžité zrychlení bychom získali za předpokladu, že přírůstek času Δt se blíží nule.

Potom výraz (2.5) můžeme přepsat do tvaru:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (\text{m.s}^{-2}). \quad (2.6)$$

Okamžité zrychlení se rovná derivaci rychlosti podle času.

V našem textu budeme nerovnoměrné pohyby idealizovat a dále počítat vždy jen se zrychlením průměrným, konstantním, $\bar{a} = \text{konst.}$

Poznámka: U dopravních prostředků se zrychlení se zvětšující rychlostí obvykle zmenšuje. Například osobní automobil Alfa Romeo 2.0 Turbo Q4 zrychluje z 0 na 100 km.h^{-1} za 5,8 s (průměrné zrychlení $4,78 \text{ m.s}^{-2}$), zatímco z rychlosti 100 km.h^{-1} na rychlost 200 km.h^{-1} za 22 s (průměrné zrychlení $1,26 \text{ m.s}^{-2}$). Rozdíl je to markantní. Zrychlení tedy zdaleka není konstantní.

• Rovnoměrně zrychlený pohyb

a) Počáteční rychlost pohybu $v_0 = 0$

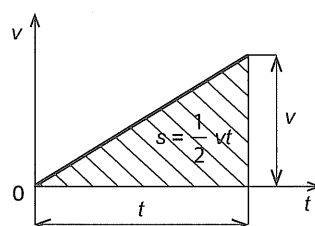
Ze vzorce (2.5) obdržíme:

$$v - v_0 = a(t - t_0).$$

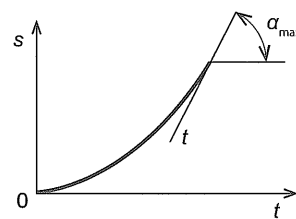
Pro $t_0 = 0$ a $v_0 = 0$ získáme vztah:

$$v = a \cdot t \quad (\text{m.s}^{-1}). \quad (2.7)$$

Grafickým znázorněním rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu je v souřadnicích $v - t$ stoupající polopřímka procházející počátkem souřadného systému. Vyšrafovaná plocha pod touto polopřímkou udává vykonanou dráhu s v čase t (obr. 2.8).



Obr. 2.8



Obr. 2.9

Z obr. 2.8 je patrné, že dráha pohybu:

$$s = \frac{1}{2} v \cdot t. \quad (2.8)$$

Jestliže za rychlost v dosadíme z rovnice (2.7), získáme další vzorec pro velikost dráhy:

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t \cdot t = \frac{1}{2} a \cdot t^2. \quad (2.9)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že grafem v v souřadnicích $s - t$ je parabola druhého stupně (viz obr. 2.9). Povšimněte si: v čase $t = 0$ je rychlost $v_0 = 0$ a tečna v diagramu $s - t$ má

nulový sklon. V čase t_{\max} má rychlost maximální velikost a také sklon tečny svírá maximální úhel (sklon tečny je $\tan \alpha = v = \frac{ds}{dt}$).

Jestliže z rovnic (2.7) a (2.8) vyloučíme čas, získáme vztah:

$$s = \frac{v^2}{2a} \quad (2.10a)$$

Z této rovnice získáme rychlost na konci zrychleného pohybu:

$$v = \sqrt{2a \cdot s} \quad (2.10b)$$

Příklad 9.

Automobil se rozjíždí z klidu rovnoměrně zrychleným přímočarým pohybem. Rychlost $v = 108 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ dosáhne za čas $t = 12 \text{ s}$. Určete zrychlení a automobilu a dráhu s , kterou urazí během rozjezdu.

Řešení

Rychlost:

$$v = \frac{108 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{3,6} = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Zrychlení:

$$a = \frac{v}{t} = \frac{30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{12 \text{ s}} = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Dráha během rozjezdu:

$$s = \frac{1}{2} v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 12 \text{ s} = 180 \text{ m}$$

Příklad 10.

Motocyklista se rozjíždí z klidu. Ve vzdálenosti $s = 200 \text{ m}$ má rychlost $v = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Určete dobu, za kterou ujel uvedenou dráhu a velikost průměrného zrychlení při přímočarém rovnoměrně zrychleném pohybu.

Řešení

Rychlost:

$$v = \frac{90}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Čas:

$$t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 200 \text{ m}}{25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 16 \text{ s}$$

Průměrné zrychlení:

$$\bar{a} = \frac{v}{t} = \frac{25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{16 \text{ s}} = 1,56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Příklad 11.

Vlak Pendolino se rozjíždí z klidu průměrným zrychlením $a = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ na dráze $s = 2\,400 \text{ m}$. Jaká je jeho konečná rychlost a za jakou dobu vlak urazí uvedenou dráhu?

Řešení

Z rovnice (2.10b) určíme konečnou rychlost:

$$v = \sqrt{2a \cdot s} = \sqrt{2 \cdot 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 2\,400 \text{ m}} = 43,82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 158 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Čas rozjezdu:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{43,82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 110 \text{ s}$$

Příklad 12.

Střela z pušky opouští 500 mm dlouhou hlaveň rychlostí $v = 400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete průměrné zrychlení střely a dobu, po kterou se střela pohybovala v hlavni.

Řešení

Průměrné zrychlení:

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{(400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot 0,5 \text{ m}} = 1,6 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Doba, po kterou se střela pohybovala v hlavni:

$$t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 0,5 \text{ m}}{400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 0,0025 \text{ s} = 2,5 \text{ ms}$$

Příklad 13.

Automobil ujede dráhu $s = 1\,000 \text{ m}$ za čas $t = 100 \text{ s}$. Rozjíždí se z klidu s průměrným zrychlením $a = 0,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ až dosáhne rychlosti v , kterou dále pokračuje rovnoměrným přímočarým pohybem. Vypočítejte rychlost v a čas t_1 , po který automobil zrychluje.

Řešení

Automobil projíždí 1. úsek pohybem rovnoměrně zrychleným za čas t_1 a 2. úsek pohybem rovnoměrným přímočarým za čas t_2 .

$$\text{Dráhy: 1. úsek } s_1 = \frac{1}{2} a \cdot t_1^2$$

$$2. \text{ úsek } s_2 = v \cdot t_2; \text{ přičemž platí } v = a \cdot t_1$$

$$\text{Celková vykonaná dráha: } s = s_1 + s_2$$

$$\text{Pro celkový čas platí vztah: } t = t_1 + t_2 \Rightarrow t_2 = t - t_1$$

Za čas t_2 dosadíme do rovnice pro celkovou dráhu a získáme:

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t_1^2 + a \cdot t_1 \cdot t_2 = \frac{1}{2} a \cdot t_1^2 + a \cdot t_1(t - t_1)$$

To je kvadratická rovnice pro neznámou t_1 .

Řešení této rovnice:

$$t_{1,2} = t \pm \sqrt{t^2 - \frac{2s}{a}}$$

Reálný je kořen t_1 , protože t_1 nemůže být větší než t .

$$\begin{aligned} \text{Čas } t_1 &= t - \sqrt{t^2 - \frac{2s}{a}} = \\ &= \left(100 - \sqrt{100^2 - \frac{2 \cdot 1000}{0,6}} \right) \text{ s} = 18,35 \text{ s.} \end{aligned}$$

Rychlost na konci rozjezdu:

$$v = a \cdot t_1 = 0,6 \text{ m.s}^{-2} \cdot 18,35 \text{ s} = 11,01 \text{ m.s}^{-1}.$$

Dráha vykonaná na 1. úseku při rozjezdu:

$$s_1 = \frac{1}{2} a \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,6 \text{ m.s}^{-2} (18,35 \text{ s})^2 = 101,02 \text{ m.}$$

Dráha vykonaná na 2. úseku při rovnoměrném přímočarém pohybu:

$$\begin{aligned} s_2 &= v \cdot t_2 = v(t - t_1) = 11,01 \text{ m.s}^{-1} (100 - 18,35) \text{ s} = \\ &= 898,98 \text{ m.} \end{aligned}$$

Úlohy

- ① Závodní automobil formule 1 zrychluje na rychlost 100 km.h^{-1} za čas $3,5 \text{ s}$. Určete jeho zrychlení. Jakou dráhu během této akcelerace na rychlost 100 km.h^{-1} ujede?
- ($a = 7,94 \text{ m.s}^{-2}$, $s = 48,6 \text{ m}$)
- ② Tramvaj se rozjíždí z klidu se zrychlením $a = 0,3 \text{ m.s}^{-2}$. Za jakou dobu ujede vzdálenost $s = 150 \text{ m}$?
- ($t = 31,6 \text{ s}$)
- ③ Motocykl jede rychlostí $v = 108 \text{ km.h}^{-1}$. Ve vzdálenosti 200 m uvidí na semaforu červenou a brzdí. Jaké bude jeho zpoždění a jak dlouho bude brzdit?
- ($a = -2,25 \text{ m.s}^{-2}$, $t = 13,3 \text{ s}$)
- ④ Automobil sníží rychlost $v_0 = 72 \text{ km.h}^{-1}$ na rychlost $v = 36 \text{ km.h}^{-1}$ na dráze $s = 100 \text{ m}$. Jaké bylo zpoždění automobilu? Jak dlouho brzdil?
- ($a = -1,5 \text{ m.s}^{-2}$, $t = 6,7 \text{ s}$)
- ⑤ Těleso se pohybuje s konstantním zrychlením $a = 3,2 \text{ m.s}^{-2}$. V jistém okamžiku má rychlost $v = 9,6 \text{ m.s}^{-1}$. Zjistěte jeho rychlost:
- a) o $2,5 \text{ s}$ dříve,
b) o $2,5 \text{ s}$ později.
- ($v_a = 1,6 \text{ m.s}^{-1}$, $v_b = 17,6 \text{ m.s}^{-1}$)
- ⑥ Startující tryskový letoun musí mít před vzletnutím minimální rychlost 360 km.h^{-1} . S jakým nejmenším zrychlením může letoun startovat na rozjezdové dráze o délce $1,8 \text{ km}$? Za jaký čas letoun vzletne?
- ($a = 2,78 \text{ m.s}^{-2}$, $t = 36 \text{ s}$)
- ⑦ Motocykl se pohybuje rychlostí $v_1 = 30 \text{ m.s}^{-1}$. Za čas $t = 3 \text{ s}$ se rychlost snížila na $v_2 = 15 \text{ m.s}^{-1}$. Jakou dráhu urazí až do úplného zabrzdění?
- ($s = 90 \text{ m}$)
- ⑧ Řidič tramvaje dohání zpoždění, a tak mezi dvěma stanicemi vzdálenými od sebe 300 m první polovinu dráhy zrychluje se zrychlením $a = 0,6 \text{ m.s}^{-2}$ a druhou polovinu dráhy se stejným zpožděním brzdí. Vypočítejte maximální rychlost tramvaje.
- ($v = 48,3 \text{ km.h}^{-1}$)
- ⑨ Hmotný bod se pohybuje po přímce s konstantním zrychlením a . V bodě A má rychlost $v_1 = 5 \text{ m.s}^{-1}$, v bodě B má rychlost $v_2 = 10 \text{ m.s}^{-1}$. Body jsou od sebe vzdáleny o hodnotu $d = 15 \text{ m}$. Vypočítejte:
- a) zrychlení a hmotného bodu A ,
b) v jaké vzdálenosti s před bodem A měl hmotný bod nulovou rychlost?
- ($a = 2,5 \text{ m.s}^{-2}$, $s = 5 \text{ m}$)
- ⑩ Tři mladíci se dohadují, kdo z nich má nejrychlejší auto. Aleš uvádí, že za 10 s dosáhne s autem rychlost 100 km.h^{-1} . Bronislav říká, že jeho auto za 10 s ujede právě 100 m . Ctirad oponuje. Moje auto dosáhne rychlost 100 km.h^{-1} na dráze 100 m . Kdo z nich má pravdu? Kritériem je velikost zrychlení.
- ($a_A = 2,78 \text{ m.s}^{-2}$, $a_B = 2 \text{ m.s}^{-2}$, Ctiradovo auto je nejlepší, má největší zrychlení, $a_C = 3,86 \text{ m.s}^{-2}$)
- ⑪ Na rychlost střely z pušky má vliv délka hlavně. O kolik % se zmenší rychlost střely, jestliže délka hlavně se zkrátí na polovinu? Uvažujte, že pohyb v hlavních je se stejným zrychlením.
- (rychlost střely se u kratší hlavně zmenší o 29%)

- 12 Škoda – Superb zrychluje na rychlost $100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ za $9,4 \text{ s}$. Určete velikost zrychlení. Jakou dráhu při zrychlování ujede?

$$(a = 2,94 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}, s = 130,6 \text{ m})$$

- 13 Jakého zrychlení v prvních dvaceti metrech dosahují světoví sprinteři v běhu na 100 m , jestliže jejich výsledný čas je 10 s ? Zbylých 80 m běží přibližně konstantní rychlostí. Určete její velikost.

Návod: Sestavte tři rovnice, pro čas rozběhu, dráhu rozběhu a čas rovnoměrného běhu.

$$(v = 12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, a = 3,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})$$

- 14 Hmotný bod se pohybuje se zrychlením $a = 0,25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ s počáteční rychlostí $v_0 = 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Jakou dráhu urazí hmotný bod mezi $4.$ a $12.$ s?

Návod: Určete rychlosti ve $4.$ a $12.$ s a následně vypočítejte dráhu s pomocí vztahu s rozdílem čtverců rychlostí lomeno dvojnásobným zrychlením $2a$.

$$(s = 40 \text{ m})$$

b) Volný pád těles

Těleso ve vzduchoprázdnu volně spuštěné z určité výšky padá svisle k Zemi pohybem přímočarým rovnoměrně zrychleným. Příčinou volného pádu je zemská přitažlivost. Ta vyplývá z univerzálního gravitačního zákona o přitažlivosti těles.

První, který se teorií volného pádu zabýval, byl Galileo Galilei. Na základě pokusů na nakloněné rovině v roce 1604 určil, že dráha volného pádu je závislá na druhé mocnině času a okamžitá rychlost je úměrná proběhlému času.

Okolo Země je ovšem vrstva vzduchu. Vlivem odporu vzduchu při pádu existuje v tomto prostředí pohyb zrychlený, ale nerovnoměrný. Ten se při dosažení tzv. mezní rychlosti změní v pohyb přímočarý konstantní rychlostí. Parašutista o hmotnosti 80 kg dosáhne volným pádem mezní rychlost cca $40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Ta se již dále nezvyšuje. Nastává rovnováha působících sil.

Těžší těleso stejného tvaru a velikosti ve vzduchu padá větší rychlostí než těleso lehčí.

Při pádu tělesa působí na něj jeho tíha $G \sim m \sim L^3$, kde L je veličina vyjadřující rozměr tělesa a odporová síla $F_x \sim S \sim L^2$, kde S je čelní plocha tělesa:

$$F_x = c_x \cdot S \cdot \frac{w^2}{2} \cdot \rho \quad (\text{N}), \text{ viz Dynamika.}$$

Tíha G roste s třetí mocninou rozměru tělesa, odpor roste pouze s druhou mocninou rozměru tělesa. **S velikostí tělesa tedy vliv tíhy roste rychleji než vliv odporu, a tím také jeho rychlost volného pádu.**

Při volném pádu ve vakuu padají však všechna tělesa stejně rychle bez ohledu na velikost hmotnosti či tvaru. Protože při pádu ve vzduchoprázdnu jde o pohyb rovno-

měrně zrychlený s počáteční nulovou rychlostí, platí pro něj všechny vztahy uvedené v předchozím odstavci. Místo zrychlení a dosazujeme tíhové zrychlení g , které má v našich zeměpisných šířkách velikost přibližně $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Tíhové zrychlení g se mění se zeměpisnou šířkou, nejmenší je na rovníku ($9,78 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$), největší na pólech ($9,83 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$). S nadmořskou výškou a výškou nad Zemí tíhové zrychlení klesá podle gravitačního zákona.

Vztahy pro volný pád.

Dráha volného pádu (hloubka):

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (\text{m}). \quad (2.11)$$

Okamžitá rychlost v čase t :

$$v = g \cdot t = \sqrt{2g \cdot h} \quad (\text{m}\cdot\text{s}^{-1}). \quad (2.12)$$

Čas pádu:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{v}{g} \quad (\text{s}). \quad (2.13)$$

V tabulce 2.1 jsou uvedeny dráha, rychlosti a zrychlení při volném pádu po dobu 4 s .

Tabulka. 2.1 Volný pád tělesa

Čas (s)	Dráha (hloubka) $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (m)	Počáteční rychlost v_0 ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	Koncová rychlost $v = \sqrt{2g \cdot h}$ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	Zrychlení g ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)
1	5	0	10	10
2	20	10	20	10
3	45	20	30	10
4	80	30	40	10

Poznámka: Počáteční rychlost v každé sekundě se rovná koncové rychlosti v předchozí sekundě. Hodnoty jsou vypočítány pro $g \approx 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Experimentálně lze volný pád potvrdit tzv. nitkovým padostrojem (obr. 2.10). Je to svisle napjatá niť (provázek), na níž jsou ve vhodných vzdálenostech umístěny kuličky tak, aby při uvolnění dopadaly na podlahu ve stejných časových intervalech Δt , tj. v časech $t, 2t, 3t, 4t$ atd. a vytvářejí dojem „kulometné palby“. Pro jejich výškovou polohu plyne z rovnice (2.13):

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{t_1}{2t_1} = \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{t_1}{t_3} = \frac{t_1}{3t_1} = \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{h_1}{h_3}} \Rightarrow \frac{h_1}{h_3} = \frac{1}{3^2} \text{ atd.}$$

$$\frac{t_1}{t_4} = \frac{t_1}{4t_1} = \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{h_1}{h_4}} \Rightarrow \frac{h_1}{h_4} = \frac{1}{4^2} \text{ atd.}$$

Výškové polohy kuliček pro jejich rovnoměrné dopadání jsou odstupňovány v poměru druhých mocnin celých čísel, tj. 1 : 4 : 9 : 16 : 25 atd. Rozestupy mezi jednotlivými kuličkami jsou proto v poměru 1 : (4-1) : (9-4) : (16-9) atd., tj. 1 : 3 : 5 : 7 : 9 atd.

Vhodné vzdálenosti mezi jednotlivými kuličkami mohou být např.: 0,2 m + 0,6 m + 1,0 m + 1,4 m + 1,8 m. Celková délka nitě je potom 5 m.

Podle rovnice (2.13) vypočítáme čas t , ze kterého dále vyplývá, že časový interval mezi dvěma dopadajícími kuličkami je stejný, 0,2 s.

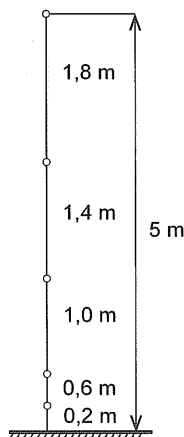
$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,2 \text{ m}}{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 0,2 \text{ s,}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8 \text{ m}}{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 0,4 \text{ s}$$

$$t_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,8 \text{ m}}{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 0,6 \text{ s,}$$

$$t_4 = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2 \text{ m}}{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 0,8 \text{ s,}$$

$$t_5 = \sqrt{\frac{2 \cdot 5,0 \text{ m}}{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 1,0 \text{ s.}$$



Obr. 2.10

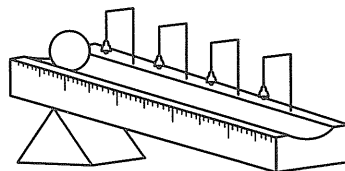
Historická poznámka:

Galileo Galilei je zakladatelem vědeckého experimentu v mechanice. Galileo použil termín „přezkoušení“, ověření nějaké vědecké hypotézy smyslovou zkušeností. Objevy Galileia Galilei při zrychlených pohybech jsou pro mechaniku natolik významné, že si zaslouží větší pozornost. Galileo Galilei prováděl své pokusy na nakloněné rovině. Ta se skládala z fošny z kvalitního dřeva dlouhé 6 m. Vyhlobená vyhlazená drážka zaručovala minimální tření při pohybu kuliček různých hmotností.

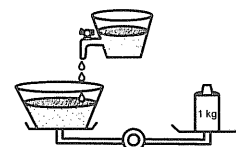
Galileo Galilei zvětšoval, nebo zmenšoval sklon nakloněné roviny, a tak měnil rychlosti pádu kuliček na tomto zařízení. Přesnost měření však pro něho byla velkým problémem. Protože neměl k dispozici hodiny, vynalezl, jak měřit čas dráhy kuliček. Na nakloněné rovině umístil v pravidelných intervalech zvonečky (obr. 2.11), které při průchodu kuličky zvonily. Galileo studoval také hudbu a přesně vnímal rytmus a zvukové intervaly. To však

nestačilo. Proto sestavil vodní hodiny (obr. 2.12). V okamžiku, kdy pouštěl kuličku, otevřel kohoutek na nádrži. Na konci pádu kohoutek zavřel a zvážil vodu, která vytekla z nádrže. A změřil pak proběhlou dráhu. Tím převáděl čas na váhové množství vody.

Při tomto pokusu Galileo objevil, že poměr drah, které kuličky urazily při různých sklonech, a jím odpovídajících časech, je konstantní pro jakýkoliv náklon, a tedy i pro limitní případ volného pádu (viz příklad s padostrojem). Nejdůležitější poznatek, který Galileo zjistil: definoval zrychlení jako podíl přírůstku rychlosti a přírůstku času. Toto zrychlení nezávisí na tíze tělesa, ale jen na sklonu nakloněné roviny a tíhovém zrychlení, dále že dráha volného pádu je závislá na druhé mocnině času a okamžitá rychlost je úměrná proběhlému času.



Obr. 2.11



Obr. 2.12

Příklad 14.

Volně padající těleso proletělo volným pádem posledních 15 m za 0,2 s. Vypočítejte rychlost tělesa těsně před dopadem. Určete, z jaké výšky těleso padalo.

Řešení

$$\frac{v_2 - v_1}{t} = g, \quad \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot t = h.$$

Po dosazení:

$$\frac{v_2 - v_1}{0,2} = 9,81, \quad \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot 0,2 = 15$$

$$v_2 - v_1 = 1,96$$

$$v_2 + v_1 = 150$$

$$2v_2 = 151,96$$

$$v_2 \approx 76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Výška h_1 , ze které těleso padalo:

$$h_1 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{(76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 294 \text{ m.}$$

Příklad 15.

Chlapec vhodí kámen do studny. Žbluňknutí uslyší za 3,5 s. Jak hluboká je studna? Rychlost zvuku uvažujte $v = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Řešení

Hloubka studny je h :

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx \sqrt{0,2 h},$$

$$h = v \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{h}{v} = \frac{h}{340}.$$

Celkový čas t :

$$t = t_1 + t_2 = 3,5 \text{ s},$$

$$\sqrt{0,2 h} + \frac{h}{340} = 3,5.$$

Po úpravě získáme kvadratickou rovnici:

$$h^2 - 25\,432 h + 1,416\,1 \cdot 10^6 = 0,$$

$$h_{1,2} = \frac{25\,432 \pm \sqrt{6,467\,86 \cdot 10^8 - 4 \cdot 1,416\,1 \cdot 10^6}}{2}.$$

Kořeny této rovnice jsou $h_1 = 25\,376 \text{ m}$, $h_2 = 55,8 \text{ m}$.

Reálný kořen je $h_2 = 55,8 \text{ m}$.

Studna je hluboká $55,8 \text{ m}$.

Úlohy

- ① Opravář upustil klíč do výtahové šachty výškového domu. Jaká bude poloha klíče za $1,5 \text{ s}$. Jaká je v tomto čase $1,5 \text{ s}$ rychlost klíče?

$$(y = -11,04 \text{ m}, v = 14,72 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})$$

- ② Ze skály vysoké 100 m volně vypustíme kámen. Za jakou dobu urazí kámen

- a) prvních 50 m ,
b) druhých 50 m ?

$$(a) 3,2 \text{ s}, \quad (b) 1,3 \text{ s}$$

- ③ Dvě tělesa jsou volně vypuštěna ze stejné výšky v časovém odstupu 1 s a letí volným pádem. Za jak dlouho, od okamžiku kdy začalo padat první z nich, je jejich vzdálenost 10 m ?

$$(t = 1,52 \text{ s})$$

- ④ Těleso padá z mostu z výšky 45 m . Na hladinu řeky spadne přímo do loďky, která pluje pod mostem konstantní rychlostí v . V okamžiku uvolnění tělesa na mostě byla loďka vzdálena 12 m od místa dopadu. Jaká byla její rychlost v ?

$$(v = 3,96 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})$$

- ⑤ Těleso padající volným pádem má v bodě A rychlost $v_1 = 40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a v bodě B rychlost $v_2 = 70 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Určete, za jakou dobu těleso urazí vzdálenost AB a jaká je vzdálenost mezi těmito body.

$$(t = 3,06 \text{ s}, s_{AB} = 168,3 \text{ m})$$

Počáteční rychlost pohybu $v_0 > 0$

Při výpočtu opět vycházíme z definice zrychlení:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}.$$

Místo časových přírůstků můžeme psát čas t . Potom:

$$a = \frac{v - v_0}{t}. \quad (2.14)$$

Konečná rychlost v čase t bude mít velikost:

$$v = v_0 + a \cdot t. \quad (2.15)$$

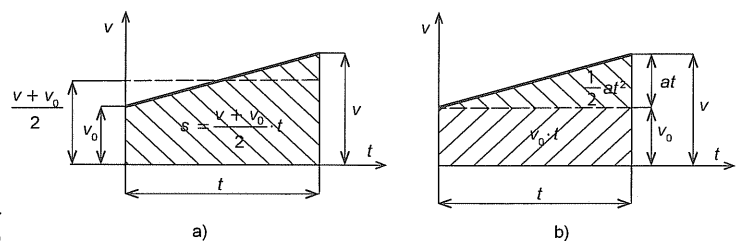
a vztah pro čas t bude mít tvar:

$$t = \frac{v - v_0}{a}. \quad (2.16)$$

Grafickým znázorněním tohoto pohybu je v souřadnicích $v - t$ stoupající polopřímka. V čase $t_0 = 0$ má rychlost velikost v_0 .

Při odvozování dráhy s vycházíme opět z poznatku, že dráha s je dána velikostí vyšrafované plochy v diagramu $v - t$ (obr. 2.13a):

$$s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t. \quad (2.17)$$



Obr. 2.13

Jestliže za čas t dosadíme z rovnice (2.16), potom pro dráhu s získáme vztah:

$$s = \frac{v + v_0}{2} \cdot \frac{v - v_0}{a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \quad (2.18)$$

Z tohoto výrazu určíme rychlost v na konci zrychleného úseku:

$$v = \sqrt{2a \cdot s + v_0^2}. \quad (2.19)$$

Pro dráhu s můžeme psát také vzorec:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2. \quad (2.20)$$

Příklad 16.

Zlostný teenager Šimon hází kamením svisle dolů ze střechy budovy o výšce $h = 30$ m. Počáteční rychlost kamene $v_0 = 12 \text{ m.s}^{-1}$. Jaká bude dopadová rychlost kamene v_{dop} a za jak dlouho dopadne kámen na zem?

Řešení

$$\begin{aligned} \frac{v_{\text{dop}}^2 - v_0^2}{2g} = h &\Rightarrow v_{\text{dop}} = \sqrt{2g \cdot h + v_0^2} = \\ &= \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m.s}^{-2} \cdot 30 \text{ m} + (12 \text{ m.s}^{-1})^2} = \\ &= 27,07 \text{ m.s}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h = \frac{v_0 + v_{\text{dop}}}{2} \cdot t &\Rightarrow t = \frac{2h}{v_0 + v_{\text{dop}}} = \\ &= \frac{2 \cdot 30 \text{ m}}{(12 + 27,07) \text{ m.s}^{-1}} = 1,54 \text{ s}. \end{aligned}$$

Příklad 17.

Cyklista jede rychlostí $v_0 = 18 \text{ km.h}^{-1}$. Při jízdě z mírného kopce zrychluje na dráze $s = 300$ m s průměrným zrychlením $a = 0,15 \text{ m.s}^{-2}$. Určete čas t rovnoměrně zrychleného pohybu a rychlost v na konci dráhy s .

Řešení

$$v_0 = \frac{18}{3,6} \text{ m.s}^{-1} = 5 \text{ m.s}^{-1},$$

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2.$$

Po dosazení řešíme kvadratickou rovnici pro čas t :

$$300 = 5t + \frac{1}{2} \cdot 0,15t^2.$$

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,15 \cdot (-300)}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,15} = \frac{-5 \pm 10,72}{0,15}.$$

Kořeny této rovnice jsou: $t_1 = 38,13$ s, $t_2 = -104,80$ s. Reálný kořen je $t_1 = 38,13$ s.

Z rovnice (2.15) vypočítáme rychlost na konci sjezdu:

$$\begin{aligned} v = a \cdot t + v_0 &= (0,15 \cdot 38,13 + 5) \text{ m.s}^{-1} = 10,72 \text{ m.s}^{-1} = \\ &= 38,6 \text{ km.h}^{-1}. \end{aligned}$$

Příklad 18.

Rychlík zvýší svoji rychlost $v_0 = 68,4 \text{ km.h}^{-1}$ na rychlost $v = 118,8 \text{ km.h}^{-1}$ za čas $t = 14$ s. Určete velikost průměrného zrychlení a a dráhu s projetou při zrychlování.

Řešení

Rychlosti:

$$v_0 = \frac{68,4}{3,6} \text{ m.s}^{-1} = 19 \text{ m.s}^{-1};$$

$$v = \frac{118,8}{3,6} \text{ m.s}^{-1} = 33 \text{ m.s}^{-1}.$$

Průměrné zrychlení:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(33 - 19) \text{ m.s}^{-1}}{14 \text{ s}} = 1 \text{ m.s}^{-2}.$$

Dráha:

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{(33^2 - 19^2) \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{2 \cdot 1 \text{ m.s}^{-2}} = 364 \text{ m}.$$

Příklad 19.

Automobil na dráze $s = 250$ m zrychluje s průměrným zrychlením $a = 1,2 \text{ m.s}^{-2}$.

Původní rychlost byla $v_0 = 72 \text{ km.h}^{-1}$. Zjistěte rychlost v na konci dráhy a čas t , po který automobil zrychluje.

Řešení

Původní rychlost:

$$v_0 = \frac{72}{3,6} \text{ m.s}^{-1} = 20 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$\text{Rychlost } v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s + v_0^2} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 1,2 \text{ m.s}^{-2} \cdot 250 \text{ m} + (20 \text{ m.s}^{-1})^2} =$$

$$= 31,62 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$v = 31,62 \cdot 3,6 \text{ km.h}^{-1} = 113,8 \text{ km.h}^{-1}.$$

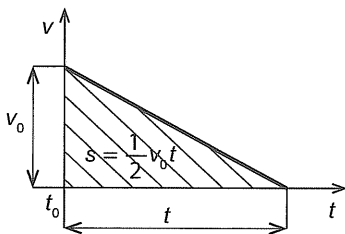
Doba zrychleného pohybu automobilu:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{(31,62 - 20) \text{ m.s}^{-1}}{1,2 \text{ m.s}^{-2}} = 9,7 \text{ s}.$$

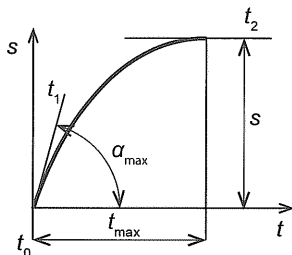
• Rovnoměrně zpomalený pohyb

a) Pohyb až do klidu, konečná rychlost $v = 0$

Zrychlení má zápornou hodnotu: $-a = \text{konst.}$ Rychlost ubývá rovnoměrně s časem. V praxi nejčastěji jde o brzdné pohyby dopravních prostředků nebo zdvihacích zařízení. Opět nakreslíme dva diagramy, závislosti $v - t$ (obr. 2.14) a $s - t$ (obr. 2.15).



Obr. 2.14



Obr. 2.15

V diagramu $v - t$ (obr. 2.14) je tento pohyb znázorněn klesající přímkou z hodnoty v_0 v čase t_0 až na rychlost $v = 0$ v čase t . V diagramu $s - t$ (obr. 2.15) je pohyb rovnoměrně zpomalený zakreslen parabolou druhého stupně. V čase t_0 má rychlost v největší hodnotu a také sklon tečny k parabole je v tomto bodě největší. V čase t_{max} je rychlost v nulová a také sklon tečny, úhel α , má nulovou hodnotu. Sklon tečny $\tan \alpha = v$. Rychlost je derivace dráhy podle času.

Zpoždění je definováno:

$$a = \frac{v_0}{t}. \quad (2.21)$$

Z této rovnice získáme velikost času, za který se hmotný bod zastaví:

$$t = \frac{v_0}{a}. \quad (2.22)$$

Dráha s (viz obr. 2.14), kterou bod proběhne až do zastavení, je vyjádřena vztahy:

$$s = \frac{1}{2} v_0 \cdot t = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{v_0^2}{2a}. \quad (2.22a,b,c)$$

Příklad 20.

Rychlík vyjíždí ze zatáčky rychlostí $v_1 = 160 \text{ km.h}^{-1}$. Strojvůdce náhle spatří ve vzdálenosti 670 m lokomotivu, která jede stejným směrem po téže koleji pouze rychlostí $v_2 = 29 \text{ km.h}^{-1}$. Určete nejmenší možné zpoždění rychlíku, při němž ještě nedojde ke srážce.

Řešení

$$v_1 = \frac{160}{3,6} \text{ m.s}^{-1} = 44,44 \text{ m.s}^{-1},$$

$$v_2 = \frac{29}{3,6} \text{ m.s}^{-1} = 8,06 \text{ m.s}^{-1}.$$

Dráha, kterou ujede rychlíková lokomotiva:

$$s = v_2 \cdot t + 670 = 8,06 \cdot t + 670,$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot t.$$

Po dosazení za $v_1 = 44,44 \text{ m.s}^{-1}$ získáme:

$$s = 22,22 t,$$

$$s = 8,06 \cdot t + 670.$$

Řešením posledních dvou rovnic je:

$$t = \frac{670}{14,166} s = 47,3 \text{ s a } s = 1\,051,2 \text{ m.}$$

Zpoždění a :

$$a = \frac{v}{t} = \frac{44,44 \text{ m.s}^{-1}}{47,3 \text{ s}} = 0,94 \text{ m.s}^{-2}.$$

Příklad 21.

Automobil jede rychlostí $v_0 = 108 \text{ km.h}^{-1}$. Začal brzdit s konstantním zpožděním $a = 1,4 \text{ m.s}^{-2}$. Jakou dráhu vůz vykonal do okamžiku úplného zastavení a jaký byl čas brzdění?

Řešení

Původní rychlost:

$$v_0 = \frac{108 \text{ m.s}^{-1}}{3,6} = 30 \text{ m.s}^{-1}.$$

Dráhu s určíme ze vzorce (2.22c):

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{(30 \text{ m.s}^{-1})^2}{2 \cdot 1,4 \text{ m.s}^{-2}} = 321 \text{ m.}$$

Doba, po kterou automobil brzdil:

$$t = \frac{2s}{v_0} = \frac{2 \cdot 321 \text{ m.}}{30 \text{ m.s}^{-1}} = 21,4 \text{ s.}$$

Příklad 22.

Výtah zastavuje na dráze $s = 0,6 \text{ m}$ za čas $t = 1 \text{ s}$. Určete rychlost výtahu v_0 a průměrné zpoždění a .

Řešení

Původní rychlost:

$$v_0 = \frac{2s}{t} = \frac{2 \cdot 0,6 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 1,2 \text{ m.s}^{-1}.$$

Průměrné zpoždění:

$$a = \frac{v_0^2}{2s} = \frac{(1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot 0,6 \text{ m}} = 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$\text{ale také } a = \frac{v_0}{t} = \frac{1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{1 \text{ s}} = 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Příklad 23.

Parašutista padá po výskoku z letadla nejprve volným pádem a urazí dráhu 50 m. Poté otevře padák, který zpomaluje jeho pohyb. Parašutista padá zpomaleným pohybem se zpomalením $a = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Na zem dopadne rychlostí $v_{\text{dop}} = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- a) V jaké výšce nad zemí parašutista vyskočil z letadla?
b) Jak dlouho trval jeho celkový let?

Řešení

Rychlost na konci volného pádu:

$$v = \sqrt{2g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 50 \text{ m}} = 31,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Velikost dráhy zpomaleným pohybem (po otevření padáku):

$$s_2 = \frac{v^2 - v_{\text{dop}}^2}{2a} = \frac{(31,3^2 - 3^2) \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{2 \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 242,7 \text{ m}.$$

Celková výška nad zemí, ze které parašutista vyskočil:

$$h = s_1 + s_2 = (50 + 242,7) \text{ m} = 292,7 \text{ m}.$$

Doba volného pádu t_1 :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \text{ m}}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 3,19 \text{ s}.$$

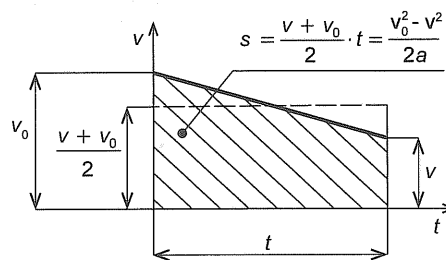
Doba pádu s padákem:

$$t_2 = \frac{2 \cdot s_2}{v + v_{\text{dop}}} = \frac{2 \cdot 242,7 \text{ m}}{(31,3 + 3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 14,15 \text{ s}.$$

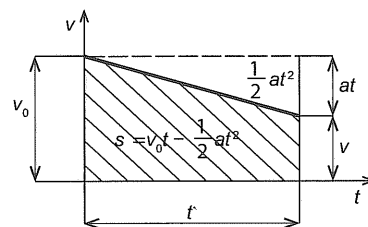
Celková doba pádu:

$$t_1 + t_2 = (3,19 + 14,15) \text{ s} = 17,34 \text{ s}.$$

a) Konečná rychlost pohybu $v > 0$ (obr. 2.16):



a)



b)

Obr. 2.16

Zpoždění:

$$a = \frac{v_0 - v}{t}. \quad (2.23)$$

Doba zpomaleného pohybu:

$$t = \frac{v_0 - v}{a}. \quad (2.24)$$

Konečná rychlost:

$$v = v_0 - a \cdot t. \quad (2.25)$$

Z grafu $v - t$ dráha s :

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2. \quad (2.26)$$

Pro dráhu s platí také vzorce:

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}. \quad (2.27a, b)$$

Konečná rychlost:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2a \cdot s}. \quad (2.28)$$

Příklad 24.

Auto jelo rychlostí $v_0 = 108 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Na dráze $s = 360 \text{ m}$ brzdilo s průměrným zpožděním $a = 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Jaká byla jeho konečná rychlost a jak dlouho brzdilo?

Řešení

Původní rychlost:

$$v_0 = \frac{108}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Konečná rychlost:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2a \cdot s} =$$

$$= \sqrt{(30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 - 2 \cdot 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 360 \text{ m}} =$$

$$= 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 21,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Doba, po kterou auto brzdilo:

$$t = \frac{v_0 - v}{a} = \frac{(30 - 6) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 20 \text{ s}.$$

Příklad 25.

Rychlík jede rychlostí $v_0 = 122,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a za 10 s zbrzdí na rychlost $v = 68,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Určete průměrné zpoždění a dráhu, kterou po dobu brzdění ujel.

Řešení

Rychlosti:

$$v_0 = \frac{122,4}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 34 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v = \frac{68,4}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Zpoždění:

$$a = \frac{v_0 - v}{t} = \frac{(34 - 19) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{10 \text{ s}} = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Ujetá dráha:

$$s = \frac{v_0^2 - v^2}{2a} = \frac{(34^2 - 19^2) \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{2 \cdot 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 265 \text{ m}.$$

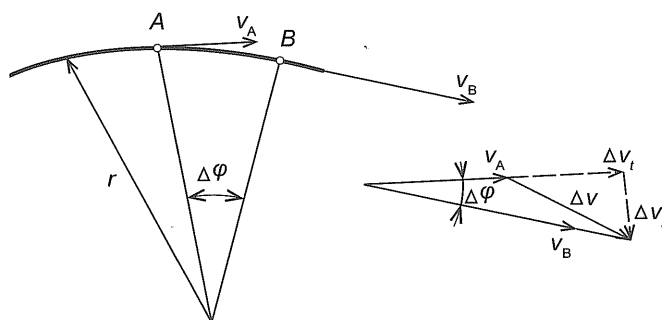
Kontrolní otázky

1. Definujte mechanický pohyb.
2. Definujte trajektorii pohybu.
3. Definujte rychlost rovnoměrného přímočarého pohybu.
4. Jaký je rozdíl mezi průměrnou a okamžitou rychlostí. Uveďte příklady.
5. Jaké znáte jednotky rychlosti? Uveďte převodní vztahy mezi těmito jednotkami.
6. Nakreslete diagram $v - t$ pro rovnoměrný přímočarý pohyb. Co vyjadřuje plocha v tomto diagramu?
7. Definujte zrychlení přímočarého pohybu.
8. Jaká je jednotka zrychlení?

9. Nakreslete diagram $v - t$ pro přímočarý zrychlený pohyb s počáteční rychlostí rovnou nule.
10. Nakreslete diagram $v - t$ pro přímočarý zpožděný pohyb s konečnou nulovou rychlostí.
11. Jakou velikost má tíhové zrychlení g v našich zeměpisných podmínkách?
12. Jaký je rozdíl mezi volným pádem ve vakuu a v zemské atmosféře?
13. K čemu slouží nitkový padostroj?

2.4. KŘIVOČARÝ POHYB

Při obecném křivočarém nerovnoměrném pohybu rychlost mění nejen směr, ale i velikost (obr. 2.17).

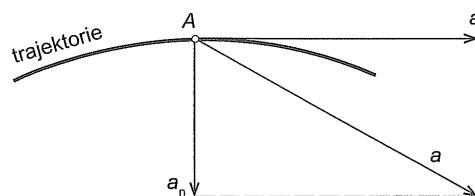


Obr. 2.17

Okamžitá rychlost v_A vzroste za velmi krátký časový úsek Δt na rychlost v_B , přičemž směr rychlosti se změní o úhel $\Delta\varphi$.

Přírůstek rychlosti rozložíme do dvou směrů kolmých na tečnu $\Delta v_t = a_t \cdot t$ a do směru normály ke křivce Δv_n . V každém bodě trajektorie působí při nerovnoměrném pohybu v bodě A dvě zrychlení: tečné (tangenciální) a normálové (dostředivé).

Tečné zrychlení a_t způsobuje zvětšení rychlosti ve směru tečny a je příčinou nerovnoměrnosti pohybu. **Normálové zrychlení** a_n mění směr pohybu, způsobuje zakřivení trajektorie (obr. 2.18).



Obr. 2.18

Jeho velikost: $a_n = v^2 \cdot r^{-1}$, kde r je poloměr křivosti v bodě A. Odvození normálového zrychlení bude provedeno v odst. 2.4.1.

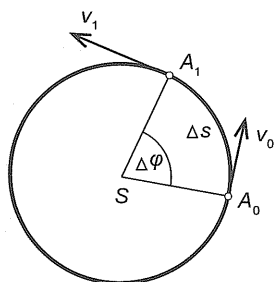
Celkové zrychlení:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-2}). \quad (2.29)$$

2.4.1 Kruhový pohyb

Pohyb bodu po kružnici je kruhový pohyb. Je speciálním případem křivočarého pohybu. Zakřivení dráhy je konstantní.

Kruhový pohyb je v technické praxi velice častý. Tak se pohybují např. hřídele, spojky, ozubená kola, setrvačníky, ale i CD v přehrávačích nebo hard disky v PC (obr. 2.19).



Obr. 2.19

Na obr. 2.19 jsou uvedeny dvě různé polohy bodu A . Rychlosti tohoto bodu jsou v_0 a v_1 . Mají směr tečny ke kružnici.

Jestliže platí: $|v_0| = |v_1|$, potom jde o rovnoměrný kruhový pohyb.

Při nerovnosti $|v_0| \geq |v_1|$ se bod pohybuje po kružnici zpomaleně, nebo zrychleně.

Rychlost v odečítaná na obvodě kružnice se nazývá obvodová rychlost v ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).

Bod A_0 urazí za čas Δt na oblouku kružnice dráhu Δs a průvodič SA opíše za stejný čas úhel $\Delta\varphi$, kterému říkáme také úhlová dráha. Jestliže poloměr kružnice je r , potom:

$$\Delta s = r \cdot \Delta\varphi \quad (\text{m}, \text{m}, \text{rad}). \quad (2.30)$$

Úhlová rychlost je definována jako přírůstek úhlové dráhy za čas Δt :

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}). \quad (2.31)$$

Úhlová rychlost vypovídá, jak velký úhel v radiánech opíše průvodič SA za jednu sekundu.

Vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \omega \quad (\text{m}\cdot\text{s}^{-1}, \text{m}, \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}). \quad (2.32)$$

Poznámka: $1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$.

Při úhlu 1 rad je délka kruhového oblouku právě rovna jeho poloměru.

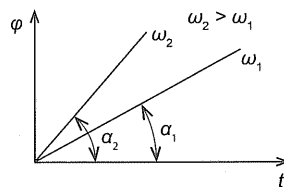
a) Rovnoměrný pohyb po kružnici

Úhlová rychlost ω je konstantní. Obvodová rychlost nemění svoji velikost, mění jen směr. Obvodová rychlost v i úhlová rychlost ω jsou vektory, jsou na sebe kolmé.

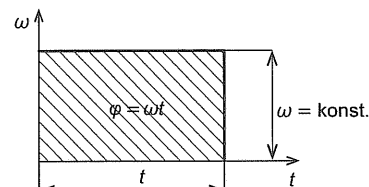
Obvodová rychlost je přímo úměrná poloměru kružnice:

$$v = \omega \cdot r = \text{konst.} \quad (2.32a)$$

V diagramu $\varphi - t$ (obr. 2.20) sklon polopřímky udává velikost úhlové rychlosti ω . Při větších rychlostech ω má polopřímka větší sklon. V diagramu $\omega - t$ (obr. 2.21) velikost vyšrafované plochy ukazuje velikost úhlové dráhy $\varphi = \omega \cdot t$. (Porovnej se vztahem $s = v \cdot t$ u rovnoměrného přímočarého pohybu.)



Obr. 2.20



Obr. 2.21

Počet proběhlých obrátek i získáme podle vztahu:

$$i = \frac{\varphi}{2\pi} \quad (1). \quad (2.33)$$

Velikost otáček:

$$n = \frac{i}{t} = \frac{\varphi}{2\pi \cdot t} \quad (\text{s}^{-1}). \quad (2.34)$$

Rychlost rovnoměrného otáčení můžeme vyjádřit také pomocí frekvence otáčení (otáček) n (s^{-1}). Udává, kolikrát za sekundu opíše průvodič SA celý úhel 2π . Za jednu otáčku vykoná bod A dráhu $\pi \cdot d$. Za n otáček za sekundu dráhu n krát větší, což je vlastně obvodová rychlost v :

$$v = \pi \cdot d \cdot n \quad (\text{m}\cdot\text{s}^{-1}, \text{m}, \text{s}^{-1}), \quad (2.35)$$

$$v = \pi \cdot 2r \cdot n = r \cdot \omega \Rightarrow \omega = 2\pi \cdot n. \quad (2.36)$$

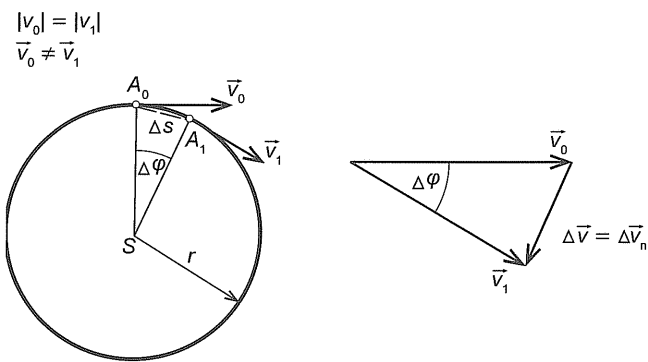
Čas trvající jednu otáčku (periodu) se určí podle vzorce:

$$T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{s}). \quad (2.37)$$

Perioda T je doba, za kterou obíhající bod opíše úhel 2π a dostane se opět do výchozí polohy.

• Normálové (dostředivé) zrychlení

Rychlost v je vektor. Přestože její absolutní velikost je při rovnoměrném pohybu bodu po kružnici stejná, směr vektoru rychlosti se stále mění ($\vec{v} \neq \text{konst.}$). Změna rychlosti $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0 = \Delta\vec{v}_n$ je kolmá na vektor obvodové rychlosti, působí do středu kružnice. Proto také normálové zrychlení a_n má směr normály a zajišťuje stálé zakřivení kruhové dráhy (obr. 2.22). Normálové zrychlení poprvé vypočítal v roce 1673 holandský fyzik Ch. Huygens.



Obr. 2.22

Za čas Δt se bod dostane z polohy A_0 do polohy A_1 a urazí dráhu $\Delta s = v \cdot \Delta t$. Vektor rychlosti v bodě A_1 se rovná vektoru rychlosti v bodě A_0 zvětšený o přírůstek rychlosti Δv . Protože úhel $\Delta\varphi$ je velmi malý, můžeme ve výšce SA_0A_1 považovat přibližně velikost kruhového oblouku za stejně velkou, jako je velikost tětivy. Potom rovnoramenné trojúhelníky SA_0A_1 a $v_0 - \Delta v - v_1$ si jsou podobné.

$$\frac{\Delta s}{r} = \frac{v \cdot \Delta t}{r} = \frac{\Delta v_n}{v},$$

$$a = \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} = \frac{(r \cdot \omega)^2}{r} = r \cdot \omega^2 \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-2}, \text{m} \cdot \text{s}^{-2}). \quad (2.38)$$

Příklad 26.

Kotouč kruhové pily na dřevo má průměr $D = 400$ mm. Doporučená rychlost na obvodu kotouče $v = 35$ m.s⁻¹. Vypočítejte:

- otáčky kotouče (s⁻¹),
- úhlovou rychlost ω (rad.s⁻¹),
- periodu T (s).

Řešení

Otáčky:

$$n = \frac{v}{\pi \cdot D} = \frac{35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{\pi \cdot 0,4 \text{ m}} = 27,85 \text{ s}^{-1}.$$

Úhlová rychlost:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{2v}{D} = \frac{2 \cdot 35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{0,4 \text{ m}} = 175 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Perioda:

$$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{27,85 \text{ s}^{-1}} = 0,0359 \text{ s} = 35,9 \text{ ms}.$$

Příklad 27.

Soustružník obrábí hřídel z oceli o průměru $d = 50$ mm nožem ze slinutých karbidů. Na převodovce soustruhu nastavuje otáčky vřetene $n = 620$ min⁻¹.

Zkontrolujte, zda nastavené otáčky jsou správné, jestliže v nomogramu pracovník odečítá doporučenou řeznou rychlost $v = 95$ m.min⁻¹.

Řešení

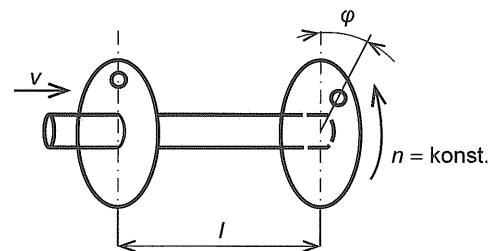
Doporučené otáčky:

$$n = \frac{v}{\pi \cdot d} = \frac{95 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}}{\pi \cdot 0,05 \text{ m}} = 604 \text{ min}^{-1}.$$

Protože otáčky vřetene jsou odstupňovány v určité řadě, jsou nastavené otáčky správné.

Příklad 28.

Rychlost střely se zjišťuje následovně. Dva papírové kotoučky se otáčejí konstantními otáčkami. Střela prochází oběma kotouči rovnoběžně s osou hřídele. Po zastavení hřídele se zjistí, že průstřely jsou natočeny o určitý úhel φ . Je dána i vzdálenost kotoučků l (obr. 2.23).



Obr. 2.23

Zadané hodnoty: otáčky kotoučků $n = 24$ s⁻¹, úhel $\varphi = 32^\circ$, vzdálenost kotoučků $l = 1,5$ m.

Řešení

Úhlová rychlost:

$$\omega = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot 24 \text{ s}^{-1} = 150,796 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Úhel:

$$\varphi = 32^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 0,5585 \text{ rad}.$$

Doba letu střely:

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{0,5585 \text{ rad}}{150,796 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}} = 0,00374 \text{ s} = 3,74 \text{ ms}.$$

Rychlost střely:

$$v = \frac{l}{t} = \frac{1,5 \text{ m}}{0,00374 \text{ s}} = 405 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Úlohy

- ① Určete středový úhel oblouku o délce 1,8 m a poloměru $r = 1,2$ m. Výsledek vyjádřete v radiánech a ve stupních.

(1,5 rad, 85,94°)

- ② Úhel mezi dvěma poloměry kružnice je 0,62 radiánů. Určete délku oblouku, který je těmito poloměry vymezen, víte-li, že oblouk celé kružnice je 2,4 m.

(0,237 m)

- ③ Vypočítejte úhlovou rychlost vteřinové, minutové a hodinové ručičky na hodinkách.

(0,105 rad.s⁻¹, 1,745 · 10⁻³ rad.s⁻¹, 1,454 · 10⁻⁴ rad.s⁻¹).

Příklad 29.

Buben odstředivky na prádlo má průměr $D = 300$ mm a otáčí se konstantními otáčkami $n = 900$ min⁻¹. Určete velikost dostředivého zrychlení a_n .

Řešení

Obvodová rychlost:

$$v = \pi \cdot D \cdot n = \pi \cdot 0,3 \text{ m} \cdot \frac{900}{60} \text{ s}^{-1} = 14,13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Dostředivé zrychlení:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2v^2}{D} = \frac{2(14,13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{0,3 \text{ m}} = 1331 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Dostředivé zrychlení je značné a odstraňování vody z prádla je velmi účinné.

a) Rovnoměrně zrychlený (zpomalený) pohyb bodu po kružnici

Při tomto pohybu se obvodová i úhlová rychlost rovnoměrně zvětšují (zmenšují).

Definujeme úhlové zrychlení analogicky s výrazem (2.5) pro přímočarý pohyb:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1 - t_0} = \text{konst. (rad} \cdot \text{s}^{-2}, \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ s)} \quad (2.39)$$

Jestliže v čase $t_0 = 0$ je $\omega_0 = 0$, potom se předchozí vztah zjednoduší:

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t}. \quad (2.40)$$

Bod na obvodě kružnice se pohybuje s tečným zrychlením a_t :

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\omega}{\Delta t} = r \cdot \varepsilon \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-2}, \text{ m} \cdot \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}). \quad (2.41)$$

Celkové zrychlení a získáme vektorovým součtem zrychlení tečného a normálového:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_t + \vec{a}_n; \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(r \cdot \varepsilon)^2 + (r \cdot \omega^2)^2} = \\ &= r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-2}). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Vztahy mezi veličinami u rovnoměrně zrychleného (zpomaleného) pohybu přímočarého (s, v, a, t) jsou analogické k veličinám $\varphi, \omega, \varepsilon, t$ u pohybu rovnoměrně zrychleného (zpomaleného) při kruhovém pohybu. Proto tyto rovnice nebudeme dále odvozovat, ale uvedeme je přímo v tab. 2.3 a 2.4.

Tabulka 2.2. Porovnání veličin u pohybu přímočarého a pohybu po kružnici

Pohyb přímočarý	Pohyb po kružnici
Čas t (s)	Čas t (s)
Dráha s (m)	Úhel (úhlová dráha) φ (rad)
Rychlost v (m.s ⁻¹)	Úhlová rychlost ω (rad.s ⁻¹)
Zrychlení a (m.s ⁻²)	Úhlové zrychlení ε (rad.s ⁻²)

Tabulka 2.3. Pohyb rovnoměrně zrychlený pro $v_0 > 0$, případně $\omega_0 > 0$

Zrychlení ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) $a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$	Úhlové zrychlení ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$) $\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varphi}$
Rychlost ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) $v = v_0 + a \cdot t = \sqrt{v_0^2 + 2a \cdot s} = \frac{2s}{t} - v_0$	Úhlová rychlost ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) $\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t = \sqrt{\omega_0^2 + 2\varepsilon \cdot \varphi} = \frac{2\varphi}{t} - \omega_0$
Dráha (m) $s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$	Úhlová dráha (úhel) (rad) $\varphi = \frac{\omega + \omega_0}{2} \cdot t = \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}$
Čas (s) $t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{2s}{v + v_0}$	Čas (s) $t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} = \frac{2\varphi}{\omega + \omega_0}$

Při nulových počátečních rychlostech se výrazy v tab. 2. 3 zjednoduší, za v_0 a ω_0 dosazujeme nuly.

Příklad 30.

Cvičný proudový letoun nalétává z přímého směru do zatáčky o poloměru $r = 1\,500$ m. Rychlost letadla na počátku kruhového oblouku je $410 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, na konci oblouku je $340 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Letoun prolétne zatáčkou za 7 s. Určete výsledné zrychlení na konci kruhové zatáčky a úhel φ kruhového oblouku.

Řešení

Rychlosti letadla:

$$v_1 = \frac{410}{3,6} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 113,89 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1},$$

$$v_2 = \frac{340}{3,6} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 94,44 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Tečné zrychlení:

$$a_t = \frac{v_2 - v_1}{t} = \frac{(94,44 - 113,89) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}{7 \text{ s}} = -2,78 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Normálové zrychlení na konci kruhové dráhy:

$$a_n = \frac{v_2^2}{r} = \frac{(94,44 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{1\,500 \text{ m}} = 5,95 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Celkové zrychlení letounu na konci zatáčky:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(-2,78)^2 + 5,95^2} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 6,57 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Dráha s na kruhovém oblouku:

$$s = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot t = \frac{(113,89 + 94,44) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}{2} \cdot 7 \text{ s} = 729,2 \text{ m}.$$

Úhel φ kruhového oblouku v radiánech:

$$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{729,2 \text{ m}}{1\,500 \text{ m}} = 0,486 \text{ rad}.$$

Úhel φ ve stupních:

$$\varphi^\circ = \varphi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 0,486 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 27,8^\circ.$$

Příklad 31.

Elektromotor se rozbíhá z klidu za čas $t = 3$ s na otáčky $n = 1\,435 \text{ min}^{-1}$.

Určete:

- úhlovou rychlost na konci rozběhu,
- úhlové zrychlení,
- kolikrát se otočí hřídel při rozběhu.

Řešení

Úhlová rychlost na konci rozběhu:

$$\omega = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot \frac{1\,435}{60} \text{ s}^{-1} = 157,27 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Úhlové zrychlení:

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{157,27 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{3 \text{ s}} = 52,42 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Úhlová dráha:

$$\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2 = \frac{52,42 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} (3 \text{ s})^2}{2} = 235,89 \text{ rad}.$$

Celkový počet obrátek při rozběhu:

$$i = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{235,89 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \approx 37,5 \text{ obrátek}.$$

Příklad 32.

Kolo se roztáčí z klidu, a to s úhlovým zrychlením $\varepsilon = 3,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$. Kolikrát se otočí za 12 s svého otáčení a jaké budou jeho otáčky na konci rozběhu?

Řešení

Úhlová dráha:

$$\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 3,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (12 \text{ s})^2 = 216 \text{ rad}.$$

Celkový počet obrátek kola:

$$i = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{216 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \approx 34 \text{ obrátek}.$$

Úhlová rychlost na konci rozběhu:

$$\omega = \varepsilon \cdot t = 3,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 12 \text{ s} = 38,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Otáčky na konci rozběhu:

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{38,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2\pi \text{ rad}} = 6,11 \text{ s}^{-1}.$$

Tabulka 2.4. Pohyb rovnoměrně zpomalený pro $v > 0$, případně $\omega > 0$

Zpomalení ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) $a = \frac{v_0 - v}{t} = \frac{v_0^2 - v^2}{2s}$	Úhlové zpomalení ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$) $\varepsilon = \frac{\omega_0 - \omega}{t} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\varphi}$
Rychlost ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) $v = v_0 - a \cdot t = \sqrt{v_0^2 - 2a \cdot s} = v_0 - \frac{2s}{t}$	Úhlová rychlost ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) $\omega = \omega_0 - \varepsilon \cdot t = \sqrt{\omega_0^2 - 2\varepsilon \cdot \varphi} = \omega_0 - \frac{2\varphi}{t}$
Dráha (m) $s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = v_0 \cdot t - \frac{a \cdot t^2}{2} = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}$	Úhlová dráha – úhel (rad) $\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t = \omega_0 \cdot t - \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\varepsilon}$
Čas (s) $t = \frac{v_0 - v}{a} = \frac{2s}{v_0 + v}$	Čas (s) $t = \frac{\omega_0 - \omega}{\varepsilon} = \frac{2\varphi}{\omega_0 + \omega}$

Při nulových konečných rychlostech se výrazy v tab. 2.4 zjednoduší, za v a ω dosazujeme nulové hodnoty.

Příklad 33.

Kotouč o průměru $D = 320 \text{ mm}$ se má zastavit za čas $t = 1,5 \text{ s}$, přičemž se nemá otočit více než 7krát. Jaké smějí být největší počáteční otáčky a jaké je potom zpoždění na obvodě kotouče, považuje-li se pohyb za rovnoměrně zpožděný?

Řešení

Počáteční úhlová rychlost:

$$\varphi = \frac{1}{2} \omega_0 \cdot t \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\varphi}{t} =$$

$$= \frac{2 \cdot 7 \cdot 2\pi \text{ rad}}{1,5 \text{ s}} = 58,64 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Počáteční otáčky:

$$n_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{58,64 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2\pi \text{ rad}} = 9,33 \text{ s}^{-1}.$$

Úhlové zpoždění:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{58,64 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{1,5 \text{ s}} = 39,09 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Tečné zpoždění na obvodu kotouče:

$$a_t = R \cdot \varepsilon = \frac{D}{2} \cdot \varepsilon = \frac{0,320 \text{ m}}{2} \cdot 39,09 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} = 6,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Příklad 34.

Osobní výtah zastavuje z rovnoměrného pohybu za 1,2 s. Původní otáčky elektromotoru jsou $n_0 = 1\,450 \text{ min}^{-1}$.

Určete:

- původní úhlovou rychlost ω_0 ,
- průměrné úhlové zpoždění ε ,
- počet obrátek i než se hřídel zastaví.

Řešení

Původní úhlová rychlost:

$$\omega_0 = 2\pi \cdot n_0 = 2\pi \text{ rad} \cdot \frac{1\,450}{60} \text{ s}^{-1} = 151,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Průměrné úhlové zpoždění:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{151,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{1,2 \text{ s}} = 126,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Úhlová dráha:

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega_0 \cdot t - \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} = \\ &= 151,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 1,2 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 126,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} (1,2 \text{ s})^2 = \\ &= 91,08 \text{ rad}. \end{aligned}$$

Počet obrátek i než se hřídel zastaví:

$$i = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{91,08 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = 14,5 \text{ obrátek}.$$

Příklad 35.

Setrvačnick se otáčí otáčkami $n_0 = 1\,450 \text{ min}^{-1}$. Po připojení k pracovnímu stroji pak klesnou otáčky za 2 s na $n_1 = 1\,380 \text{ min}^{-1}$.

Určete:

- úhlové rychlosti ω_0 a ω_1 ,
- průměrné úhlové zpoždění ε ,
- počet proběhlých obrátek i během připojování pracovního stroje.

Řešení

Úhlové rychlosti:

$$\omega_0 = 2\pi \cdot n_0 = 2\pi \text{ rad} \cdot \frac{1\,450 \text{ s}^{-1}}{60} = 151,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\omega_1 = 2\pi \cdot n_1 = 2\pi \text{ rad} \cdot \frac{1\,380 \text{ s}^{-1}}{60} = 144,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Průměrné úhlové zpoždění:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0 - \omega_1}{t} = \frac{(151,8 - 144,5) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2 \text{ s}} = 3,65 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Úhlová dráha:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\omega_0 + \omega_1}{2} \cdot t = \\ &= \frac{(151,8 + 144,5) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2} \cdot 2 \text{ s} = 296,3 \text{ rad}. \end{aligned}$$

Počet proběhlých obrátek i během připojování pracovního stroje:

$$i = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{296,3 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \approx 47 \text{ obrátek}.$$

Příklad 36.

Kolo se otáčí úhlovou rychlostí $\omega_0 = 55 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete rychlost ω_1 za čas $t = 5 \text{ s}$, jestliže zpomaluje s průměrným úhlovým zpomalením $\varepsilon = 0,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$. Kolik obrátek během zpomalování kolo vykoná?

Řešení

Úhlová dráha:

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega_0 \cdot t - \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2 = \\ &= 55 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 5 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 0,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} (5 \text{ s})^2 = \\ &= 268,75 \text{ rad}. \end{aligned}$$

Počet vykonaných obrátek:

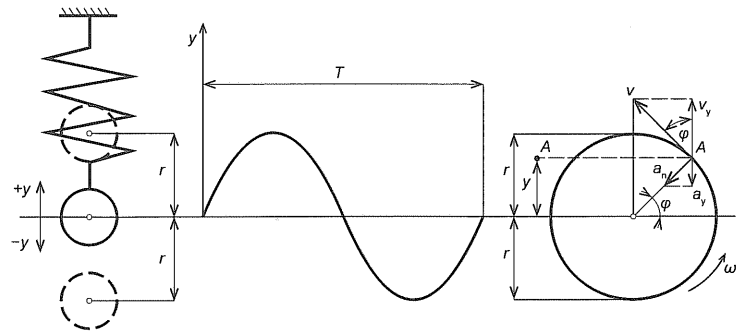
$$i = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{268,75 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = 42,8 \text{ obrátek}.$$

Úhlová rychlost:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2\varphi}{t} - \omega_0 = \\ &= \frac{2 \cdot 268,75 \text{ rad}}{5 \text{ s}} - 55 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 52,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Kontrolní otázky

1. Určete charakteristiku křivočarého pohybu bodu.
2. Jaký směr má rychlost bodu při křivočarém pohybu?
3. Jaká zrychlení má bod při obecném křivočarém pohybu. Jaká je jejich vzájemná poloha?
4. Definujte úhlovou rychlost. Jaký je její rozměr?
5. Jaký je vztah mezi úhlovou a obvodovou rychlostí při rovnoměrném pohybu bodu po kružnici?
6. Napište vztah mezi úhlovou rychlostí a otáčkami při rovnoměrném pohybu bodu po kružnici?
7. Co je perioda?
8. Napište vztah pro dostředivé zrychlení.
9. Jak je definováno úhlové zrychlení, jaký je jeho rozměr?
10. Jaký je vztah mezi úhlovým a tečným zrychlením?
11. Uveďte analogii mezi přímočarým a rotačním pohybem.



Obr. 2.25

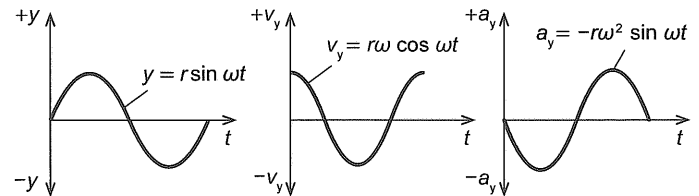
Z obrázku vyplývá:

$$y = r \cdot \sin \varphi = r \cdot \sin \omega t, \quad (2.43)$$

$$v_y = v \cdot \cos \varphi = r \cdot \omega \cdot \cos \omega t, \quad (2.44)$$

$$a_y = -a_n \cdot \sin \varphi = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t = -\omega^2 \cdot y. \quad (2.45)$$

Průběhy veličin jsou znázorněny na obr. 2.26.

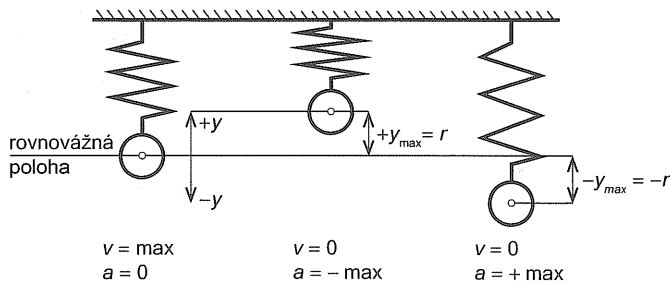


Obr. 2.26

Při harmonickém pohybu se body tělesa pravidelně pohybují kolem rovnovážné polohy (obr. 2.24), vykonávají kmitavý pohyb. Výchylky, rychlosti a zrychlení při harmonickém pohybu mají sinusový, nebo kosinusový průběh.

Příkladem harmonického pohybu je kmitání kuličky zavěšené na svislé pružině (viz obr. 2.24). Budeme uvažovat netlumené kmitání. Kulička kmitá kolem rovnovážné polohy. Okamžitou vzdálenost od rovnovážné polohy nazýváme výchylkou a největší výchylku amplitudou.

Při výchylce rovné amplitudě bude rychlost kuličky nulová a zrychlení maximální. Při průchodu kuličky rovnovážnou polohou bude rychlost maximální a zrychlení nulové. Vyplývá to i ze vztahů (2.44) a (2.45).



Obr. 2.24

Harmonický pohyb si můžeme také představit jako pohyb svislého průmětu rovnoměrného pohybu bodu po kružnici při konstantní úhlové rychlosti ω (obr. 2.25). Stín bodu A vykonává harmonický pohyb.

Doba jedné otáčky (doba jednoho kmitu):

$$T = \frac{\varphi_{\text{otáčky}}}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} \text{ (s)}. \quad (2.46)$$

Počet kmitů za jednu sekundu (frekvence):

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ (s}^{-1}\text{)}. \quad (2.47)$$

Průběh závislosti $v_y - y$:

$$v_y = r \cdot \omega \cdot \cos \varphi = r \cdot \omega \cdot \frac{x}{r} = \omega \cdot x.$$

Vodorovnou souřadnici x vyloučíme užitím rovnice kružnice:

$$x = \sqrt{r^2 - y^2},$$

$$v_y = \omega \cdot \sqrt{r^2 - y^2},$$

$$v_y^2 = \omega^2 \cdot r^2 - \omega^2 \cdot y^2.$$

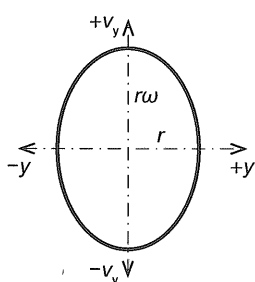
Po úpravách získáme vztah

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{v_y^2}{r^2 \cdot \omega^2} = 1. \quad (2.48)$$

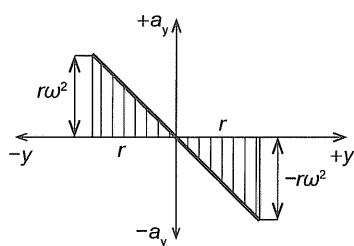
Grafickým znázorněním této rovnice v souřadnicích $y - v_y$ je elipsa o velikosti poloos r a $r\omega$ (obr. 2.27) vyjadřující skutečnost, že při průchodu středem ($y = 0$) je rychlost maximální a v úvratích ($y = \pm r$) je rychlost v_y nulová. Průběh závislosti $a_y - y$:

$$a_y = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin \varphi = -r \cdot \omega^2 \cdot \frac{y}{r} = -\omega^2 \cdot y. \quad (2.49)$$

Rovnice je v souřadnicích $a_y - y$ rovnicí přímky se zápornou směrnici $-\omega^2$, obr. 2.28.



Obr. 2.27



Obr. 2.28

Příklad 37.

Kulička o hmotnosti $m = 0,5 \text{ kg}$ je umístěna na svislé pružině (viz obr. 2.24). Vychýlíme-li kuličku z rovnovážné polohy o $r = 0,15 \text{ m}$, je přitahována silou $F = 25 \text{ N}$. Vypočítejte dobu kmitu, jestliže kuličku necháme netlumeně kmitat.

Řešení

Ze 2. Newtonova zákona:

$$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{25 \text{ N}}{0,5 \text{ kg}} = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = a_{y\max}$$

$$a_{y\max} = r \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{y\max}}{r}} = \sqrt{\frac{50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{0,15 \text{ m}}} = 18,26 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Doba kmitu:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{18,26 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}} = 0,34 \text{ s}$$

Příklad 38.

Těleso o hmotnosti $m = 0,5 \text{ kg}$ kmitá na svislé pružině s konstantou $K = 1,06 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$. Určete dobu kmitu a frekvenci kmitání.

Řešení

Ze 2. Newtonova zákona:

$$F = m \cdot a_y = m \cdot \omega^2 \cdot y$$

Podle Hookeova zákona:

$$F = K \cdot y$$

Porovnáním těchto dvou rovnic určíme dobu kmitu:

$$K = m \cdot \omega^2 = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,5 \text{ kg}}{1\,060 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}} = 0,14 \text{ s}$$

Frekvence kmitání:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,14 \text{ s}} = 7,14 \text{ s}^{-1}$$

Příklad 39.

Kulička zavěšená na svislé pružině koná harmonický pohyb. Určete její maximální rychlost a maximální zrychlení, jestliže doba kmitu $T = 2,5 \text{ s}$ a amplituda $r = 0,15 \text{ m}$. Dále vypočítejte okamžitou výchylku, okamžitou rychlost a okamžité zrychlení na konci 7. sekundy.

Řešení

Kruhová frekvence:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{2,5 \text{ s}} = 2,513\,27 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Maximální rychlost se určí podle rovnice (2.44), jestliže $\cos \omega t = \pm 1$. To je v případech, když $\varphi = \omega \cdot t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ atd.

$$|v_{\max}| = \omega \cdot r = 2,513\,27 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0,15 \text{ m} = 0,377 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Maximální zrychlení se určí podle rovnice (2.45), jestliže $\sin \omega t = \pm 1$. To je v případech, když:

$$\varphi = \omega \cdot t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \text{ atd.}$$

$$|a_{\max}| = \omega^2 \cdot r = (2,513\,27 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 \cdot 0,15 \text{ m} = 1,263 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Výchylka na konci 7. sekundy:

$$y = r \cdot \sin \omega \cdot t = r \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t =$$

$$= 0,15 \text{ m} \cdot \sin \frac{2\pi}{2,5 \text{ s}} \cdot 7 \text{ s} = -0,143 \text{ m}.$$

Okamžitá rychlost na konci 7. sekundy:

$$v = r\omega \cdot \cos \omega t =$$

$$= 0,1 \text{ m} \cdot 2,513 \text{ 27 rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \cos \frac{2\pi}{2,5 \text{ s}} \cdot 7 \text{ s} =$$

$$= +0,078 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Okamžité zrychlení na konci 7. sekundy:

$$a = -\omega^2 \cdot y = -(2,513 \text{ 27 rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 \cdot (-0,143 \text{ m}) =$$

$$= +0,903 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

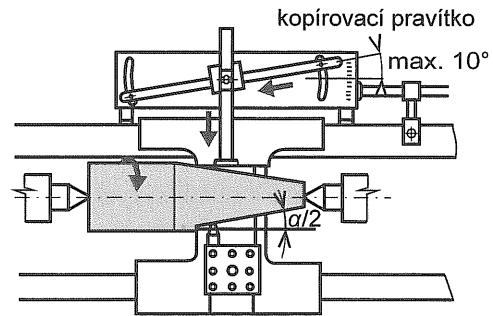
Hmotný bod má zápornou výchylku a vrací se do rovnovážné polohy s kladnou velikostí rychlosti a s kladným zrychlením.

Kontrolní otázky

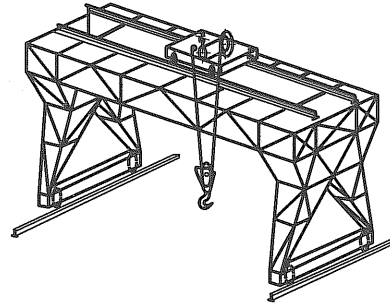
1. Charakterizujte harmonický pohyb. Uveďte příklady z praxe.
2. Vysvětlete pojmy: výchylka, amplituda.
3. Nakreslete diagramy $x - t$, $v - t$, $a - t$ harmonického pohybu.
4. Uveďte základní rovnice pro výchylku, rychlost a zrychlení harmonického pohybu.
5. Jaký je základní vztah pro výpočet periody?
6. Jaký je průběh závislosti $v_y - y$?
7. Jaký je průběh závislosti $a_y - y$?

2.6 SKLÁDÁNÍ A ROZKLÁDÁNÍ POHYBŮ

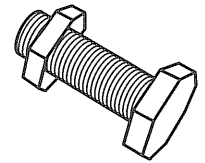
Těleso nebo hmotný bod může vykonávat dva nebo více současných pohybů. Příkladem může být soustružení kuželů pomocí kopírovacího pravítka. Využíváme přitom současný pohyb podélného a příčného posuvu soustruhu (obr. 2.29). Obdobně je tomu u kozového jeřábu s jeřábovým vozíkem a zavěšeným břemenem. Jeřáb pojíždí podélným pohybem po kolejnicích. Jeřábový vozík se současně pohybuje napříč mostem jeřábu a břemeno se zdvihá kolmo vzhůru. Výsledný pohyb je prostorový (obr. 2.30). Pohyb břemene idealizujeme, protože ve skutečnosti se břemeno na háku kýve. Také matice šroubu při šroubování koná složený pohyb, rotační a posuvný (obr. 2.31).



Obr. 2.29



Obr. 2.30



Obr. 2.31

Zavádíme pojmy:

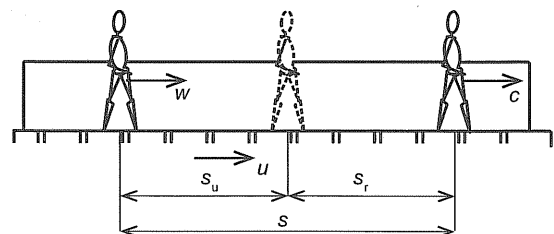
Absolutní pohyb – je to pohyb vůči pozorovateli na nehybném místě na Zemi.

Relativní pohyb – např. pohyb jeřábového vozíku vůči jeřábové konstrukci.

Obdobně lze definovat i absolutní a relativní rychlosti.

2.6.1 Složený rovnoměrný pohyb v rovnoběžných přímkách

Na obr. 2.32 je znázorněn pochodující chodec na pohyblivém chodníku, který se vůči Zemi pohybuje unášivou rychlostí u . Chodec se pohybuje ve stejném smyslu relativní rychlostí w vůči chodníku.



Obr. 2.32

Za čas t se chodník posune o vzdálenost s_u a chodec na chodníku o hodnotu s_r . Absolutní dráha chodce vůči Zemi má velikost:

$$s = s_u + s_r = u \cdot t + w \cdot t = t(u + w). \quad (2.50)$$

Absolutní dráha má také velikost:

$$s = c \cdot t, \quad (2.51)$$

kde c je hodnota absolutní rychlosti.

Porovnáním předchozích dvou rovnic získáme vztah:

$$c = u + w. \quad (2.52)$$

Absolutní rychlost pohybu v rovnoběžných přímkách získáme jako součet unášivé a relativní rychlosti.

Pokud by chodec šel po chodníku opačnou rychlostí, potom platí rovnice:

$$c = u - w. \quad (2.53)$$

Příklad 40.

Paluba lodi má délku $s_r = 20$ m. Lodník prochází podél paluby relativní rychlostí $w = 1,8$ km.h⁻¹ ve směru proudu řeky. Loď se pohybuje vůči břehu unášivou rychlostí $u = 18$ km.h⁻¹. Jaká je absolutní rychlost a absolutní dráha při pohybu lodníka v obou směrech?

Řešení

Unášivá rychlost lodi:

$$u = 18 \text{ km. h}^{-1} = \frac{18}{3,6} \text{ m. s}^{-1} = 5 \text{ m. s}^{-1}.$$

Relativní rychlost lodníka:

$$w = 1,8 \text{ km. h}^{-1} = \frac{1,8}{3,6} \text{ m. s}^{-1} = 0,5 \text{ m. s}^{-1}.$$

Výsledné absolutní rychlosti:

$$c_1 = u + w = (5 + 0,5) \text{ m. s}^{-1} = 5,5 \text{ m. s}^{-1} = 19,8 \text{ km. h}^{-1}.$$

$$c_2 = u - w = (5 - 0,5) \text{ m. s}^{-1} = 4,5 \text{ m. s}^{-1} = 16,2 \text{ km. h}^{-1}.$$

Čas potřebný k průchodu paluby lodníkem:

$$t = \frac{s_r}{w} = \frac{20 \text{ m}}{0,5 \text{ m. s}^{-1}} = 40 \text{ s}.$$

Absolutní dráhy lodníka vůči Zemi:

$$s_1 = c_1 \cdot t = 5,5 \text{ m. s}^{-1} \cdot 40 \text{ s} = 220 \text{ m},$$

$$s_2 = c_2 \cdot t = 4,5 \text{ m. s}^{-1} \cdot 40 \text{ s} = 180 \text{ m}.$$

Příklad 41.

Veslař skifař urazí na jezeře na klidné vodě závodní dráhu dlouhou 2 km za 8 minut. Jakou dráhu by při stejné intenzitě veslování urazil na řece, jestliže by vesloval:

a) po proudu řeky, jehož rychlost

$$u = 2,7 \text{ km. h}^{-1} = 0,75 \text{ m. s}^{-1},$$

b) proti proudu řeky.

Řešení

Relativní rychlost veslaře:

$$w = \frac{s_r}{t} = \frac{2000 \text{ m}}{8 \cdot 60 \text{ s}} = 4,17 \text{ m. s}^{-1}.$$

Absolutní rychlost veslaře po proudu:

$$c_1 = u + w = (0,75 + 4,17) \text{ m. s}^{-1} = 4,92 \text{ m. s}^{-1}.$$

Absolutní dráha veslaře po proudu:

$$s_1 = c_1 \cdot t = 4,92 \text{ m. s}^{-1} \cdot 480 \text{ s} = 2362 \text{ m}.$$

Absolutní rychlost veslaře proti proudu:

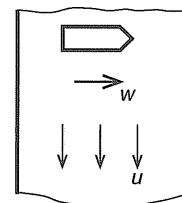
$$c_2 = u - w = (0,75 - 4,17) \text{ m. s}^{-1} = -3,42 \text{ m. s}^{-1}.$$

Absolutní dráha veslaře proti proudu:

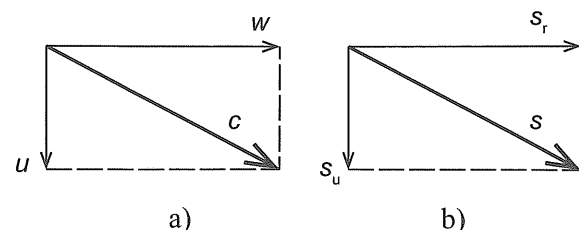
$$s_2 = c_2 \cdot t = -3,42 \text{ m. s}^{-1} \cdot 480 \text{ s} = -1642 \text{ m}.$$

2.6.2 Složený rovnoměrný pohyb v kolmých přímkách

Nechť unášivá rychlost proudu řeky je u . Loďka pluje přes řeku kolmo relativní rychlostí w (obr. 2.33). Má se určit výsledná absolutní dráha a výsledná absolutní rychlost loďky (obr. 2.34).



Obr. 2.33



Obr. 2.34

Poznámka: Unášivá rychlost proudu řeky u není ve skutečnosti konstantní podél průřezu říčního proudu. Největší rychlost je uprostřed řeky, směrem ke břehům se rychlost zmenšuje. U břehu je rychlost nulová. Rychlostní profil proudu je přibližně parabolický.

Absolutní rychlost c získáme vektorovým součtem rychlosti unášivé u a rychlosti relativní w :

$$\vec{c} = \vec{u} + \vec{w}; \quad c = \sqrt{u^2 + w^2}. \quad (2.54)$$

Pokud budeme uvažovat dráhu ve stojaté vodě, potom:

$$s_r = w \cdot t.$$

Při působení říčního proudu se loď dostane po směru proudu do vzdálenosti:

$$s_u = u \cdot t.$$

Ve skutečnosti se oba pohyby konají současně a loď se pohybuje po úhlopříčce obdélníka se stranami s_u a s_r podle obr. 2.34. Potom platí:

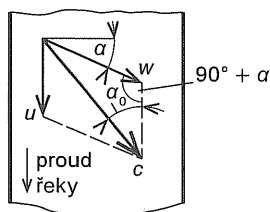
$$\vec{s} = \vec{s}_u + \vec{s}_r; \quad s = \sqrt{s_u^2 + s_r^2}. \quad (2.55)$$

2.6.3 Složený rovnoměrný pohyb v přímkách k sobě kosých

Příklad s loďkou upravíme tak, že loďka bude mít relativní dráhu odkloněnou od příčného kolmého směru o úhel α (obr. 2.35).

Opět bude platit:

$$\vec{c} = \vec{u} + \vec{w}; \quad \vec{s} = \vec{s}_u + \vec{s}_r$$



Obr. 2.35

Algebraicky vypočítáme absolutní rychlost loďky pomocí kosinové věty:

$$c = \sqrt{u^2 + w^2 - 2u \cdot w \cdot \cos(90^\circ + \alpha)} = \sqrt{u^2 + w^2 + 2u \cdot w \cdot \sin \alpha}. \quad (2.56)$$

Relativní dráha s_r :

$$s_r = \frac{s}{\cos \alpha}. \quad (2.57)$$

Doba plavby lodi po relativní dráze:

$$t = \frac{s_r}{w}. \quad (2.58)$$

Unášivá dráha proudu:

$$s_u = u \cdot t. \quad (2.59)$$

Absolutní dráha loďky:

$$s = \sqrt{s_u^2 + s_r^2 - 2s_u \cdot s_r \cdot \cos(90^\circ + \alpha)} = \sqrt{s_u^2 + s_r^2 + 2s_u \cdot s_r \cdot \sin \alpha}. \quad (2.60)$$

Odklon směru plavby α_0 od proudu řeky určíme ze sinové věty:

$$\frac{\sin \alpha_0}{w} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{c} \Rightarrow \sin \alpha_0 = \frac{w}{c} \cdot \sin(90^\circ + \alpha) = \frac{w}{c} \cdot \cos \alpha.$$

Příklad 42.

Malý parník pluje stálou unášivou rychlostí $u = 9 \text{ km.h}^{-1}$ ($= 2,5 \text{ m.s}^{-1}$). Šikmo napříč palubou jde výletník relativní rychlostí $w = 2,7 \text{ km.h}^{-1}$ ($= 0,75 \text{ m.s}^{-1}$). Směr chůze výletníka je odkloněn od kolmého směru na unášivou rychlost o úhel $\alpha = 15^\circ$. Určete absolutní rychlost výletníka a jeho absolutní dráhu, jestliže paluba je široká $s = 10 \text{ m}$.

Řešení

Absolutní rychlost výletníka:

$$c = \sqrt{u^2 + w^2 + 2uw \cdot \sin \alpha} = \sqrt{9^2 + 2,7^2 + 2 \cdot 9 \cdot 2,7 \cdot \sin 15^\circ} \text{ km.h}^{-1} = 10,04 \text{ km.h}^{-1} = 2,79 \text{ m.s}^{-1}.$$

Relativní dráha:

$$s_r = \frac{s}{\cos \alpha} = \frac{10 \text{ m}}{\cos 15^\circ} = 10,35 \text{ m}.$$

Doba chůze výletníka po relativní dráze:

$$t = \frac{s_r}{w} = \frac{10,35 \text{ m}}{0,75 \text{ m.s}^{-1}} = 13,8 \text{ s}.$$

Unášivá dráha proudu:

$$s_u = u \cdot t = 2,5 \text{ m.s}^{-1} \cdot 13,8 \text{ s} = 34,5 \text{ m}. \quad (2.61)$$

Absolutní dráha výletníka:

$$s = \sqrt{s_u^2 + s_r^2 + 2s_u \cdot s_r \cdot \sin \alpha} = \sqrt{34,5^2 + 10,35^2 + 2 \cdot 34,5 \cdot 10,35 \cdot \sin 15^\circ} \text{ m} = 38,5 \text{ m}.$$

Absolutní dráhu můžeme také vypočítat podle rovnice:

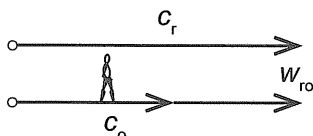
$$s = c \cdot t = 2,79 \text{ m.s}^{-1} \cdot 13,8 \text{ s} = 38,5 \text{ m}.$$

2.6.4 Relativní pohyb rovnoměrný v rovnoběžných přímkách

Nechť na dvojkolejných železničních trati jedou dva vlaky stejným směrem. Nejjednodušší případ nastává, jestliže oba vlaky jedou stejnou rychlostí. Pozorovatelům z obou vlaků se zdá, jakoby se vlaky vzájemně nepohybovaly. Jejich relativní rychlosti jsou nulové.

Uvažujme dále, že rychlík jede rychlostí $120 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ a ve stejném směru osobní vlak rychlostí $90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Sedíme-li v osobním vlaku, zdá se nám, že rychlík se pohybuje směrem dopředu (obr. 2.36).



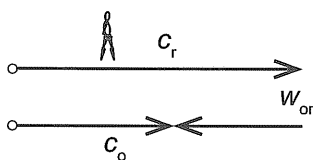
Obr. 2.36

Relativní rychlost rychlíku vůči osobnímu vlaku je:

$$w_{ro} = c_r - c_o = (120 - 90) \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = 30 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}. \quad (2.62)$$

V tomto případě rychlost osobního vlaku odečítáme.

Sedíme-li v rychlíku a pozorujeme pohyb osobního vlaku, zdá se nám, že osobní vlak se pohybuje dozadu.



Obr. 2.37

Relativní rychlost osobního vlaku vůči rychlíku má velikost podle obr. 2.37 a má zápornou hodnotu:

$$w_{or} = c_o - c_r = -30 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}. \quad (2.63)$$

Jestliže rychlík a osobní vlak jedou opačnými směry, potom se jejich absolutní rychlosti sčítají:

$$w_{or} = c_o - (-c_r) = c_o + c_r = (90 + 120) \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = 210 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

Obdobné vztahy platí i pro vzdálenosti:

$$s_{ro} = t \cdot w_o = t [c_o + (\pm c_r)]. \quad (2.64)$$

Příklad 43.

Po dvojkolejných železničních trati jedou proti sobě dvě soupravy příměstských vlaků, které jsou stejně dlouhé: $l = 96 \text{ m}$. Strojvůdce prvního vlaku odečítá na tachometru absolutní rychlost svého vlaku $c_1 = 90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Druhý vlak projede celý kolem strojvůdce za čas $t = 2 \text{ s}$. Určete absolutní rychlost druhého vlaku.

Řešení

Absolutní rychlost prvního vlaku:

$$c_1 = \frac{90 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Vlaky se míjejí relativní rychlostí $w = c_1 + c_2$.

$$s_r = l = (c_1 + c_2) \cdot t \Rightarrow c_2 = \frac{l}{t} - c_1 = \frac{96 \text{ m}}{2 \text{ s}} - 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 23 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 82,8 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

Protijedoucí vlak jede rychlostí $82,8 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Příklad 44.

Chodec jde podél silnice konstantní rychlostí c_2 . Protijedoucí autobus ho míjí každých 10 minut. Z opačného směru jedoucí autobus ho předjíždí každých 15 minut. Určete časový interval autobusů na této lince a poměr rychlostí autobusu c_1 a chodce c_2 .

Řešení

Autobusy jezdí v obou směrech ve stejných intervalech t . Jestliže je rychlost autobusů c_1 , potom vzdálenost mezi sousedními autobusy je $s = c_1 \cdot t$. Doba, za kterou chodec potká další protijedoucí autobus, je t_1 . Doba, za kterou potká chodec autobus jedoucí stejným směrem, je t_2 .

Platí:

$$t_1 = \frac{s}{w_{r1}} = \frac{s}{c_1 + c_2} = \frac{c_1 \cdot t}{c_1 + c_2} \quad \text{a}$$

$$t_2 = \frac{s}{w_{r2}} = \frac{s}{c_1 - c_2} = \frac{c_1 \cdot t}{c_1 - c_2}.$$

Obě rovnice upravíme:

$$t_1 \cdot c_1 + t_1 \cdot c_2 = c_1 \cdot t, \quad (\text{A})$$

$$t_2 \cdot c_1 - t_2 \cdot c_2 = c_1 \cdot t. \quad (\text{B})$$

Rovnici (A) vynásobíme t_2 , rovnici (B) vynásobíme t_1 . Obě rovnice sečteme. Získáme:

$$2t_1 \cdot t_2 \cdot c_1 = c_1 \cdot t (t_1 + t_2), \text{ z tohoto vztahu:}$$

$$t = \frac{2t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 15}{10 + 15} \text{ min} = 12 \text{ min}.$$

Za t_1, t_2 a t dosadíme, např. do rovnice (A):

$$10c_1 + 10c_2 = 12c_1 \Rightarrow c_1 = 5c_2.$$

Rychlost autobusu je 5krát větší než rychlost chodce. Časový interval autobusů je 12 minut.

Úlohy

① Vlak projíždí tunelem dlouhým 220 m. Od okamžiku, kdy do tunelu vjede lokomotiva, až do okamžiku, kdy poslední vagón opustí tunel, uplyne 19 sekund. Od tohoto okamžiku uplyne dalších 42 sekund, než lokomotiva přijede k návěští, které je vzdáleno 1 km od tunelu.

Určete rychlost vlaku, který jede stálou rychlostí a jeho délku.

(rychlost vlaku $v = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, délka vlaku $l = 160 \text{ m}$)

- ② Vlak jede stálou rychlostí po přímé trati, podél níž vede silnice, po které se pohybují dva automobily. První jede stálou rychlostí $54 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ proti směru pohybu vlaku, druhý jede stálou rychlostí $72 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ ve směru pohybu vlaku. První auto projede podél celého vlaku za 12 s , druhé za 72 s . Vypočítejte rychlost vlaku a jeho délku.

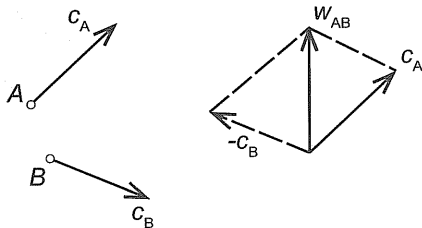
(rychlost vlaku je $54 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, jeho délka je 360 m)

V obou případech řešte dvě rovnice o dvou neznámých.

2.6.5 Relativní pohyb rovnoměrný v přímkách k sobě kosých

Při pohybu dvou bodů, které se pohybují různými směry, provedeme obdobné úvahy jako u pohybu v rovnoběžných přímkách. Předpokládejme rychlosti bodu A c_A a bodu B c_B .

Bod B , z něhož pozorujeme relativní pohyb jiného hmotného bodu, i zde zastavíme, takže k pohybu bodu A musíme také připojit opačný absolutní pohyb (rychlost $-c_B$) bodu B (obr. 2.38). Úhlopříčka rychlostního rovnoběžníka je hledaná relativní rychlost w_{AB} .



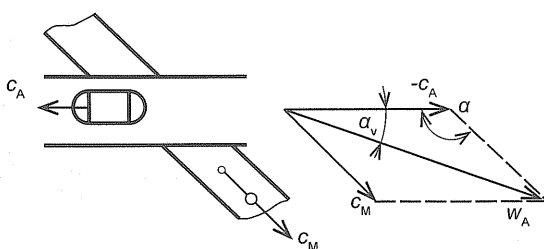
Obr. 2.38

Relativní rychlost bodu B , která se jeví pozorovateli z bodu A , leží na opačné polopřímce než relativní rychlost w_{AB} a má stejnou absolutní velikost.

Příklad 45.

Na mimoúrovňové silnici (obr. 2.39) jede cestující v autobusu západním směrem rychlostí $c_A = 90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ a pozoruje motocyklistu, který se pohybuje jihovýchodním směrem rychlostí $c_M = 80 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Určete graficky i početně relativní rychlost motocyklisty, která se jeví cestujícímu v autobusu. Jaká je odchylka relativní rychlosti w_A od východního směru.

Měřítka rychlostí: $1 \text{ mm} \cong 4 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$



Obr. 2.39

A) Početní řešení

$$\begin{aligned} w_A &= \sqrt{c_A^2 + c_M^2 - 2c_A \cdot c_M \cdot \cos \alpha} = \\ &= \sqrt{90^2 + 80^2 - 2 \cdot 90 \cdot 80 \cdot \cos 135^\circ} \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = \\ &= 157,1 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}. \end{aligned}$$

Odchylka vektoru relativní rychlosti od východního směru:

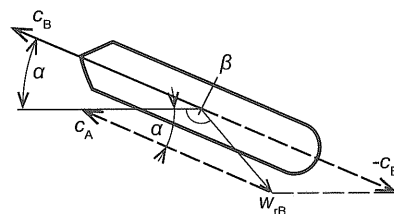
$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_v}{c_M} &= \frac{\sin \alpha}{w_A} \Rightarrow \sin \alpha_v = \sin \alpha \cdot \frac{c_M}{w_A} = \\ &= \sin 135^\circ \cdot \frac{80 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}}{157,1 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} = 0,360 08 \Rightarrow \alpha_v = 21,1^\circ. \end{aligned}$$

Příklad 46.

V jakém směru vlaje vlajka lodi (obr. 2.40), která pluje směrem západoseverozápadním (pod úhlem $\alpha = 22,5^\circ$) stálou rychlostí $c_B = 50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, jestliže vítr vane směrem od východu rychlostí $c_A = 30 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Řešení

Kdyby vál pouze vítr a loď stála, postavila by se vlajka ve směru větru. Kdyby naopak bylo bezvětří a loď plula, postavila by se vlajka v opačném smyslu než je smysl rychlosti lodi. Pluje-li loď za větrem, postaví se vlajka ve směru relativní rychlosti lodi a větru, tj. ve směru výslednice absolutní rychlosti větru a opačné absolutní rychlosti lodi (obr. 2.40).



Obr. 2.40

Relativní rychlost větru k lodi vypočítáme z kosinové věty:

$$\begin{aligned} w_{rB} &= \sqrt{c_A^2 + c_B^2 - 2c_A \cdot c_B \cdot \cos \alpha} = \\ &= \sqrt{30^2 + 50^2 - 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot \cos 22,5^\circ} \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = \\ &= 25,06 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \end{aligned}$$

Úhel β vypočítáme z kosinové věty:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{c_A^2 + w_{rB}^2 - c_B^2}{2 \cdot c_A \cdot w_{rB}} = \frac{30^2 + 25,06^2 - 50^2}{2 \cdot 30 \cdot 25,06} = \\ &= -0,64 645, \quad \beta = 130,27^\circ. \end{aligned}$$

2.6.6 Lopatkové stroje

Známé vztahy mezi rychlostmi absolutními, unášivými a relativními využíváme při konstrukci lopatek odstředivých čerpadel, turbokompresorů, ventilátorů, vodních, parních a plynových turbín.

Pracovní stupeň u axiálních strojů je často řešen pomocí nehybného rozváděče (rozváděcího kola) a oběžného kola. V nehybném rozváděči jsou absolutní i relativní rychlosti stejně velké. Aby při průchodu pracovní tekutiny oběžným kolem byl průtok bezrázový a hydraulické ztráty co nejmenší, musí mít relativní rychlost w v oběžném kole vždy směr tečny k lopatce. Z tohoto požadavku určíme tvar lopatky, úhly β .

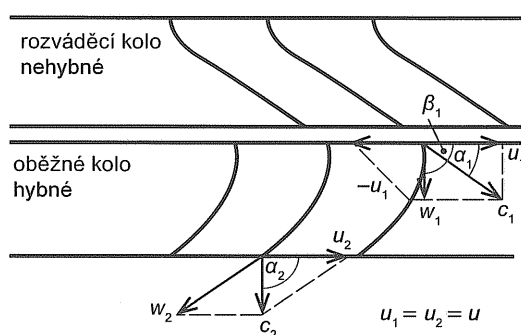
U axiálního stupně (obr. 2.41) uvažujeme stejné unášivé rychlosti na vstupu i výstupu lopatky:

$$u_1 = u_2 = u = \pi \cdot d \cdot n \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

Pro vstup i výstup tekutiny platí vektorové rovnice:

$$\vec{c}_1 = \vec{u}_1 + \vec{w}_1; \quad \vec{c}_2 = \vec{u}_2 + \vec{w}_2. \quad (2.65a,b)$$

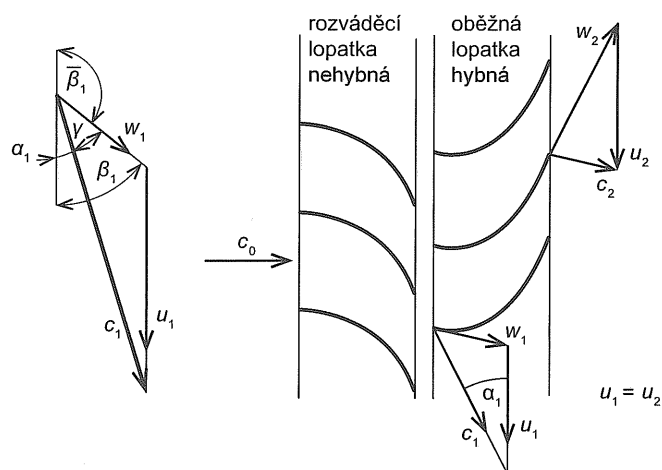
Geometrickým rozdílem absolutní a unášivé rychlosti na vstupu získáme velikost a směr (úhel β_1) relativní rychlosti w_1 , kterou tekutina vstupuje na lopatku oběžného kola. Na výstupu z oběžného kola získáme geometrickým sečtením rychlostí u_2 a w_2 absolutní rychlost c_2 . Pod úhlem α_2 vstupuje tekutina do dalšího rozváděcího kola, jehož vstupní hrana rozváděcí lopatky musí být skloněna právě pod tímto úhlem (obr. 2.41).



Obr. 2.41

Příklad 47.

Průměr oběžného kola axiálního přetlakového stupně parní turbíny (obr. 2.42) má velikost $d = 800$ mm. Turbína je připojena spojkou ke generátoru, který koná $n = 3000$ otáček za minutu. Pára vstupuje do oběžného kola absolutní rychlostí $c_1 = 180 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pod úhlem $\alpha_1 = 18^\circ$. Určete relativní rychlost páry w_1 a úhel sklonu lopatky β_1 .



Obr. 2.42

Řešení

Unášivé rychlosti:

$$u_1 = u_2 = u = \pi \cdot d \cdot n =$$

$$= \pi \cdot 0,8 \text{ m} \cdot \frac{3000}{60} \text{ s}^{-1} = 125,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Relativní rychlost:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{c_1^2 + u_1^2 - 2c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \alpha_1} = \\ &= \sqrt{180^2 + 125,7^2 - 2 \cdot 180 \cdot 125,7 \cdot \cos 18^\circ} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \\ &= 71,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Ze sinové věty vyplývá:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_1}{w_1} &= \frac{\sin \gamma}{u_1} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{u_1}{w_1} \cdot \sin \alpha_1 = \\ &= \frac{125,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{71,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \cdot \sin 18^\circ = 0,54024, \end{aligned}$$

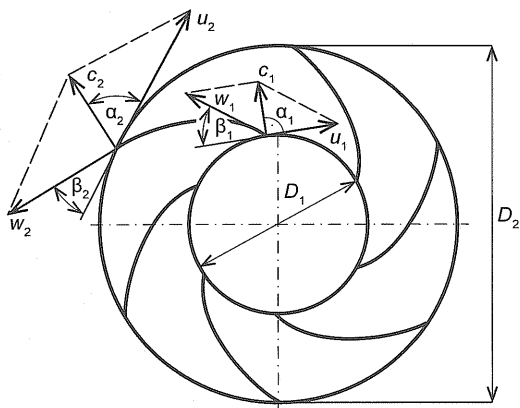
$$\gamma = 32,7^\circ;$$

$$\overline{\beta}_1 = 180^\circ - \alpha_1 - \gamma = 180^\circ - 18^\circ - 32,7^\circ = 129,3^\circ.$$

$$\beta_1 = 180^\circ - \overline{\beta}_1 = 180^\circ - 129,3^\circ = 50,7^\circ$$

Příklad 48.

V oběžném kole radiálního odstředivého čerpadla (obr. 2.43) je na průměru D_1 unášivá rychlost $u_1 = 15,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Absolutní vtoková rychlost vody na lopatku $c_1 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ má radiální směr. Radiální složka absolutní rychlosti se při průchodu oběžným kolem nemění, $c_{m1} = c_{m2} = c_1$. Úhel β_2 se volí podle zkušenosti 25° . Otáčky hřídele čerpadla $n = 1440 \text{ min}^{-1}$. Hydraulická účinnost $\eta_h = 85\%$. Poměr průměrů volte $D_2/D_1 = 2$.



Obr. 2.43

Určete:

- průměry oběžných kol D_1 a D_2 ,
- úhel sklonu lopatky na vstupu β_1 ,
- velikost relativní rychlosti w_1 na vstupu,
- velikost unášivé rychlosti u_2 na výstupu,
- velikost relativní rychlosti w_2 na výstupu,
- velikost absolutní rychlosti c_2 na výstupu,
- velikost úhlu α_2 na výstupu,
- velikost dopravní výšky H (m).

Poznámka: Podle Eulerovy rovnice (bude odvozena ve 3. ročníku) pro radiální lopatkové stroje platí vztah:

$$u_2 \cdot c_2 \cdot \cos \alpha_2 - u_1 \cdot c_1 \cdot \cos \alpha_1 = \frac{Y}{\eta_h} = \frac{g \cdot H}{\eta_h}, \quad (2.66)$$

kde Y je měrná energie předaná oběžným kolem 1 kg kapaliny – aby tato veličina byla co největší, musí se menšenec v Eulerově rovnici rovnat nule a tedy $\alpha_1 = 90^\circ$, což je radiální směr c_1 (viz zadání),

H – dopravní výška – skládá se ze sací a výtlačné výšky a hydraulických ztrát v potrubí; dopravní výška H je vedle dodávaného množství Q hlavním parametrem odstředivého čerpadla.

Řešení

Průměry oběžných kol D_1 a D_2 :

$$u_1 = \pi \cdot D_1 \cdot n \Rightarrow D_1 = \frac{u_1}{\pi \cdot n} = \frac{15,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 60}{\pi \cdot 1440 \text{ s}^{-1}} = 0,2 \text{ m} = 200 \text{ mm}.$$

$$D_2 = 2 D_1 = 2 \cdot 200 \text{ mm} = 400 \text{ mm}.$$

Úhel sklonu lopatky na vstupu β_1 :

$$\tan \beta_1 = \frac{c_1}{u_1} = \frac{5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{15,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 0,331 \Rightarrow \beta_1 = 18,32^\circ.$$

Velikost relativní rychlosti w_1 na vstupu:

$$w_1 = \sqrt{c_1^2 + u_1^2} = \sqrt{5^2 + 15,1^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 15,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Velikost unášivé rychlosti u_2 na výstupu:

$$u_2 = \pi \cdot D_2 \cdot n = \pi \cdot 0,4 \text{ m} \cdot \frac{1440}{60} \text{ s}^{-1} = 30,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Velikost relativní rychlosti w_2 na výstupu:

$$w_2 = \frac{c_{m2}}{\sin \beta_2} = \frac{5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{\sin 25^\circ} = 11,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Velikost absolutní rychlosti c_2 na výstupu:

$$c_2 = \sqrt{u_2^2 + w_2^2 - 2 u_2 \cdot w_2 \cdot \cos \beta_2} = \sqrt{30,2^2 + 11,8^2 - 2 \cdot 30,2 \cdot 11,8 \cdot \cos 25^\circ} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 20,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Velikost úhlu α_2 na výstupu:

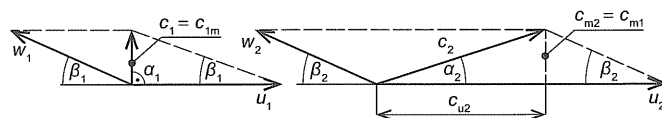
$$\sin \alpha_2 = \frac{c_{m2}}{c_2} = \frac{5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{20,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 0,249 \Rightarrow \alpha_2 = 14,4^\circ.$$

Velikost dopravní výšky H (m) z Eulerovy rovnice:

$$H = \frac{\eta_h}{g} \cdot u_2 \cdot c_2 \cdot \cos \alpha_2 = \frac{0,85}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \cdot 30,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 20,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \cos 14,4^\circ = 51 \text{ m}.$$

B) Grafické řešení (obr. 2.44)

Měřítka rychlostí: 1 mm \equiv 0,5 m·s⁻¹.



Obr. 2.44

Úlohy

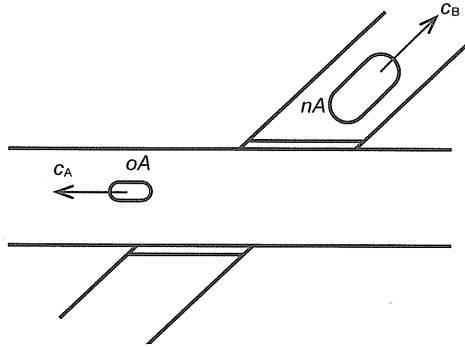
1 Jakou absolutní dráhu (vzhledem k nehybnému stanovišti na Zemi) vykoná průvodčí, který prochází vagónem osobního vlaku o celkové délce 15 m?

- ve směru jízdy,
- proti směru jízdy rychlostí $w = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, jestliže vlak jede rychlostí $c = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

Jaká je absolutní rychlost průvodčího v obou směrech?

(390 m, 26 m·s⁻¹, 360 m, 24 m·s⁻¹)

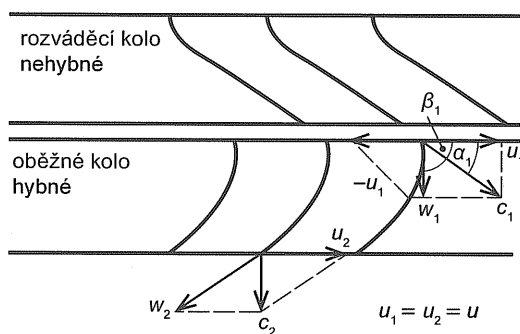
- ② Na mimoúrovňové křižovatce (obr. 2.45) se mívají nákladní a osobní automobil. Vypočítejte relativní rychlost w osobního automobilu, která se jeví pozorovateli z nákladního automobilu. Osobní automobil jede na západ stálou rychlostí $c_A = 90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, nákladní automobil se pohybuje rychlostí $c_B = 80 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ směrem severovýchodním.



Obr. 2.45

$$(w = 157,1 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1})$$

- ③ Oběžné kolo parní turbíny (obr. 2.46) se středním průměrem $D = 310 \text{ mm}$ koná $n = 12\,500 \text{ min}^{-1}$ otáček. Pára vstupuje na oběžnou lopatku pod úhlem $\alpha_1 = 20^\circ$ rychlostí $c_1 = 335 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Vypočítejte obvodovou (unášivou) rychlost u , relativní rychlost w_1 a úhel zakřivení β_1 .



$$(u = 203 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, w_1 = 160 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \beta_1 = 45,7^\circ)$$

Obr. 2.46

- ④ Otovo rádiem řízené letadlo přeletělo hřiště délky 180 m po větru za 7 s, proti větru za 10 s.
- Jaká je vlastní rychlost letadla?
 - Jaká je rychlost větru?
 - Za jak dlouho by letadlo přeletělo hřiště za bezvětří?

Návod: Úloha vede na soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými rychlostmi.

(vlastní rychlost letadla $v = 21,86 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, rychlost větru je $3,86 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $t = 8,23 \text{ s}$)

Kontrolní otázky

- Vysvětlete pojmy: absolutní pohyb a relativní pohyb.
- Určete dráhy a rychlosti při rovnoměrném pohybu v rovnoběžných přímkách.
- Určete dráhy a rychlosti při rovnoměrném pohybu v přímkách k sobě kolmých a přímkách k sobě kosých.
- Určete relativní rychlost dvou rovnoběžných absolutních pohybů stejného smyslu.
- Určete relativní rychlost dvou rovnoběžných absolutních pohybů opačného smyslu.
- Určete relativní rychlosti při rovnoměrném pohybu v přímkách k sobě kosých.
- Jaký směr musí mít relativní rychlost při vstupu (výstupu) na lopatku lopatkového stroje?
- Jaký je vztah mezi unášivou, relativní a absolutní rychlostí na vstupu a výstupu u lopatkového stroje?

2.7 SOUČASNÉ ROVNOMĚRNÉ A NEROVNOMĚRNÉ POHYBY, VRHY

Vrhy jsou pohyby hmotných bodů nebo těles v gravitačním poli Země, při nichž jsou hmotné útvary vrženy počáteční nenulovou rychlostí svisle vzhůru, šikmo nebo vodorovně. Uvažujeme pohyb ve vakuu. V závěru tohoto odstavce uvedeme také úvahu o vlivu odporu vzduchu na tvar trajektorie bodu – balistickou křivku.

Uvažované pohyby jsou složené. Skládají se z rovnoměrného pohybu ve svislém nebo vodorovném směru a rovnoměrně zrychleného (zpomaleného) pohybu ve svislém směru. Výsledná dráha je dána vektorovým součtem drah v osách x a y . Stejně zákonitosti platí i pro výpočet výsledné rychlosti.

$$\vec{s} = \vec{s}_x + \vec{s}_y; \quad s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}. \quad (2.67)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (2.68)$$

2.7.1 Vrh svislý vzhůru

Pohyb má dvě fáze: rovnoměrně zpomalený pohyb vzhůru s počáteční rychlostí v_0 a rovnoměrně zrychlený pohyb dolů, volný pád.

V první fázi se rychlost zmenšuje se zpožděním g . V čase t má hmotný bod rychlost:

$$v = v_0 - g \cdot t \quad (2.69a)$$

a vykoná dráhu (výšku):

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2. \quad (2.69b)$$

Při dosažení maximální výšky h_{\max} se bod zastaví, to znamená, že rychlost $v = 0$. Čas výstupu určíme podle rovnice (2.69) pro $v = 0$:

$$t_v = \frac{v_0}{g} \quad (2.70)$$

Dostupnost h_{\max} (maximálně dosažitelná výška) se určí podle vztahů (2.69b) a (2.70):

$$h_{\max} = \frac{1}{2} v_0 \cdot t_v = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{1}{2} g \cdot t_v^2 \quad (2.71a, b)$$

Ve druhé fázi začne bod klesat volným pádem. Jeho rychlost rovnoměrně roste se zrychlením g . Na zem dopadne rychlostí:

$$v = \sqrt{2g \cdot h_{\max}} \quad (2.72)$$

Ve vakuu je tato rychlost v stejně velká jako počáteční rychlost v_0 .

Celý pohyb trval dobu:

$$t_d = 2t_v = 2 \frac{v_0}{g} \quad (2.73)$$

Příklad 49.

Určete maximální výšku dostřelu střely z pušky, jestliže střela letí svisle vzhůru rychlostí $v_0 = 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Vypočítejte dobu dopadu střely. K odporu vzduchu nepřihlížejte.

Řešení

Dostup střely:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 4587 \text{ m}.$$

Doba dopadu:

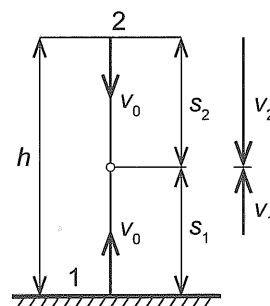
$$t_d = 2 \frac{v_0}{g} = 2 \cdot \frac{300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 61,2 \text{ s}.$$

Příklad 50.

Těleso vržené ze zemského povrchu svisle vzhůru má počáteční rychlost $v_0 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Současně z výšky $h = 2 \text{ m}$ začne padat svisle dolů druhé těleso se stejnou počáteční rychlostí $v_0 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ opačného smyslu, obr. 2.47. Odpor vzduchu zanedbejte.

Určete:

- čas, ve kterém se obě tělesa setkají,
- vzdálenost setkání od zemského povrchu,
- rychlosti obou těles v době setkání.



Obr. 2.47

Řešení

Pro první těleso platí vztahy:

$$s_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2.$$

Pro druhé těleso platí:

$$s_2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2.$$

Dále určíme:

$$s_1 + s_2 = h.$$

Po dosazení a úpravě získáme vztah pro dobu setkání:

$$t = \frac{h}{2v_0} = \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 0,2 \text{ s}.$$

Vzdálenost setkání nad zemským povrchem:

$$\begin{aligned} s_1 &= v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = \\ &= 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0,2 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} (0,2 \text{ s})^2 = 0,8 \text{ m}. \end{aligned}$$

Rychlosti těles při setkání:

$$v_1 = v_0 - g \cdot t = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} - 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,2 \text{ s} = 3,04 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_2 = v_0 - g \cdot t = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} + 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,2 \text{ s} = 6,96 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

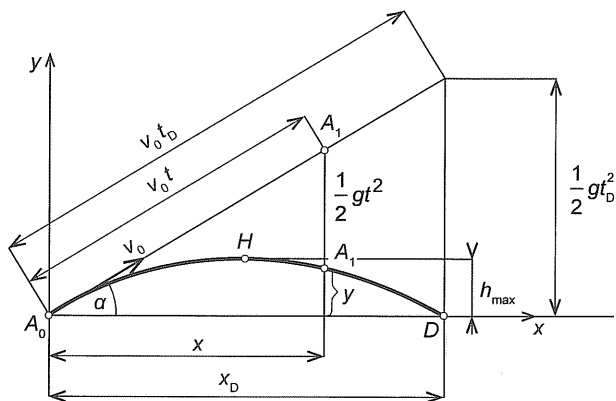
2.7.2 Šikmý vrh

Při šikmém vrhu vystřelíme hmotný bod pod úhlem α vzhledem k vodorovné rovině. Uvedený pohyb je také složený. Okamžitou polohu bodu A lze určit složením rovnoměrného přímočarého pohybu ve směru úhlu α a svislého volného pádu se zrychlením g .

Zvolme souřadný systém podle obr. 2.48.

V čase $t = 0$ je souřadnice bodu A_0 v ose x pak $x_0 = 0$ a souřadnice v ose y pak $y_0 = 0$.

Rychlost bodu A v ose x : $v_x = v_0 \cdot \cos \alpha$ je ve vakuu po celou dobu pohybu konstantní.



Obr. 2.48

Rychlost v ose y : $v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t$ se mění s časem.

V obecném bodě A získáme pro jeho souřadnice x , y vztahy:

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha; \quad y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} g \cdot t^2. \quad (2.74a, b)$$

Pohyb při šikmém vrhu má opět dvě fáze. V první fázi bod stoupá šikmo vzhůru rychlostí v_0 až v čase t_v dosáhne maximální výšky h_{\max} – bod H . Rychlost v_y je v bodě H nulová. Z této podmínky určíme dobu výstupu do bodu H :

$$v_{yH} = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t_{vH} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{vH} = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}. \quad (2.75)$$

Výšku h_{\max} vypočítáme tak, že do rovnice (2.74b) dosadíme vztah (2.75):

$$h_{\max} = v_0 \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (2.76)$$

Vzhledem k tomu, že šikmý vrh má ve vakuu dvě souměrné fáze, bude celková doba dopadu t_D dvojnásobná proti době výstupu t_{vH} :

$$t_D = 2 \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}. \quad (2.77)$$

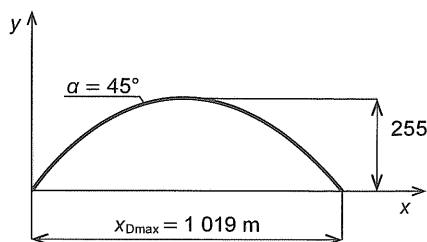
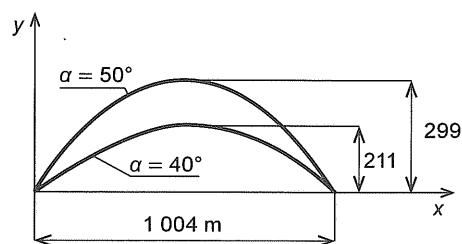
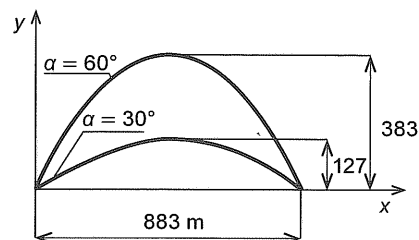
Místo dopadu D – vzdálenost x_D – určíme z rovnice (2.74a):

$$x_D = v_0 \cdot t_D \cdot \cos \alpha = v_0 \cdot 2 \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \cos \alpha = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}. \quad (2.78)$$

Z rovnice (2.78) určíme maximální dostřel – bude tehdy, jestliže úhel 2α se bude rovnat 90° . Srovnáním rovnic (2.76) a (2.78) vychází, že v tomto případě bude dolet x_D právě čtyřnásobný oproti výšce h_{\max} .

Poznámka: Dostřel bude stejný, např. pro úhly $\alpha_1 = 30^\circ$ a $\alpha_2 = 60^\circ$ ($\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$), nebo také pro úhly $\alpha_3 = 40^\circ$ a $\alpha_4 = 50^\circ$ ($\sin 80^\circ = \sin 100^\circ$), obecně pro úhly, pro které platí $\sin(90^\circ - \alpha) = \sin(90^\circ + \alpha)$.

Na obr. 2.49 jsou pro ilustraci uvedeny vzdálenosti dopadu střely a její maximální výšky pro úhly 30° , 60° , 40° , 50° a 45° . Východí rychlost v_0 byla ve všech případech stejná, tj. $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



Obr. 2.49

Okamžitá rychlost v obecném bodu trajektorie (po dosazení a úpravě):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 \cdot t^2 - 2 v_0 \cdot g \cdot t \cdot \sin \alpha}. \quad (2.79)$$

Okamžitý směr výsledné rychlosti v čase t :

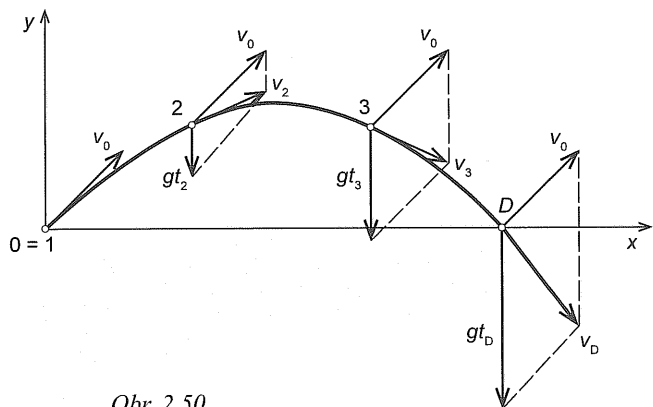
$$\tan \delta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t}{v_0 \cdot \cos \alpha}. \quad (2.80)$$

Rovnice trajektorie pohybu (po vyloučení času t z rovnic 2.74a, b):

$$y = x \cdot \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2. \quad (2.81)$$

Grafickým znázorněním trajektorie v souřadnicích $x - y$ je parabola druhého stupně.

Na obr. 2.50 jsou uvedeny rychlosti v jednotlivých bodech trajektorie. Rychlosti v_0 mají stále stejný směr i velikost. Výsledná rychlost v má směr tečny k trajektorii.



Obr. 2.50

Příklad 51.

Jaká je doba letu t_D a dostřel střely x_D , která byla vystřelena z děla rychlostí $v_0 = 1\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ pod úhlem $\alpha = 40^\circ$. K odporu prostředí nepřihlížejte.

Řešení

Doba letu střely:

$$t_D = \frac{2v_0 \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 1\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot \sin 40^\circ}{9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} = 131,05 \text{ s}.$$

Dostřel střely:

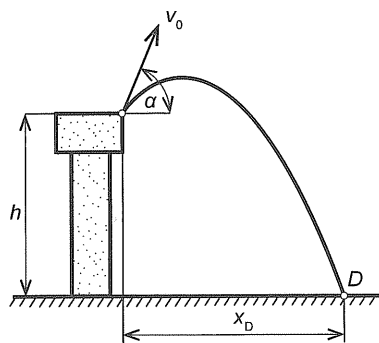
$$\begin{aligned} x_D &= \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = \\ &= \frac{(1\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2 \cdot \sin (2 \cdot 40^\circ)}{9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} = 100\,389 \text{ m}, \end{aligned}$$

nebo také ze vztahu (2.74a):

$$\begin{aligned} x_D &= v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t_D = 1\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot \cos 40^\circ \cdot 131,05 \text{ s} = \\ &= 100\,389 \text{ m}. \end{aligned}$$

Příklad 52.

Z věže vysoké $h = 10 \text{ m}$ (obr. 2.51) byla puškou vystřelena střela rychlostí $v_0 = 300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ pod elevačním úhlem $\alpha = 45^\circ$. Určete dobu dopadu t_D střely a vzdálenost místa dopadu x_D od paty věže.



Obr. 2.51

Řešení

Platí vztah:

$$-h = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t_D - \frac{1}{2} g \cdot t_D^2, \quad \text{vztah upravíme}$$

$$\frac{1}{2} g \cdot t_D^2 - v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t_D - h = 0, \quad \text{řešíme kvadratickou rovnici pro } t_D$$

$$\begin{aligned} t_{D1,2} &= \frac{v_0 \cdot \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha + 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot h}}{g} = \\ &= \frac{300 \cdot \sin 45^\circ \pm \sqrt{300^2 \cdot \sin^2 45^\circ + 2 \cdot 9,81 \cdot 10}}{9,81} \end{aligned}$$

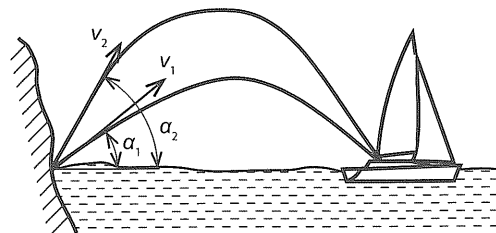
Kořeny této rovnice jsou $t_{D1} = 43,34 \text{ s}$ a $t_{D2} = -0,685 \text{ s}$. Reálný kořen je první.

Vzdálenost dopadu od paty věže:

$$x_D = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t_D = 300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot \cos 45^\circ \cdot 43,34 \text{ s} = 9\,194 \text{ m}.$$

Příklad 53.

Pirátská loď je zakotvena ve vzdálenosti 560 m od pobřežní pevnosti, která chrání vjezd do přístavu. Obránci mají k dispozici dělo umístěné v úrovni mořské hladiny (obr. 2.52).



Obr. 2.52

Dělo může vystřelit náboj rychlostí $v = 82 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Pod jakými elevačními úhly musí být nastavena hlaveň děla, aby střela zasáhla pirátskou loď? Pro oba elevační úhly vypočítejte dobu letu střely. V jaké vzdálenosti od pevnosti bude pirátská loď mimo dostřel děla?

Řešení

Podle rovnice (2.78) je dostřel děla vyjádřen vztahem:

$$x_D = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{x_D \cdot g}{v_0^2} =$$

$$= \frac{560 \text{ m} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{(82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2} = 0,81701,$$

$$2\alpha = 54,79^\circ, \text{ popř. } 125,21^\circ.$$

$$\alpha_1 = 27,39^\circ, \quad \alpha_2 = 62,60^\circ.$$

Doby letu střely určíme ze vztahu:

$$x_D = v_0 \cdot t_D \cdot \cos \alpha,$$

$$t_{D1} = \frac{x_D}{v_0 \cdot \cos \alpha_1} = \frac{560 \text{ m}}{82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \cos 27,39^\circ} = 7,69 \text{ s},$$

$$t_{D2} = \frac{x_D}{v_0 \cdot \cos \alpha_2} = \frac{560 \text{ m}}{82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \cos 62,60^\circ} = 14,83 \text{ s}.$$

Pirátská loď bude v bezpečí mimo dostřel děla ve vzdálenosti x_D při elevačním úhlu $\alpha = 45^\circ$.

$$x_D = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = \frac{(82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 \cdot \sin 90^\circ}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 685 \text{ m}.$$

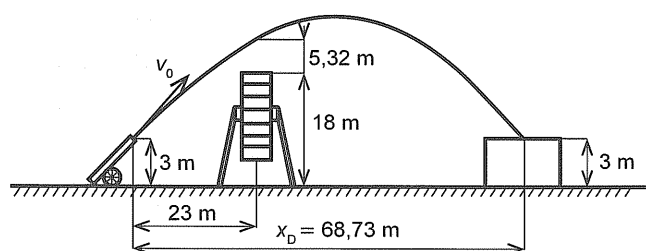
Ve vzdálenosti větší než 685 m od pevnosti jsou piráti již v bezpečí.

Příklad 54.

Artista je vystřelen dělem rychlostí $v_0 = 26,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pod elevačním úhlem $\alpha = 53^\circ$ a letí nad ruským kolem vysokým 18 m, které je od děla vzdáleno 23 m. Ústí hlavně děla i záchranná síť jsou ve výšce 3 m nad zemí (obr. 2.53).

Určete:

- Zda artista přeletí nad kolem a s jakou výškovou rezervou?
- Jak dlouho trvá let do záchranné sítě?
- Jak je záchranná síť vzdálena od děla?



Obr. 2.53

Pro výpočet použijeme rovnici (2.81):

$$y = x \cdot \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2 =$$

$$= 23 \text{ m} \cdot \tan 53^\circ - \frac{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{2 \cdot (26,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 \cdot \cos^2 53^\circ} \cdot (23 \text{ m})^2 =$$

$$= 20,32 \text{ m},$$

$$y_1 = y + 3 = (20,32 + 3) \text{ m} = 23,32 \text{ m}.$$

Artista prolétne nad ruským kolem s rezervou 5,32 m (23,32 – 18) m.

Dobu letu určíme z rovnice (2.77):

$$t_D = 2 \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} = 2 \cdot \frac{26,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \sin 53^\circ}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 4,31 \text{ s}.$$

Záchranná síť bude umístěna ve vzdálenosti:

$$x_D = v_0 \cdot t_D \cdot \cos \alpha = 26,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 4,31 \text{ s} \cdot \cos 53^\circ = 68,73 \text{ m}.$$

Příklad 55.

Těleso je vrženo šikmo vzhůru počáteční konstantní rychlostí $v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pod úhlem $\alpha = 30^\circ$. Provedte diskusi pro $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Určete:

- maximální výšku při šikmém vrhu,
- výšku na konci 1. sekundy,
- výšku na konci 2. sekundy,
- výšku na konci 3. sekundy.

Řešení

$$a) h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{(30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 \cdot \sin^2 30^\circ}{2 \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 11,25 \text{ m}.$$

$$b) h_1 = v_0 \cdot t_1 \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 =$$

$$= 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 1 \text{ s} \cdot \sin 30^\circ - \frac{1}{2} 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} (1 \text{ s})^2 = 10 \text{ m}.$$

$$c) h_2 = v_0 \cdot t_2 \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 =$$

$$= 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 2 \text{ s} \cdot \sin 30^\circ - \frac{1}{2} 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} (2 \text{ s})^2 = 10 \text{ m}.$$

$$d) h_3 = v_0 \cdot t_3 \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} g \cdot t_3^2 =$$

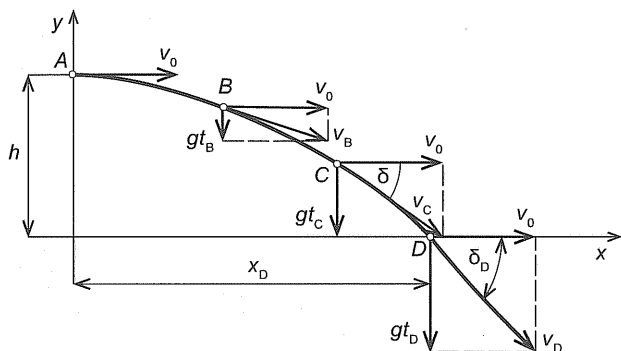
$$= 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 3 \text{ s} \cdot \sin 30^\circ - \frac{1}{2} 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} (3 \text{ s})^2 = 0 \text{ m}.$$

Na konci první sekundy bod ještě stoupá, na konci druhé sekundy je bod již v klesající fázi. Obě výšky jsou prakticky stejné.

2.7.3 Vodorovný vrh

Speciálním případem šikmého vrhu je vodorovný vrh s elevačním úhlem $\alpha = 0$. Pohyb při vodorovném vrhu se skládá ze dvou kolmých pohybů. Vodorovný pohyb (obr. 2.54) má konstantní rychlost $v_x = \text{konst.}$ a svislý pohyb je rovnoměrně zrychlený – volný pád s okamžitou rychlostí v_y :

$$v_y = g \cdot t.$$



Obr. 2.54

Hloubka pádu je dráhou volného pádu:

$$y = -h = -\frac{1}{2}g \cdot t_D^2.$$

Z tohoto vztahu určíme dobu pádu (až po dopad na zem):

$$t_D = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (2.82)$$

Stejnou dobu trvá vodorovný rovnoměrný přímočarý pohyb. Dráha, kterou za tuto dobu bod urazí, má velikost:

$$x_D = v_0 \cdot t_D = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (2.83)$$

Rychlost v libovolném místě trajektorie:

$$v_x = v_0 = \text{konst.}, \quad v_y = g \cdot t:$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (g \cdot t)^2}. \quad (2.84)$$

Sklon tečny trajektorie:

$$\tan \delta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{g \cdot t}{v_0}. \quad (2.85)$$

Rovnice trajektorie pohybu se určí z rovnice (2.81), jestliže za α dosadíme $\alpha = 0$:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2. \quad (2.86)$$

Trajektorii vodorovného vrhu je parabola druhého stupně, jak odvodil již Galileo Galilei.

Na obr. 2.54 je naznačeno grafické skládání rychlostí v obou kolmých směrech. Výsledná rychlost v má směr tečny k parabole v daném bodě.

Příklad 56.

Střelec má samopal s hlavní ve vodorovné poloze ve výši $h = 1,4$ m nad zemí. Dostřel samopalu je $x_D = 1\,800$ m. Určete rychlost střely v_0 opouštějící hlaveň a dobu letu střely t_D .

Řešení

Pro dostřel střely při vodorovném vrhu platí vztah, ze kterého určíme počáteční rychlost střely:

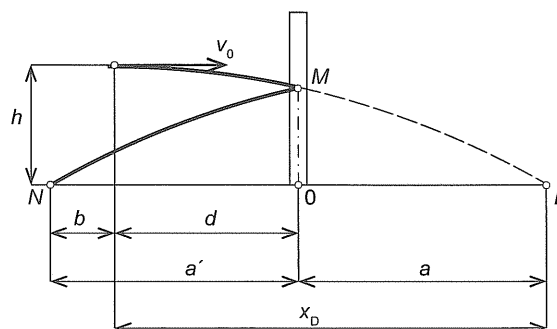
$$\begin{aligned} x_D &= v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow v_0 = x_D \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}} = \\ &= 1\,800 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{2 \cdot 1,4 \text{ m}}} = 3\,369 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Doba letu střely:

$$t_D = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,4 \text{ m}}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 0,53 \text{ s}.$$

Příklad 57.

Hráč trénující u cvičné stěny odpálí tenisový míček vodorovným směrem rychlostí $v_0 = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ze vzdálenosti $d = 5$ m (obr. 2.55). Výška $h = 1,1$ m. Určete místo dopadu míčku po odrazu. Odpor vzduchu zanedbejte.



Obr. 2.55

Řešení

Uvažujme, jakoby stěna míčku nestála v cestě. Potom by míček dopadl do vzdálenosti x_D . Podle zákona dopadu a odrazu jsou části křivek ML a MN souměrné podle osy MO .

Doba dopadu míčku na zem:

$$t_D = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,1 \text{ m}}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 0,47 \text{ s}.$$

Místo dopadu na zem:

$$x_D = v_0 \cdot t_D = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0,47 \text{ s} = 11,75 \text{ m}.$$

Vzdálenost a :

$$a = x_D - d = 11,75 \text{ m} - 5 \text{ m} = 6,75 \text{ m}.$$

Podle předchozí úvahy platí:

$$a = a' = 6,75 \text{ m}.$$

Vzdálenost dopadu míčku od hráče:

$$b = a' - d = 6,75 \text{ m} - 5 \text{ m} = 1,75 \text{ m}.$$

Míček dopadne za hráče ve vzdálenosti 1,75 m.

Úlohy

- ① Kámen je vržen svisle vzhůru. Při vzestupu má jistý bod A rychlostí v a další bod B rychlostí $0,5v$. Bod B je o 3 m výše než bod A .

Určete:

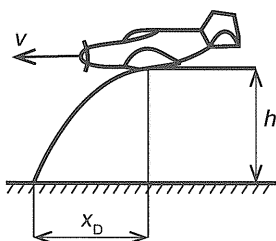
- rychlost kamene v ,
- největší výšku, do které vyletí kámen nad úroveň bodu B .

$$(v = 8,86 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, h_{\text{nad}B} = 1 \text{ m})$$

- ② Jakou rychlostí byla svisle vzhůru vystřelena střela z pušky? Střela dopadla za 45 s, do jaké výšky dostoupila? K odporům vzduchu nepřihlížejte.

$$(v = 220,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, h = 2 \text{ 483 m})$$

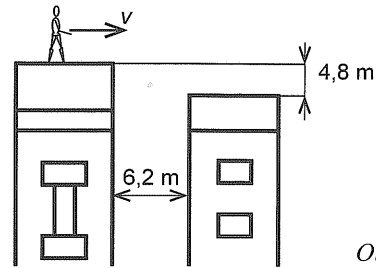
- ③ V jaké vodorovné vzdálenosti x_D vypustit letadlo pouzdro s potravinovou pomocí trosečnickům na ostrůvek (obr. 2.56), letí-li letadlo ve výšce $h = 200 \text{ m}$ nad zemí rychlostí $v = 180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$? Jak dlouho pouzdro padalo? K odporu vzduchu nepřihlížejte.



Obr. 2.56

$$(x_D = 319,5 \text{ m}, t_D = 6,39 \text{ s})$$

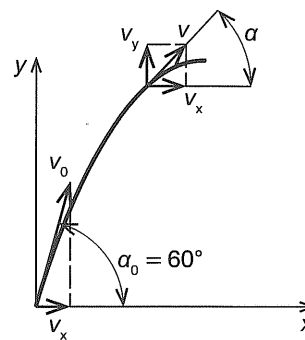
- ④ Při filmování honičky na ploché střeše má kaskadér přeskóčit na střechu sousední budovy (obr. 2.57). Jaká musí být minimální rychlost kaskadéra, aby tento úkol zvládl?



Obr. 2.57

$$(v = 6,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ což je reálné})$$

- ⑤ Střela je vystřelena počáteční rychlostí $v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pod elevačním úhlem $\alpha_0 = 60^\circ$ (obr. 2.58). Určete velikost a směr její rychlosti po uplynutí 2 s.



Obr. 2.58

$$(v = 16,27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \alpha = 23^\circ)$$

- ⑥ Míč je vržen od okraje balkonu svisle vzhůru tak, že při cestě zpět mine okraj balkonu za čas $t_p = 2 \text{ s}$ od okamžiku vyhození:

- vypočítejte maximální výšku míče nad okrajem balkonu a počáteční rychlost, jakou byl vržen,
- jak velkou rychlostí mine padající míč okraj balkonu,
- jaká je poloha a rychlost míče po uběhnutí času 3 s od počátku pohybu.

$$(h_{\text{max}} = 4,9 \text{ m}, v_0 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; v_{\text{okr}} = -9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$s = -14,72 \text{ m}, v = -19,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

- ⑦ Kámen byl vržen vodorovně z dostatečně vysoké skály rychlostí $v_x = 30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Určete velikost jeho rychlosti v a polohu kamene v čase $t = 2 \text{ s}$. Odpor vzduchu zanedbejte.

$$(v = 21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ souřadnice } x = 17 \text{ m}, y = -20 \text{ m})$$

8. Vypočítejte dobu, za kterou těleso vržené svisle dolů z výšky $h = 30 \text{ m}$ rychlostí $v_0 = 5 \text{ s}^{-1}$ dosáhne zemského povrchu.

Návod: Řešte kvadratickou rovnici pro čas t .

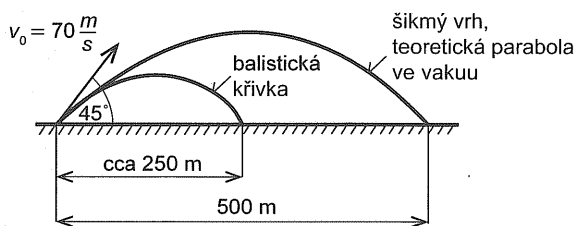
$$(t = 2 \text{ s})$$

2.7.4 Balistická křivka

Pohyb těles v blízkosti zemského povrchu ovlivňuje odpor vzduchu. Odporová síla vzduchu je vyjádřena vztahem: $F_{ovz} = k \cdot v^2$. V tomto výrazu konstanta k závisí na tvarovém součiniteli, velikosti čelní plochy tělesa a hustotě vzduchu. Rychlost pohybu tělesa je v .

V důsledku odporu vzduchu se těleso pohybuje po balistické křivce odlišné od teoretické paraboly. Dostřel bude v tomto případě vždy menší než ve vakuu. Střela dopadne pod větším úhlem, než byla vystřelena. Také maximální dostřel je při jiném úhlu než 45° .

Na obr. 2.59 je provedeno srovnání balistické křivky odpáleného golfového míčku s parabolou při šikmém vrhu ve vakuu. Pro golfový míček odpálený špičkovým golfistou rychlostí $v_0 = 70 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ($252 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$) je dolet přibližně 250 m, poloviční proti teoretickému doletu ve vakuu při šikmém vrhu.



Obr. 2.59

Výsledky balistiky využívají zejména dělostřelci. Při zaměřování musí však vzít v úvahu také vliv Coriolisovy síly, která je důsledkem rotace Země. Bude vysvětlena v Dynamice.

Kontrolní otázky

1. Charakterizujte dvě fáze pohybu svislého vrhu vzhůru.
2. Na jakých fyzikálních veličinách závisí maximální do-
stup při svislém vrhu?
3. Z jakých pohybů se skládá vodorovný vrh?
4. Z jakých pohybů se skládá šikmý vrh?
5. Jakými fyzikálními veličinami je určen šikmý vrh?
6. Při jakém elevačním úhlu je při šikmém vrhu největší
dostřel?
7. Jakou křivku opisuje hmotný bod při šikmém vrhu?
8. Jak se získá okamžitá rychlost bodu při šikmém vrhu,
jaký má směr?
9. Jakou křivku opisuje hmotný bod při vodorovném
vrhu?
10. Co je balistická křivka, která veličina má největší vliv
na její tvar?

3 KINEMATIKA TĚLESA

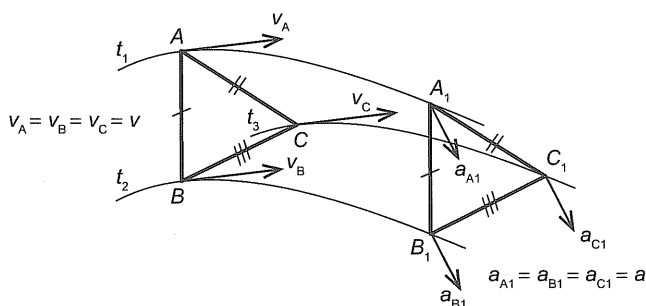
Tuhé těleso se skládá ze soustavy bodů, jejichž vzdálenost se při libovolném pohybu nemění. Jestliže se všechny body tělesa pohybují v rovnoběžných rovinách, potom těleso koná rovinný pohyb. Tím se budeme dále zabývat.

Rozeznáváme dva základní druhy rovinného pohybu tělesa:

- posuvný – může být přímočarý nebo křivočarý,
- rotační – osa otáčení může být stálá nebo okamžitá, okamžitá mění v prostoru svoji polohu.

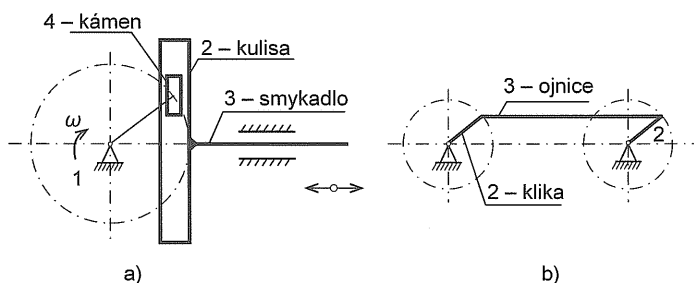
3.1 ROVINNÝ POHYB POSUVNÝ

Těleso v rovině vykonává pohyb posuvný, jestliže libovolná přímka tělesa zachová svůj směr. Dráhy všech bodů jsou shodné, vzájemně posunuté (obr. 3.1). Všechny body tělesa v určité poloze mají stejné rychlosti i stejná zrychlení. Vektor rychlosti má vždy směr tečny k trajektorii. Vektor zrychlení má obecný směr, je složen z vektoru tečného zrychlení a vektoru normálového zrychlení, který směřuje do středu křivosti v místě dané trajektorie.



Obr. 3.1

Na obr. 3.2a, b jsou znázorněny dva příklady rovinného posuvného pohybu. Na obr. 3.2a je nakreslena pravoúh-

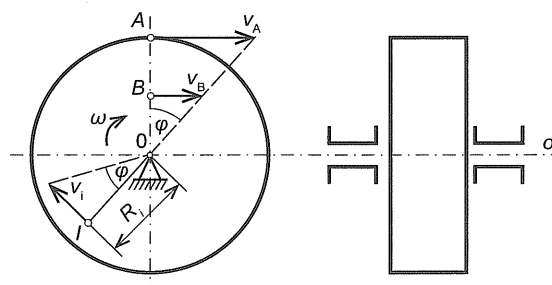


Obr. 3.2

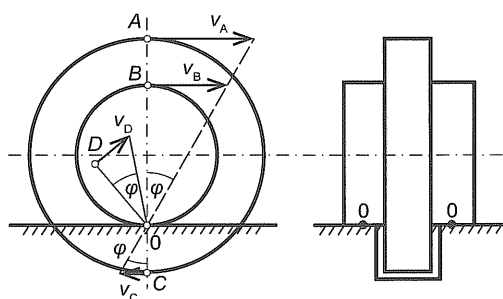
lá kulisa se smykadlem. Smykadlo (3) a kulisa (2) konají posuvný pohyb přímočarý. Na obr. 3.2b ojnice (3) koná posuvný pohyb křivočarý.

3.2 ROVINNÝ ROTAČNÍ POHYB

Osa otáčení při rotačním pohybu může být buď stálá, a to za předpokladu, že je k uvažovanému prostoru v klidu (obr. 3.3), nebo okamžitá (obr. 3.4), když se její poloha v rovině mění. Tak tomu je např. při valení válce nebo koule po rovině kolem bodu 0.



Obr. 3.3



Obr. 3.4

Při stálé ose otáčení jsou trajektoriemi všech bodů tělesa soustředné kružnice. Body se po těchto kružnicích pohybují stejnou úhlovou rychlostí ω . Obvodová rychlost jednotlivých bodů se určí podle vztahu:

$$v_i = R_i \cdot \omega. \quad (3.1)$$

Jestliže těleso koná rovnoměrný rotační pohyb, potom tečné zrychlení libovolného bodu je nulové a každý bod

má pouze zrychlení normálové, jehož velikost se určí podle vztahu:

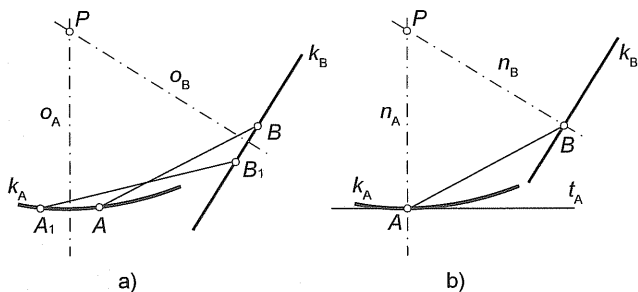
$$a_{ni} = \frac{v_i^2}{R_i} = R_i \cdot \omega^2. \quad (3.2)$$

3.3 ROVINNÝ POHYB OBEČNÝ

Předpokládejme pohyb úsečky \overline{AB} . Přejít úsečky \overline{AB} z jedné polohy do druhé lze provést nekonečně mnoha způsoby. Mezi těmito způsoby existuje jediné otočení kolem stálého středu (obr. 3.5a). Střed otáčení bod P (pól pohybu) získáme jako průsečík os AA_1 a BB_1 .

Úsečka \overline{AB} a celé těleso s ní spojené se dostane do nové polohy prostým pootočením kolem středu P .

Uvedené otočení kolem bodu P je nejjednodušší, obecně je však průběh pohybu jiný. K rozboru skutečného pohybu musíme pohyb úsečky sledovat při nekonečně blízkých polohách $\overline{AA_1}$ a $\overline{BB_1}$. Osy úseček přecházejí v limitě v normály n_A případně n_B (obr. 3.5b). Elementární pohyb je tedy pohybem rotačním.



Obr. 3.5

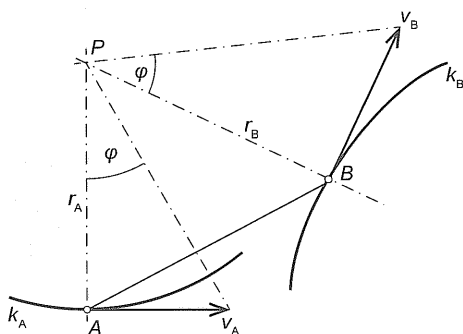
Okamžitou rychlost bodu tělesa můžeme řešit trojím způsobem:

1. pomocí okamžité osy otáčení,
2. z podmínky tuhosti tělesa,
3. pomocí pootočených rychlostí.

Ad 1) Řešení pomocí okamžité osy otáčení – pólu P
(obr. 3.6).

Protože okamžitá úhlová rychlost ω je pro všechny body úsečky stejná, jsou stejné i všechny úhly φ . Platí proto:

$$v_A = r_A \cdot \tan \varphi = r_A \cdot \omega; \quad v_B = r_B \cdot \tan \varphi = r_B \cdot \omega.$$

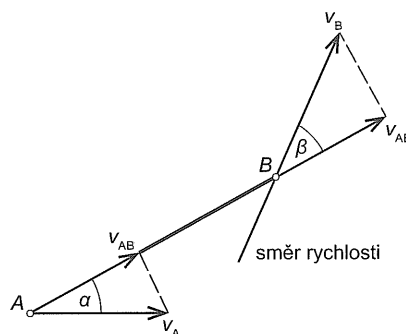


Obr. 3.6

Ad 2) Řešení okamžité rychlosti z podmínky tuhosti úsečky (obr. 3.7).

U dokonale tuhé úsečky se nemění vzdálenost bodů \overline{AB} a proto složky okamžitých rychlostí do směru spojnice \overline{AB} musí být stejné:

$$v_A \cdot \cos \alpha = v_B \cdot \cos \beta = v_{AB}.$$

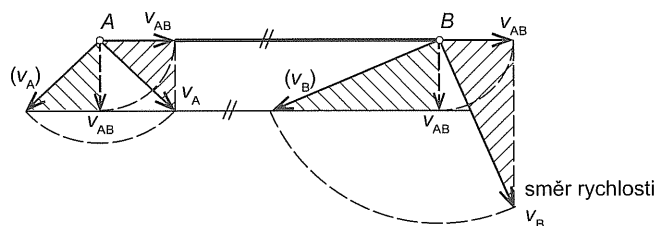


Obr. 3.7

Ad 3) Řešení pomocí pootočených rychlostí (obr. 3.8).

Při této metodě se uplatňuje také řešení pomocí tuhosti úsečky. Otočíme-li rychlosti v_A a v_B ve stejném smyslu o 90° , zaujmou tyto otočené rychlosti nové polohy (v_A) a (v_B). Z pootočených vyčárkovaných trojúhelníků plyne, že koncové body rychlostí (v_A) a (v_B) mají od úsečky \overline{AB} stejné vzdálenosti.

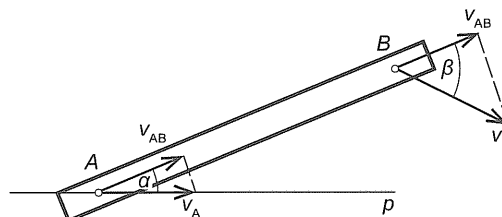
Platí tedy: koncové body pootočených rychlostí leží na rovnoběžce s úsečkou \overline{AB} .



Obr. 3.8

Příklad 58.

V bodě B úsečky je okamžitá rychlost v_B . Okamžitá rychlost v_A má působit na dané vektorové přímce p (obr. 3.9). Určete okamžitou rychlost bodu A z podmínky tuhosti úsečky. Dáno: $v_B = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, úhly $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 55^\circ$.



Obr. 3.9

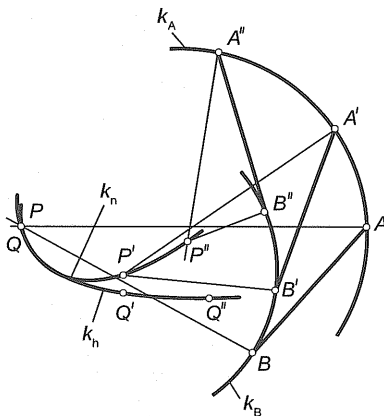
Řešení

$$v_A \cdot \cos \alpha = v_B \cdot \cos \beta \Rightarrow v_A = \frac{v_B \cdot \cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \cos 55^\circ}{\cos 30^\circ} = 0,66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3.3.1 Polodie pohybu

Střed otáčení P je okamžitým středem otáčení, pólem pohybu. Geometrickým místem pólů P, P', P'' je křivka k_n , která se nazývá polodie nehybná. Jestliže přeneseme trojúhelníky $ABP, A'B'P', A''B''P''$ na základní úsečku AB a přenesené póly označíme Q, Q', Q'' a spojíme je, dostáváme křivku k_h , polodii hybnou (obr. 3.10). Obě tyto křivky se dotýkají a při pohybu tělesa (úsečky) se po sobě odvalují.

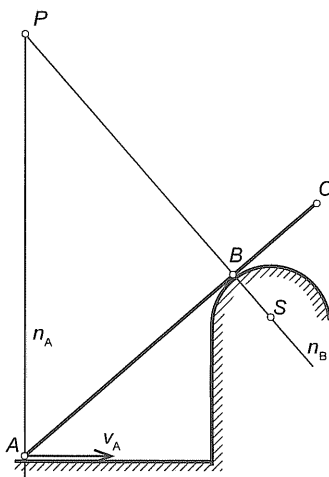
Obecný rovinný pohyb tělesa lze znázornit odvalováním polodie hybné po polodii nehybné.



Obr. 3.10

Příklad 59.

Určete rychlost bodu C tuhé úsečky AC podle obr. 3.11, jestliže je dána rychlost v_A bodu A .

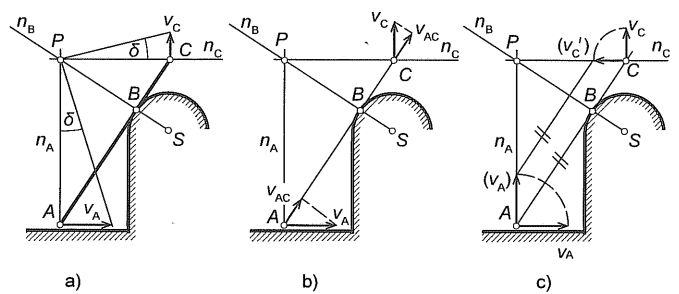


Obr. 3.11

Řešení

Úlohu budeme postupně řešit třemi metodami. Ve všech případech nejprve zakreslíme normály n_A a n_B . V jejich průsečíku leží pól pohybu P . Spojením pólu s bodem C získáme normálu n_C .

- Řešení pomocí pólu pohybu. Koncové body rychlostí v_A a v_C jsou pod stejným zorným úhlem δ .
- Řešení pomocí tuhosti úsečky. Průměty rychlostí obou bodů A a C do směru úsečky mají stejnou velikost.
- Řešení pomocí potočených rychlostí. Vycházíme opět z tuhosti úsečky. Zakreslíme pootočenou rychlost (v_A). Narýsujeme rovnoběžku s úsečkou AC , která na normále n_C vytne pootočenou rychlost (v_C). Tu opět otočíme o 90° podle obr. 3.12c.



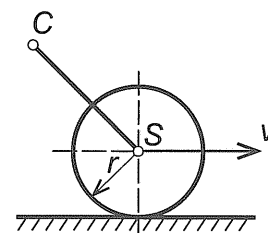
Obr. 3.12

Kontrolní otázky

- Jak je charakterizován posuvný pohyb tělesa v rovině?
- Jak se určí rychlosti bodů tělesa při rotačním pohybu s pevnou osou a jak s okamžitou osou?
- Jak je možný u rovinného pohybu přechod z jedné polohy tělesa do druhé.
- Jakým způsobem můžeme řešit okamžitou rychlost tělesa?
- Na jakém principu je řešení rychlosti tělesa pomocí tuhosti úsečky?
- Vysvětlete pojmy: polodie pevná, polodie hybná.

Úloha

- Najděte pól pohybu při valení kružnice po přímce a rychlost bodu C (obr. 3.13), jestliže je dán poloměr kružnice r a rychlost v .



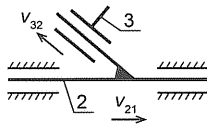
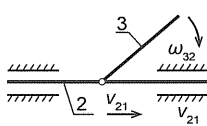
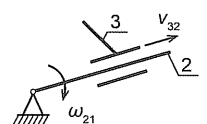
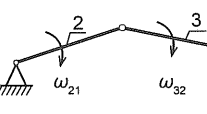
Obr. 3.13

3.4 SOUČASNÉ POHYBY TĚLES

V technické praxi se často setkáváme se současnými pohyby těles. Nejdříve určíme základní prostor, ke kterému se tělesa pohybují. Obecně to může být např. zeměkoule, u kinematických mechanismů je to obvykle rám. Pohybující se tělesa nazýváme členy. Pro přehlednost je číslováme arabskými číslicemi. Rám vždy označujeme jedničkou.

Současnými pohyby mohou být např. pohyb satelitu v planetové převodovce, který se otáčí kolem své osy a současně je unášen unášečem nebo matice pohybující se na šroubu. Matice se otáčí a současně posouvá. Nejčastější varianty současných rovinných pohybů uvádí *tab. 3.1*.

Tabulka 3.1. Varianty současných rovinných pohybů

Číslo	Pohyb	Absolutní 21	Relativní 32
1		posuvný	posuvný
2		posuvný	rotační
3		rotační	posuvný
4		rotační	rotační

3.4.1 Současný absolutní i relativní pohyb je posuvný

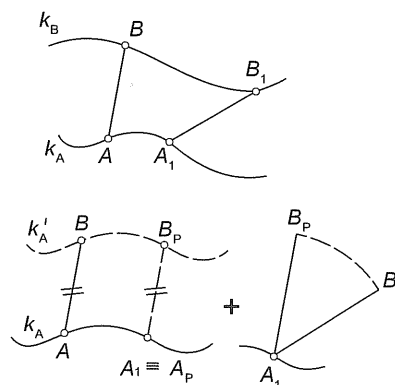
Velikost dráhy a výsledná rychlost tohoto složeného pohybu byla podrobně zjišťována v *odst. 2.6*. Výsledná dráha, výsledná rychlost a výsledné zrychlení se obecně určují pomocí rovnoběžníku dráhy, rychlosti a zrychlení.

3.4.2 Unášivý pohyb je posuvný, relativní pohyb rotační

Rozklad obecného rovinného pohybu je **základní rozklad**. Úsečka trajektorie k_A a k_B se přemístí z polohy AB do polohy A_1B_1 (*obr. 3.14*). Její pohyb se uvažuje jako pohyb složený. Úsečka se nejprve posune do polohy A_1B_p , otočí se kolem bodu $A_1 \equiv A_p$ do konečné polohy A_1B_1 .

Obecný pohyb rozkládáme na dva současné pohyby, posuvný a rotační. Posuvný pohyb je unášivý, rotační po-

hyb je relativní. Při představě relativního pohybu $\overline{32}$ si představujeme, že jako pozorovatelé stojíme na členu 2 a z tohoto členu pozorujeme pohyb členu 3.



Obr. 3.14

Pro rychlosti i zrychlení platí rovnoběžníky rychlostí, případně zrychlení:

$$\vec{v}_{31} = \vec{v}_{32} + \vec{v}_{21}. \quad (3.3)$$

Výsledná rychlost obecného pohybu se rovná vektorovému součtu rychlosti relativní a unášivé.

$$\vec{a}_{31} = \vec{a}_{32} + \vec{a}_{21}. \quad (3.4)$$

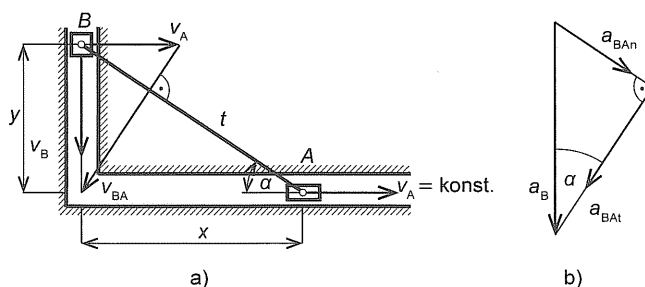
Výsledné zrychlení obecného pohybu se rovná vektorovému součtu zrychlení relativního a unášivého.

Pokud rychlost unášivého pohybu je konstantní a také úhlová rychlost relativního pohybu je konstantní, potom zrychlení \vec{a}_{31} se rovná pouze dostředivému zrychlení při relativním rotačním pohybu.

Příklad 60.

Určete rychlost a zrychlení bodu B tyče uložené ve dvou přímých drahách k sobě kolmých. Bod A se pohybuje konstantní rychlostí $v_A = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Hodnoty: $X = 800 \text{ mm}$, $Y = 600 \text{ mm}$ (*obr. 3.15*).



Obr. 3.15

Řešení

Body A a B přísluší jednomu tělesu. K řešení použijeme základní rozklad. Celé těleso t , a tedy i bod B , je unášeno unášivou rychlostí v_A . Při relativním pohybu bodu B k A se bod B pohybuje po kružnici se středem v bodě A (*obr. 3.15a*).

Platí vztah:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_A.$$

V bodě B známe rychlost unášivého pohybu v_A a nositelku relativní rychlosti v_{BA} – je kolmá na spojnici \overline{AB} . Výsledný pohyb bodu B se koná po svislé přímce a také výsledná rychlost tohoto bodu má stejný směr. Velikosti rychlostí jsou patrné z obr. 3.15a.

Pro zrychlení platí rovnice:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_A.$$

Zrychlení $\vec{a}_A = 0$. Zrychlení \vec{a}_{BA} se skládá ze složky normálové a tečné. Obě složky zrychlení jsou na sebe kolmé (obr. 3.15b).

Normálová složka relativního zrychlení má velikost:

$$a_{BA_n} = \frac{v_{BA}^2}{AB}.$$

Protože směry celkového zrychlení \vec{a}_B a tečné složky relativního zrychlení jsou známe, můžeme z trojúhelníka zrychlení všechna zrychlení určit:

$$s_{AB} = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{0,8^2 + 0,6^2} \text{ m} = 1 \text{ m},$$

$$\tan \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{0,6 \text{ m}}{0,8 \text{ m}} = 0,75 \Rightarrow \alpha = 36,87^\circ,$$

$$\frac{v_A}{v_{AB}} = \sin \alpha \Rightarrow v_{AB} = \frac{v_A}{\sin \alpha} = \frac{1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{\sin 36,87^\circ} = 1,67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \tan \alpha \Rightarrow v_B = \frac{v_A}{\tan \alpha} = \frac{1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{0,75} = 1,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$a_{AB_n} = \frac{v_{AB}^2}{s_{AB}} = \frac{(1,67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{1 \text{ m}} = 2,79 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$\frac{a_{AB_n}}{a_{AB_t}} = \tan \alpha \Rightarrow a_{AB_t} = \frac{a_{AB_n}}{\tan \alpha} = \frac{2,79 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{0,75} =$$

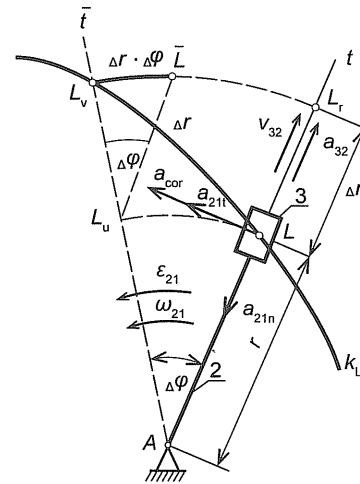
$$= 3,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$\frac{a_{AB_n}}{a_B} = \sin \alpha \Rightarrow a_B = \frac{a_{AB_n}}{\sin \alpha} = \frac{2,79 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{\sin 36,87^\circ} =$$

$$= 4,65 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

3.4.3 Unášivý pohyb je rotační, relativní pohyb posuvný

Pro tento složený pohyb platí rovnoběžník rychlostí. Ten však neplatí pro zrychlení. Vedle tečného a normálového zrychlení existuje ještě tzv. zrychlení Coriolisovo. Existence Coriolisova zrychlení je patrná z obr. 3.16.



Obr. 3.16

Po otáčející se tyči se pohybuje objímka s bodem L . Za elementární čas Δt se tyč přemístí do polohy \bar{t} a bod L do polohy L_v . Kdyby konal bod L samotný relativní pohyb, přemístil by se bod do polohy L_r , při samotném unášivém pohybu do polohy L_u . Sečteme-li vektorově obě přemístění, vyjde výsledná poloha v \bar{L} . Ve skutečnosti se bod L dostane do bodu L_v . Musí tedy dojít k určitému zrychlení, Coriolisovu. Jeho velikost vyplývá ze vztahu pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu bodu:

$$(s = \frac{1}{2} a_{\text{cor}} \cdot \Delta t^2).$$

$$\frac{1}{2} a_{\text{cor}} \cdot \Delta t^2 = \Delta r \cdot \Delta \varphi = \Delta r \cdot \omega_{21} \cdot \Delta t \Rightarrow$$

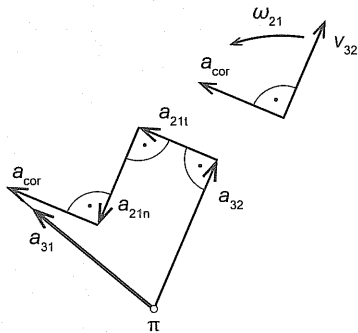
$$\Rightarrow a_{\text{cor}} = 2 \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \omega_{21} = 2 \cdot v_{32} \cdot \omega_{21}. \quad (3.5)$$

Velikost Coriolisova zrychlení a_{cor} je dána dvojnásobným součinem rychlosti relativního pohybu a úhlové rychlosti unášivého pohybu. Vektor Coriolisova zrychlení a_{cor} je kolmý k rovině vektorů ω_{21} a v_{32} ve smyslu otáčení pravotočivého šroubu. V textu je uvažován směr vektoru ω_{21} kolmý k nákresně, takže směr Coriolisova zrychlení budeme získávat otočením vektoru relativní rychlosti v_{32} o 90° ve smyslu unášivé úhlové rychlosti ω_{21} .

Pro výsledné zrychlení platí:

$$\vec{a}_{31} = \vec{a}_{32} + \vec{a}_{21} + \vec{a}_{\text{cor}}. \quad (3.6)$$

Na obr. 3.17 je zobrazeno výsledné zrychlení a_{31} .



Obr. 3.17

Poznámka: Coriolisovo zrychlení a jeho důsledek Coriolisovu sílu objevil roku 1831 francouzský fyzik Gustave-Gaspard Coriolis. Coriolisova síla v důsledku rotace Země způsobuje např. odchylku střel dalekonosných děl. Také pravé břehy řek na severní polokouli při pohledu ze severu jsou více podemlety. Směr vířivého proudu při vypouštění vany je v našich zeměpisných poměrech orientován proti směru hodinových ručiček. Díky Coriolisově síle se také mění směr větrů a mořských proudů.

Příklad 61.

Jeřáb se otáčí unášivou rychlostí s otáčkami $n = 0,03 \text{ s}^{-1}$. Na výložníku tohoto jeřábu se pohybuje jeřábový vozík relativní rychlostí $v_r = 0,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete velikost Coriolisova zrychlení jeřábového vozíku.

Řešení

Úhlová rychlost unášivého pohybu:

$$\omega_u = 2\pi \cdot n = 2 \cdot \pi \cdot 0,03 \text{ s}^{-1} = 0,188 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Coriolisovo zrychlení:

$$a_{\text{cor}} = 2 \cdot v_r \cdot \omega_u = 2 \cdot 0,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0,188 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 0,30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

3.4.4 Unášivý pohyb je rotační, relativní pohyb také rotační

Na kouli, která rotuje s konstantní úhlovou rychlostí, se po rovníkové kružnici pohybuje rovnoměrnou rychlostí bod.

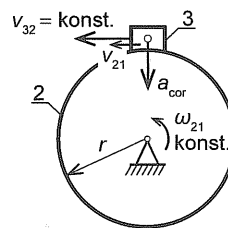
V tomto případě platí i algebraický součet: $v_{31} = v_{32} + v_{21}$.

Pro zrychlení platí: $a = a_n$ za předpokladu, že rychlost unášivá i rychlost relativní jsou konstantní:

$$a = \frac{(v_{31})^2}{r} = \frac{(v_{32} + v_{21})^2}{r} = \frac{v_{32}^2 + v_{21}^2 + 2v_{32} \cdot v_{21}}{r},$$

$$a = \frac{v_{32}^2}{r} + \frac{v_{21}^2}{r} + 2 \cdot v_{32} \cdot \omega_{21}. \quad (3.7)$$

První a druhý člen zrychlení jsou normálová zrychlení příslušná relativnímu a unášivému pohybu, třetí člen je opět Coriolisovo zrychlení. Toto zrychlení je důsledkem toho, že unášivý pohyb je rotační (obr. 3.18). Pro zrychlení neplatí zákon rovnoběžníka.



Obr. 3.18

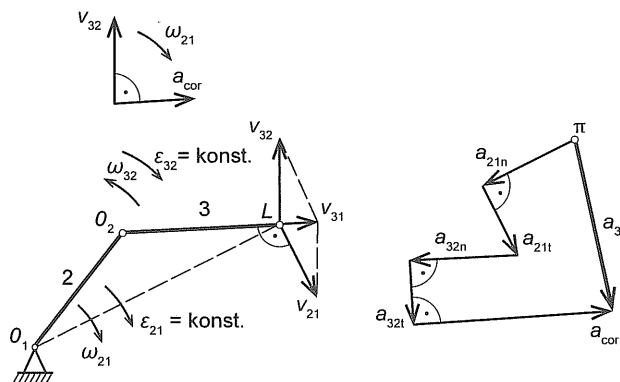
Pro Coriolisovo zrychlení platí tedy vztah:

$$a_{\text{cor}} = 2v_{32} \cdot \omega_{21}$$

a jeho nositelku co do směru a smyslu dostaneme, otočíme-li relativní rychlost v_{32} ve smyslu unášivé rychlosti ω_{21} o $\pi/2$.

Mechanismus tvoří soustava těles s jednotlivými pohyby svých členů, kde pohybem hnacího členu jsou určeny pohyby všech ostatních členů.

Na obr. 3.19 je uveden mechanismus se dvěma rotujícími klikami.



Obr. 3.19

Pro rychlosti platí zákon rovnoběžníka.

Výsledná rychlost bodu L: $\vec{v}_L = \vec{v}_{31} = \vec{v}_{21} + \vec{v}_{32}$.

Rychlost unášivého pohybu: $\vec{v}_{21} = \vec{O}_1\vec{L} \cdot \omega_{21}$.

Rychlost relativního pohybu: $\vec{v}_{32} = \vec{O}_2\vec{L} \cdot \omega_{32}$.

Výsledné zrychlení je dáno vektorovým součtem všech zrychlení:

$$\begin{aligned} \vec{a}_L &= \vec{a}_{31} = \vec{a}_{21} + \vec{a}_{32} + \vec{a}_{\text{cor}} = \\ &= \vec{a}_{21n} + \vec{a}_{21t} + \vec{a}_{32n} + \vec{a}_{32t} + \vec{a}_{\text{cor}}. \end{aligned}$$

Dostředivé zrychlení unášivého pohybu:

$$a_{21n} = \omega_{21}^2 \cdot \vec{O}_1\vec{L}.$$

Tečné zrychlení unášivého pohybu:

$$a_{21t} = \epsilon_{21} \cdot \vec{O}_1\vec{L}.$$

Dostředivé zrychlení relativního pohybu:

$$a_{32n} = \omega_{32}^2 \cdot \overline{O_2L}$$

Tečné zrychlení relativního pohybu:

$$a_{32t} = \varepsilon_{32} \cdot \overline{O_2L}$$

Coriolisovo zrychlení:

$$a_{\text{cor}} = 2 \cdot v_{32} \cdot \omega_{21}$$

Příklad 62.

Určete okamžité zrychlení bodu L , který koná složený rovinný pohyb složený ze dvou rotací podle obr. 3.20.

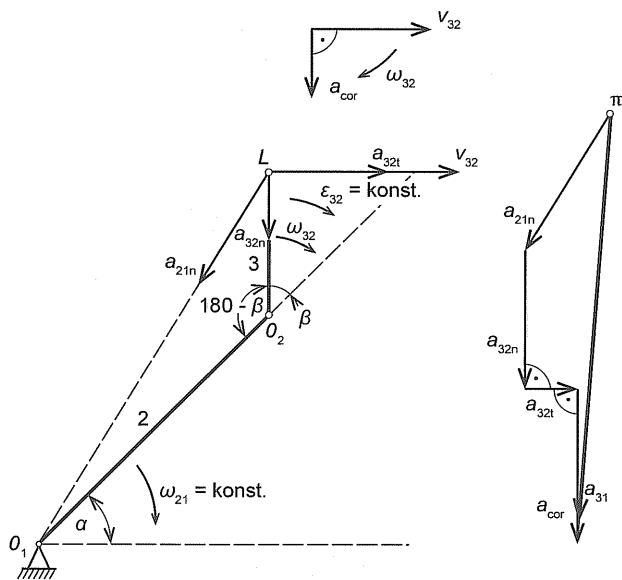
Dáno:

$$\overline{O_1O_2} = 0,5 \text{ m}, \quad \overline{O_2L} = 0,2 \text{ m}, \quad \omega_{21} = 6 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = \text{konst.},$$

$$\omega_{32} = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}, \quad \varepsilon_{32} = 40 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}, \quad \alpha = 45^\circ, \quad \beta = 45^\circ.$$

Měřítka délek: $1 \text{ mm} \cong 0,01 \text{ m}$.

Měřítka zrychlení: $1 \text{ mm} \cong 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.



Obr. 3.20

Vzdálenost :

$$\overline{O_1L} = \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 + \overline{O_2L}^2 - 2 \cdot \overline{O_1O_2} \cdot \overline{O_2L} \cdot \cos(180^\circ - \beta)} =$$

$$= \sqrt{0,5^2 + 0,2^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 0,2 \cdot \cos(180^\circ - 45^\circ)} \text{ m} =$$

$$= 0,657 \text{ m}.$$

Okamžité zrychlení bodu L :

$$\vec{a}_L = \vec{a}_{31} = \vec{a}_{21n} + \vec{a}_{32n} + \vec{a}_{32t} + \vec{a}_{\text{cor}}.$$

Normálové zrychlení unášivého pohybu:

$$a_{21n} = \omega_{21}^2 \cdot \overline{O_1L} = (6 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})^2 \cdot 0,657 \text{ m} = 23,65 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Normálové zrychlení relativního pohybu:

$$a_{32n} = \omega_{32}^2 \cdot \overline{O_2L} = (10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})^2 \cdot 0,2 \text{ m} = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Tečné zrychlení relativního pohybu:

$$a_{32t} = \varepsilon_{32} \cdot \overline{O_2L} = 40 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 0,2 \text{ m} = 8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Coriolisovo zrychlení:

$$a_{\text{cor}} = 2 \cdot v_{32} \cdot \omega_{21} = 2 \cdot 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 6 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = 24 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

$$v_{32} = \omega_{32} \cdot \overline{O_2L} = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 0,2 \text{ m} = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

$$a_L = (23,65 + 20 + 8 + 24) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 75,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Příklad 63.

Určete rychlost a zrychlení bodu E mechanismu podle obr. 3.21, který je zvedán hydraulickým válcem s konstantní rychlostí pístu $v_{32} = 0,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

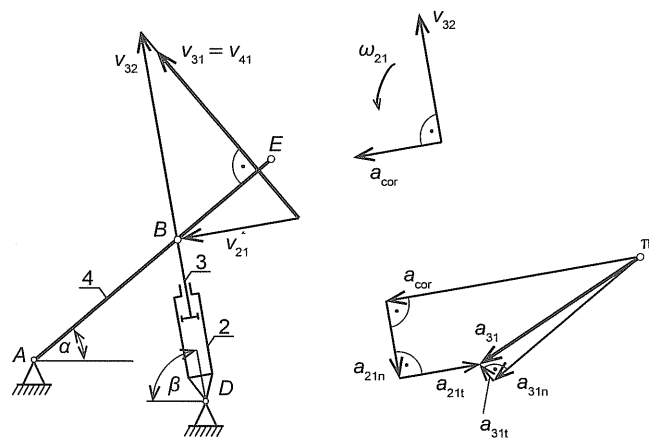
Rozměry:

$$\overline{AE} = 5 \text{ m}, \quad \overline{AB} = 3 \text{ m}, \quad \overline{BD} = 2,2 \text{ m}, \quad \alpha = 40^\circ, \quad \beta = 80^\circ.$$

Měřítka délek: $1 \text{ mm} \cong 0,01 \text{ m}$.

Měřítka rychlostí: $1 \text{ mm} \cong 0,005 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Měřítka zrychlení: $1 \text{ mm} \cong 0,0005 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.



Obr. 3.21

Řešení

Protože unášivý pohyb hydraulického válce je rotační, rychlosti i zrychlení zjistíme metodou Coriolisova rozkladu. Bod B je společný pro členy 3 a 4, proto určíme nejdříve rychlost a zrychlení toho bodu. Pro rychlost bodu B platí rozklad:

$$B: \vec{v}_{41} = \vec{v}_{31} = \vec{v}_{32} + \vec{v}_{21}.$$

Rychlost \vec{v}_{32} je dána, rychlost \vec{v}_{21} je kolmá na spojnici bodů B, D . Rychlost \vec{v}_{31} je kolmá na spojnici bodů A, B . Obrazec rychlostí viz obr. 3.21.

Odměřeno:

$$\vec{v}_{21} = 0,11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \vec{v}_{31} = 0,21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Úhlová rychlost:

$$\omega_{21} = \frac{v_{21}}{BD} = \frac{0,11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2,2 \text{ m}} = 0,05 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pro zrychlení bodu B platí vztah:

$$\vec{a}_{41} = \vec{a}_{31} = \vec{a}_{32} + \vec{a}_{21} + \vec{a}_{\text{cor}}.$$

$$\vec{a}_{31n} + \vec{a}_{31t} = 0 + \vec{a}_{21n} + \vec{a}_{21t} + \vec{a}_{\text{cor}}.$$

Velikost Coriolisova zrychlení určíme z rovnice:

$$a_{\text{cor}} = 2v_{32} \cdot \omega_{21} = 2 \cdot 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0,05 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 0,02 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

směr a smysl určíme podle obr. 3.21.

Velikost a_{21n} vypočítáme podle vztahu:

$$a_{21n} = \frac{v_{21}^2}{BD} = \frac{(0,11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2,2 \text{ m}} = 0,0055 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Nositelka tohoto zrychlení leží na spojnici bodů B, D , zrychlení směřuje do bodu D . Tečná složka zrychlení a_{21t} je kolmá na složku normálovou. Byla odměřena 10 mm, tj. $0,005 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Pohyb 32 je posuvný konstantní rychlostí, zrychlení relativního pohybu a_{32} je tedy nulové.

Velikost zrychlení a_{31n} vypočítáme podle vztahu:

$$a_{31n} = \frac{v_{31}^2}{AB} = \frac{(0,21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{3,0 \text{ m}} = 0,0147 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Nositelka tohoto zrychlení leží na spojnici bodů A, B , zrychlení směřuje do bodu A . Tečná složka zrychlení a_{31t} je kolmá na složku normálovou a opět nám vyjde z obrazce zrychlení. Odměřeno 6 mm, tj. $0,003 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Rychlost a zrychlení bodu E můžeme zjistit z rychlosti bodu B a z podobnosti obrazců:

$$\vec{v}_{31} \equiv \vec{v}_B, \quad \vec{a}_{31t} \equiv \vec{a}_{Bt}, \quad \vec{a}_{31n} \equiv \vec{a}_{Bn}.$$

Dále platí:

$$\omega_{41} = \frac{v_B}{AB} = \frac{0,21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{3 \text{ m}} = 0,07 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\varepsilon_{41} = \frac{a_{Bt}}{AB} = \frac{0,003 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{3 \text{ m}} = 0,001 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Rychlost bodu E :

$$v_E = \omega_{41} \cdot \overline{AE} = 0,07 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 5 \text{ m} = 0,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Zrychlení bodu E :

$$a_{Et} = \varepsilon_{41} \cdot \overline{AE} = 0,001 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 5 \text{ m} = 0,005 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

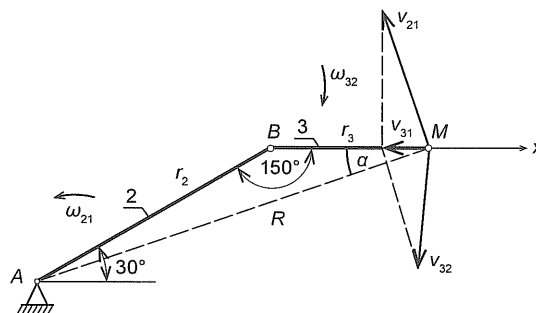
$$a_{En} = \frac{v_E^2}{AE} = \frac{(0,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{5 \text{ m}} = 0,0245 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$a_E = \sqrt{a_{Et}^2 + a_{En}^2} =$$

$$= \sqrt{0,005^2 + 0,0245^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 0,0247 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Úloha

1. Část manipulátoru (obr. 3.22) se skládá ze dvou ramen o poloměrech $r_2 = 1 \text{ m}$ a $r_3 = 0,6 \text{ m}$. Rameno 2 se otáčí kolem svislé osy otáčkami $n_{21} = 0,3 \text{ s}^{-1}$. Určete, jakými relativními otáčkami n_{32} se musí v daném okamžiku otáčet rameno 3, aby se bod M pohyboval ve směru osy x . Určete dále velikost relativní rychlosti v_{32} , výsledné rychlosti v_{31} a Coriolisovo zrychlení bodu M .



Obr. 3.22

Poznámka: nejprve pomocí kosinové věty vypočítejte poloměr R .

$$(R = 1,55 \text{ m}, v_{21M} = 2,92 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, v_{32M} = 2,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$n_{32} = 0,73 \text{ s}^{-1}, v_{31M} = 0,94 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, a_{\text{cor}M} = 10,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})$$

Kontrolní otázky

1. Jaké varianty mohou nastat při současných pohybech těles?
2. Vysvětlete základní rozklad pohybu. Platí při něm zákon rovnoběžníka rychlostí a zrychlení?
3. Jestliže je unášivý pohyb rotační, proč neplatí zákon rovnoběžníka pro zrychlení?
4. Kdy počítáme s Coriolisovým zrychlením?
5. Jak je definováno Coriolisovo zrychlení, jaký má směr a velikost?

4 KINEMATIKA SOUSTAVY TĚLES

4.1 KINEMATICKÝ MECHANISMUS

Kinematický mechanismus tvoří soustava těles, které jsou navzájem určitým způsobem spojeny v jeden celek a zajišťují jednoznačné pohyby svých jednotlivých členů. Jestliže je zadaný pohyb hnacího členu, potom všechny ostatní členy mohou vykonávat pouze takový pohyb, který z hnacího členu můžeme odvodit. Člen mechanismu, který je vzhledem na vztažený prostor v klidu, se nazývá rám a ve schématech je vždy označen číslem 1.

Úlohou nauky o mechanismech je:

- Navrhnout převod jednoho pohybu na druhý, např. posuv – posuv (kladka, klínový mechanismus), rotace – posuv (šroub – matice, ozubené kolo – ozubený hřeben, klikový mechanismus), rotace – rotace (ozubená kola, třecí převody).
- Navrhnout takový mechanismus, kterého hnaný člen bude vykonávat předepsaný pohyb při známém pohybu hnacího členu, např. rozvod ventilů u spalovacího motoru.

4.1.1 Stupně volnosti bodu a tělesa

Vzájemná pohyblivost útvarů je charakterizována počtem stupňů volnosti. Počet stupňů volnosti udává počet

nezávislých údajů – souřadnic, který potřebujeme k určení rychlosti pohybu členu.

Bod na přímce se může pohybovat ve směru přímky, má jeden stupeň volnosti. Volný bod v rovině se může posouvat v osách x a y , má dva stupně volnosti. Volný bod v prostoru se může posouvat v osách x , y a z , má tři stupně volnosti.

Volné těleso v rovině se může posouvat v osách x a y a ještě otáčet. Má tři stupně volnosti.

Volné těleso v prostoru se může posouvat podél tří os a také otáčet kolem tří os. Má šest stupňů volnosti.

Jednotlivé členy mechanismu jsou vzájemně spojeny vazbami. Každé takové spojení dává členům mechanismu jenom omezenou možnost pohybu. Vazba částečně mechanismus znehybňuje.

4.1.2 Kinematické dvojice

Kinematickou dvojici tvoří dvě tělesa spojená vazbou, která umožňuje určitý počet základních pohybů (otáčení, posuv, valení). Počet těchto možných relativních pohybů je stupeň volnosti pohybu i . Kinematické dvojice mohou odebrat v rovině jeden až dva stupně volnosti, v prostoru jeden až pět stupňů volnosti, neboť spojení musí být pohyblivé. Pro rovinné soustavy jsou jednotlivé základní kinematické dvojice uvedeny v tab. 4.1.

Tabulka 4.1. Kinematické dvojice v rovině

Schéma	Název dvojice	Značka dvojice	Stupně volnosti	Druh pohybu	Poznámka
	rotační	r	$i = 1$	rotační kolem stálé osy	odebírání 2° volnosti, neumožňuje dva posuvy
	posuvná	p	$i = 1$	přímočarý posuvný pohyb	odebírání 2° volnosti, neumožňuje jeden posuv a rotaci
	valivá	v	$i = 1$	valivý pohyb, otáčení kolem pólu	odebírání 2° volnosti, neumožňuje dva posuvy
	obecná	o	$i = 2$	členy se po sobě smýkají	odebírání 1° volnosti, neumožňuje jeden posuv

Jestliže chceme určit stupeň volnosti celého mechanismu, musíme nejprve vytvořit příslušné kinematické dvojice a určit jejich stupeň volnosti.

Počet stupňů volnosti celého kinematického mechanismu v rovině je dán vztahem:

$$i = 3(n - 1) - 2(r + p + v) - o, \quad (4.1)$$

kde i je počet stupňů volnosti soustavy těles,

n – počet všech členů včetně rámu,

r – počet rotačních dvojic,

p – počet posuvných dvojic,

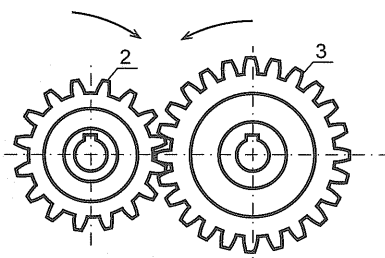
v – počet valivých dvojic,

o – počet obecných dvojic.

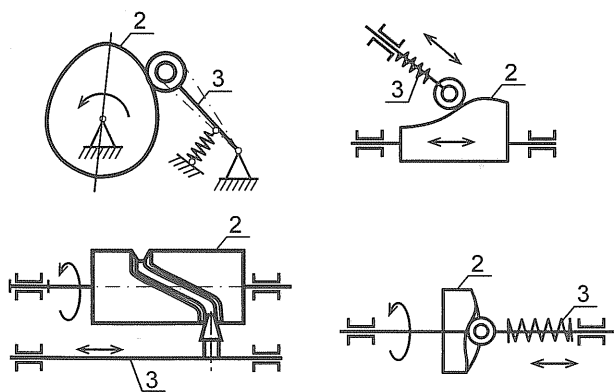
4.1.3 Základní rovinné mechanismy

• Tříčlenné mechanismy

Musí nutně obsahovat jednu obecnou dvojici. Jedním ze základních trojčlenných mechanismů je soukolí se dvěma ozubenými koly s obecnou vazbou (obr. 4.1). Zuby kol se po sobě smýkají. Na obr. 4.2 jsou uvedeny mechanismy s vačkami.



Obr. 4.1



Obr. 4.2

• Čtyřčlenné mechanismy

Některé z těchto mechanismů jsou uvedeny na obr. 4.3 až 4.5. Nejprve uvedeme jednoduchý rovinný čtyřkloubový mechanismus s jedním stupněm volnosti.

Názvosloví:

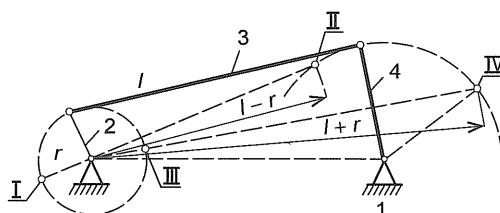
1 – nehybný člen, rám,

2 – hnací člen, klika, otáčí se o plný úhel 2π ,

3 – ojnice, koná obecný rovinný pohyb,

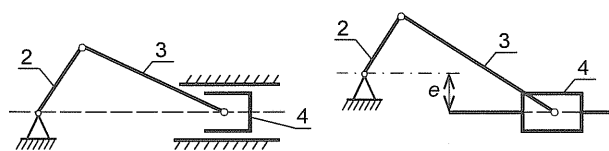
4 – hnaný člen, vahadlo, otáčí se o úhel menší než 2π ; kýve,

I až IV – úvratě.



Obr. 4.3

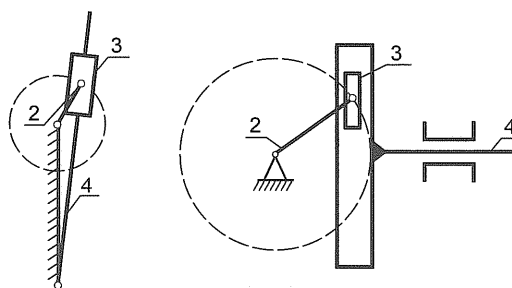
U klikového mechanismu bude později proveden podrobný rozbor rychlostí a zrychlení jednotlivých členů. Na obr. 4.4 je uveden centrický a excentrický klikový mechanismus.



Obr. 4.4

Další typy čtyřčlenných mechanismů:

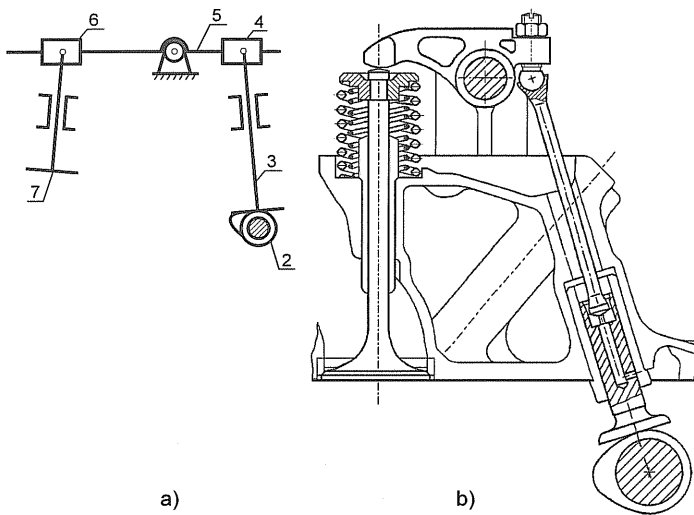
Mechanismy s kývavou nebo pravoúhlou kulisou jsou na obr. 4.5.



Obr. 4.5

• Složené mechanismy

Složené mechanismy vznikají ze základních, připojováním dalších skupin. Na obr. 4.6a je znázorněno kinematické schéma rozvodu OHV u spalovacího motoru. Je uvedena i konstrukce rozvodu (obr. 4.6b). Hnací člen je vačka (2), hnaný člen je ventil (7). Mechanismus má sedm členů, čtyři rotační vazby, čtyři posuvné vazby a jednu vazbu obecnou.



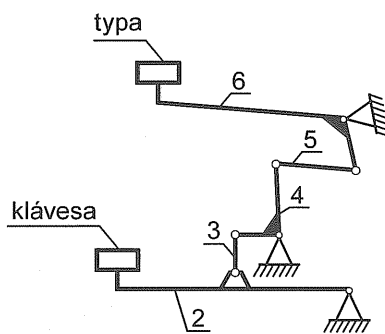
Obr. 4.6

Počet stupňů volnosti:

$$i = 3(n - 1) - 2(r + p + v) - o = \\ = 3(7 - 1) - 2(4 + 4 + 0) - 1 = 1.$$

Na obr. 4.7 je zakresleno převodové ústrojí psacího stroje. Pákový mechanismus má šest členů, v tom klávesnicová páka (2), typová páka s příslušným znakem (6). Mechanismus obsahuje sedm rotačních dvojic.

Počet stupňů volnosti:



Obr. 4.7

$$i = 3(n - 1) - 2(r + p + v) - o = \\ = 3(6 - 1) - 2(7 + 0 + 0) - 0 = 1.$$

Na obr. 4.8 jsou podrobně rozebrány stupně volnosti u dvoučelistové brzdy. Mechanismus má jeden stupeň volnosti.

$$i = 3(n - 1) - 2(r + p + v) - o = \\ = 3(8 - 1) - 2(9 + 0 + 0) - 2 = 1.$$

Kontrolní otázky

1. Charakterizujte kinematický mechanismus, jaká je jeho funkce?
2. Vysvětlete pojem: počet stupňů volnosti bodu a tělesa v rovině a v prostoru.
3. Čím je charakterizována pohyblivost jednotlivých členů soustavy?
4. Jaké základní kinematické dvojice znáte? Kolik stupňů volnosti tělesu odebírají?
5. Jaký vztah platí pro počet stupňů volnosti celého rovinného mechanismu s rotačními, posuvnými, valivými a obecnými dvojicemi.
6. Uveďte příklady na vazby těles v rovině.

4.2 MECHANICKÉ PŘEVODY

K přenosu rotačního pohybu z hnacího hřídele na hnaný hřídel a k zajištění plynulého toku výkonu se používají mechanické převody. Při převodu se obvykle mění otáčky hnaného hřídele a také krouticí moment. Charakteristickou veličinou převodů je převodový poměr i .

Je definován:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (4.2)$$

kde ω_1 je úhlová rychlost na hnacím hřídeli ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$),
 ω_2 – úhlová rychlost na hnaném hřídeli ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$),
 n_1 – otáčky hnacího hřídele (s^{-1}),
 n_2 – otáčky hnaného hřídele (s^{-1}).

Jestliže převodový poměr $i > 1$, potom jde o převod dopomala (reduktory). Při převodovém poměru $i < 1$ se uskutečňuje převod dorychla (multiplikátory).

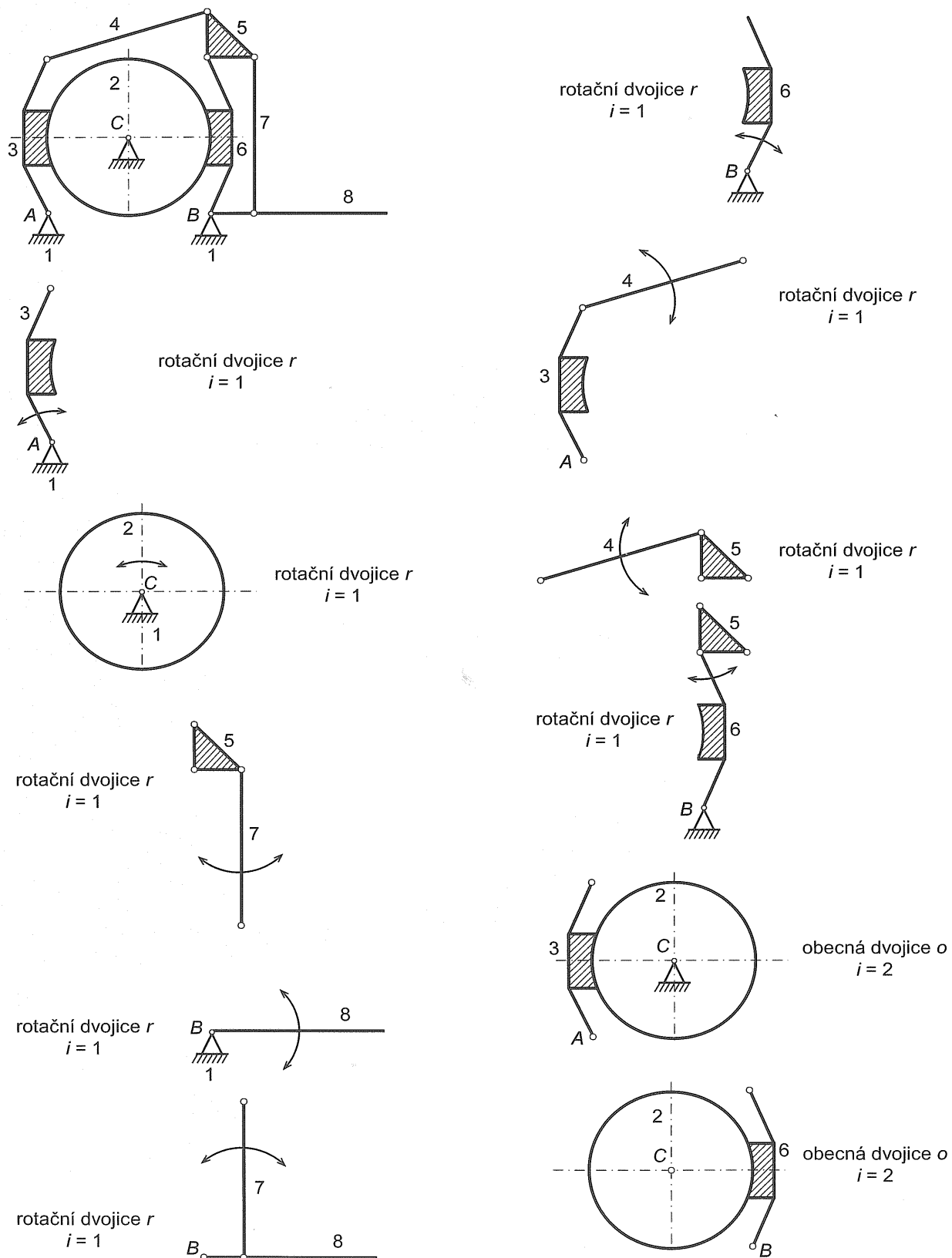
Pohyb z hnacího hřídele na hnaný se děje pomocí převodových členů (řemenů, řetězů, lan) nebo bezprostředním dotykem kol (ozubená kola, třecí převody).

Podle počtu kol (řemenic, kladek), které se zúčastní přenosu, rozeznáváme převody jednoduché nebo složené.

Další dělení je podle vzájemné polohy os hřídelů – osy mohou být rovnoběžné, různoběžné nebo mimoběžné. V dalším textu se budeme zabývat pouze převody s rovnoběžnými osami hřídelů.

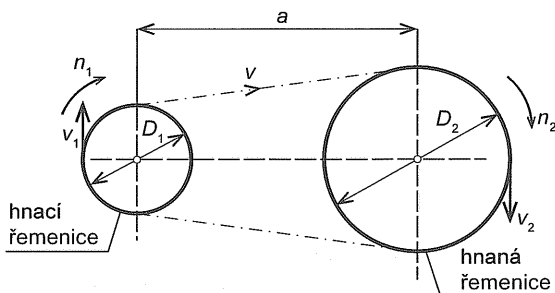
4.2.1 Jednoduchý převod

Sestává pouze ze dvou kotoučů (řemenic, kladek, řetězových kol) nebo ozubených či třecích kol. Volba převodu závisí na velikosti osové vzdálenosti, hodnotě převodového poměru, obvodové rychlosti a velikosti přenášeného výkonu. Při relativně velké vzdálenosti os dáváme přednost převodu řemenovému, lanovému nebo řetězovému. Při malé vzdálenosti os používáme nejčastěji k přenosu ozubená kola.

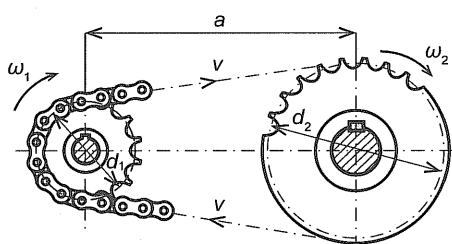


Obr. 4.8

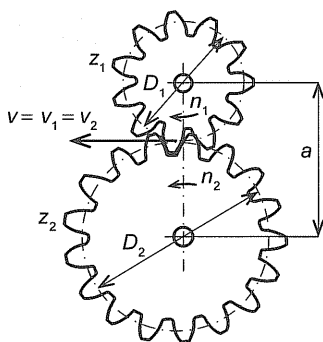
Na obr. 4.9 až 4.13 jsou schematicky naznačeny – jednoduchý převod řemenový, převod řetězový, převod ozubenými koly a třecí převod.



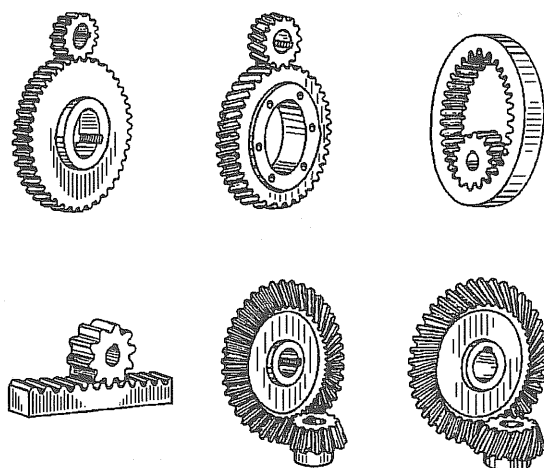
Obr. 4.9



Obr. 4.10



Obr. 4.11



Obr. 4.12

• Řemenové převody (viz obr. 4.9)

Převod se uskutečňuje plochým řemenem nebo klínovými či ozubenými řemeny. Při výpočtu vycházíme z podmínky celistvosti řemene.

Obvodové rychlosti:

$$v_1 = v_2 = v,$$

$$\frac{D_1}{2} \cdot \omega_1 = \frac{D_2}{2} \cdot \omega_2; \quad \pi \cdot D_1 \cdot n_1 = \pi \cdot D_2 \cdot n_2.$$

Převodový poměr:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1}. \quad (4.3)$$

Převodový poměr i u převodů s plochými a klínovými řemeny kolísá. U převodů s ozubeným řemenem je převodový poměr i konstantní.

• Řetězové převody (viz obr. 4.10)

Postupná rychlost řetězu je nerovnoměrná v důsledku tuhosti jednotlivých článků a jejich náběhu na hnané řetězové kolo. Řetěz kmitá ve svislé rovině. Kolísání úhlové rychlosti hnané řetězky z ω_{\min} na ω_{\max} se periodicky mění a v důsledku toho se mění i okamžitý převodový poměr $i = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, zatímco poměr $i = \frac{n_1}{n_2} \approx \text{konst.}$

Za jmenovitý převodový poměr se považuje:

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} \approx \frac{d_2}{d_1}. \quad (4.4)$$

• Převody ozubenými koly

Kola jsou opatřena zuby vhodného, nejčastěji evolventního profilu (viz obr. 4.11). Velikost převodu ozubenými koly odvodíme pro čelní ozubená kola s přímými zuby. Ta patří mezi tzv. soukolí valivá. Dochází při něm k odvalování roztečných (valivých) válců spoluzabírajících kol. Další valivá soukolí jsou uvedena na obr. 4.12. Jde o čelní ozubená kola se šikmými zuby, čelní ozubená kola s vnitřním ozubením, pastorek s hřebenem, kuželová kola s přímými a šikmými zuby.

U čelních ozubených kol s přímými zuby se roztečný průměr kol vypočítá podle vztahu:

$$D = z \cdot m,$$

kde z je počet zubů kol,

m – modul (mm). U spoluzabírajících kol je modul stejný. Modul rozhoduje o velikosti zubů.

U všech valivých soukolí ve valivém bodě platí pro obvodové rychlosti vztah: $v_1 = v_2 = v,$

$$\frac{D_1}{2} \cdot \omega_1 = \frac{D_2}{2} \cdot \omega_2; \quad \pi \cdot D_1 \cdot n_1 = \pi \cdot D_2 \cdot n_2.$$

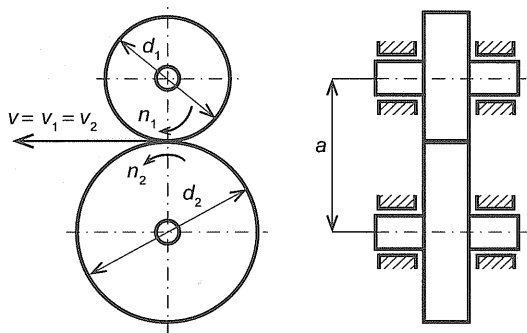
Převodový poměr i :

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (4.5)$$

kde D_1 a D_2 jsou roztečné průměry kol.

Převodový poměr u valivých soukolí je stálý, konstantní, při jakémkoliv pootočení kol. Také mírná odchylka osové vzdálenosti a od výpočtové hodnoty nemá vliv na velikost konstantního převodu.

• Třecí převody (obr. 4.13)



Obr. 4.13

V ideálním případě, když neuvažujeme skluz, musí být obvodové rychlosti obou kotoučů stejné. To znamená, že:

$$v_1 = v_2 = v,$$

$$\pi \cdot d_1 \cdot n_1 = \pi \cdot d_2 \cdot n_2,$$

Převodový poměr i :

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1}. \quad (4.6)$$

Převodový poměr je nepřesný, kolísavý.

Třecí převod a také převod s vnějším ozubením mění smysl otáčení hřídelů. U planetového diferenciálu u vnějšího ozubení uvádíme tento převod se znaménkem minus.

Příklad 64.

Kotouč kotoučové pily na dřevo má obvodovou rychlost $v = 35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Průměr kotouče $D = 300 \text{ mm}$. Elektromotor koná otáčky $n_1 = 2\,880 \text{ min}^{-1}$. Hnací řemenice řemenového převodu má průměr $D_1 = 140 \text{ mm}$. Určete převodový poměr a průměr hnané řemenice.

Řešení

Otáčky pilového kotouče a hnaného hřídele:

$$n_2 = \frac{v}{\pi \cdot D} = \frac{35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{\pi \cdot 0,3 \text{ m}} = 37,14 \text{ s}^{-1} = 2\,228 \text{ min}^{-1}.$$

Převodový poměr:

$$i_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{2\,880 \text{ min}^{-1}}{2\,228 \text{ min}^{-1}} = 1,29.$$

Průměr hnané řemenice:

$$i_{12} = \frac{D_2}{D_1} \Rightarrow D_2 = i \cdot D_1 = 1,29 \cdot 140 \text{ mm} = 180 \text{ mm}.$$

Příklad 65.

Na jízdním kole je instalována tzv. přehazovačka k zajištění optimálního režimu jízdy. Přední talířové kolo má počty zubů 47 a 53. Na zadním kole je namontováno pětikolečko s počty zubů 14, 16, 19, 22 a 25. Určete teoretický a praktický počet využitelných převodů.

Řešení

U řetězového převodu se převodový poměr vypočítá jako poměr počtu zubů na hnaném a hnacím kole. U jízdního kola jde o převod dorychla, převodový poměr tedy musí být menší než jedna.

Převody:

1. $\frac{25}{47} = 0,53.$
2. $\frac{22}{47} = 0,47.$
3. $\frac{19}{47} = 0,40.$
4. $\frac{16}{47} = 0,34.$
5. $\frac{14}{47} = 0,30.$
6. $\frac{25}{53} = 0,47.$
7. $\frac{22}{53} = 0,41.$
8. $\frac{19}{53} = 0,36.$
9. $\frac{16}{53} = 0,30.$
10. $\frac{14}{53} = 0,26.$

Přehazovačkou můžeme teoreticky získat 10 převodů, prakticky ale asi 6 převodů. Některé převody jsou stejné. Řetěz se také nesmí křížit.

4.2.2 Složený převod

Velikost jednoduchého převodu je omezena zejména z hlediska účinnosti a velikosti kotoučů, resp. kol. Proto pro větší hodnoty převodového poměru i navrhneme složený převod. Vznikne zařazením několika jednoduchých převodů za sebou. Mezi hnací a hnaný hřídel vkládáme tzv. předlohový hřídel (obr. 4.14).

Mezi hřídeli I a II je převodový poměr:

$$i_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

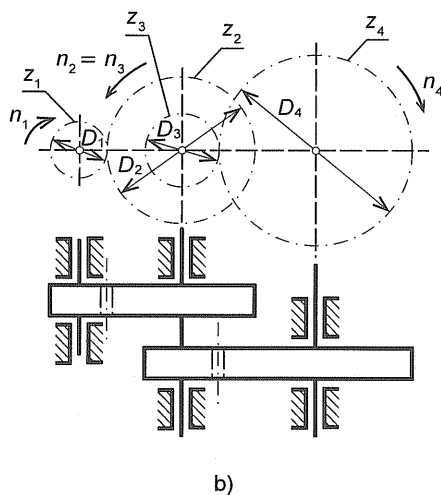
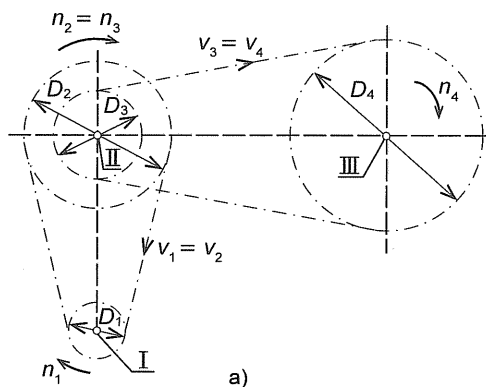
Mezi hřídeli II a III je převodový poměr:

$$i_{34} = \frac{n_3}{n_4} = \frac{D_4}{D_3} = \frac{z_4}{z_3}.$$

Po vynásobení dílčích převodů ($n_2 = n_3$) získáme celkový převod:

$$i = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_3}{n_4} = \frac{n_1}{n_4} = \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{D_4}{D_3} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} = i_{12} \cdot i_{34}. \quad (4.7)$$

Celkový převodový poměr se rovná součinu dílčích převodových poměrů.



Obr. 4.14

Příklad 66.

Určete dílčí převody a celkový převod ozubenými koly podle obr. 4.14. Dále vypočítejte roztečné průměry všech ozubených kol.

Dané hodnoty:

$$z_1 = 17, z_2 = 53, m_{12} = 3 \text{ mm}, z_3 = 19, z_4 = 56, m_{34} = 4,5 \text{ mm}.$$

Řešení

Dílčí převody:

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{53}{17} = 3,12,$$

$$i_{34} = \frac{z_4}{z_3} = \frac{56}{19} = 2,95.$$

Celkový převod:

$$i = i_{12} \cdot i_{34} = 3,12 \cdot 2,95 = 9,20.$$

Průměry kol (průměry roztečných kružnic):

$$D_1 = z_1 \cdot m_{12} = 17 \cdot 3 \text{ mm} = 51 \text{ mm},$$

$$D_2 = z_2 \cdot m_{12} = 53 \cdot 3 \text{ mm} = 159 \text{ mm},$$

$$D_3 = z_3 \cdot m_{34} = 19 \cdot 4,5 \text{ mm} = 85,5 \text{ mm},$$

$$D_4 = z_4 \cdot m_{34} = 56 \cdot 4,5 \text{ mm} = 252 \text{ mm}.$$

Poznámka: Krouticí momenty na kolech se při převodu dopomaha postupně zvětšují, proto modul (velikost zubu) se také obvykle zvětšuje, $m_{34} \geq m_{12}$.

Příklad 67.

Požadovaný celkový převod ozubenými koly $i = 12$. Jsou dány počty zubů na prvním soukolí: $z_1 = 19, z_2 = 74$. Určete počty zubů na druhém soukolí, nemá-li se skutečný převod lišit od požadovaného celkového převodu o více než 3 %.

Řešení

Převod na prvním soukolí:

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{74}{19} = 3,895.$$

Převod na druhém soukolí:

$$i_{34} = \frac{i}{i_{12}} = \frac{12}{3,895} = 3,081.$$

Volíme počet zubů pastorku druhého soukolí $z_3 = 20$.

Počet zubů hnaného kola druhého soukolí:

$$z_4 = i_{34} \cdot z_3 = 3,081 \cdot 20 \approx 61.$$

Skutečný převod:

$$i_{sk} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = \frac{74 \cdot 61}{19 \cdot 20} = 11,88.$$

Rozdíl požadovaného a skutečného převodu:

$$\Delta i = \frac{i - i_{sk}}{i} \cdot 100 \% = \frac{12 - 11,88}{12} \cdot 100 \% = 1 \% \dots \dots \text{převod vyhovuje.}$$

Poznámka: Počty zubů se volí obvykle nesoudělná čísla, aby se zuby kol co nejméně opotřebovávaly.

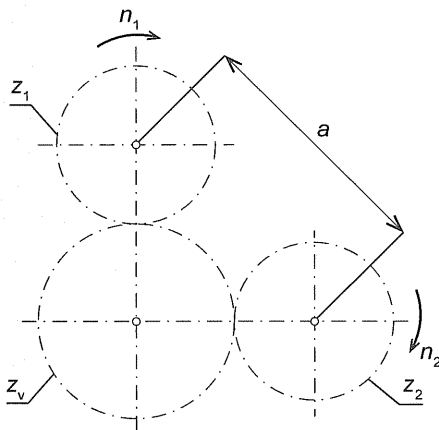
4.2.3 Převod s vloženým kolem

Vložené kolo z_v (obr. 4.15) zajišťuje stejný smysl otáčení hnacího i hnaného kola. Toho se využívá např. při návrhu zpátečky u převodovek automobilů. U převodovek obráběcích strojů zase využíváme poznatku, že vložené kolo umožňuje přenášet rotační pohyb s různými převodovými poměry mezi hnacím a hnaným hřídelem při konstantní vzdálenosti os a . Pracujeme s tzv. výměnnými koly.

Převodový poměr:

$$i_{12} = i_1 \cdot i_2 = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_v}{z_1} \cdot \frac{z_2}{z_v} = \frac{z_2}{z_1} \quad (4.8)$$

Vložené kolo nemá vliv na velikost převodového poměru, mění pouze smysl otáčení hnaného hřídele.



Obr. 4.15

Úlohy

- 1 Je dán složený převod klínovými řemeny. Elektromotor koná $2\,900\text{ min}^{-1}$. Na výstupu požadujeme 290 min^{-1} . Vypočítejte celkový převod a průměr řemenice D_4 . Dané průměry řemenic: $D_1 = 150\text{ mm}$, $D_2 = 450\text{ mm}$, $D_3 = 120\text{ mm}$.

$$(i_c = 10, D_4 = 400\text{ mm})$$

- 3 Určete počet zubů z_1 pastorku řetězového převodu u složeného převodu s řemenem a řetězem.

Je dán celkový převod $i = 9$, průměry řemenic $D_1 = 120\text{ mm}$, $D_2 = 360\text{ mm}$ a počet zubů hnané řetězky $z_2 = 51$.

$$(z_1 = 17)$$

- 4 U dvoustupňové převodovky s ozubenými koly s přímými zuby se uskutečňuje převod $i = 7,5$.

V převodovce jsou ozubená kola s počty zubů: $z_1 = 20$, $z_2 = 50$, $z_3 = 17$. Určete počet zubů kola 4.

$$(z_4 = 51)$$

4.2.4 Plynule měnitelné převody – variátory

Převod se plynule mechanicky mění pomocí variátorů. Lze je konstruovat jako třecí (obr. 4.16), řemenové nebo řetězové (obr. 4.17). Převodový poměr lze plynule měnit za provozu stroje. Variátorem lze dosáhnout převod dopomala i dorychla.

Poměr maximálních a minimálních otáček hnaného hřídele se nazývá **regulační rozsah** r . Je to charakteristická veličina variátoru:

$$r = \frac{n_{2\max}}{n_{2\min}} \quad (4.9a)$$

Maximální otáčky hnaného hřídele:

$$n_{2\max} = n_1 \cdot \frac{D_{1\max}}{D_{2\min}} \quad (4.9b)$$

Minimální otáčky hnaného hřídele:

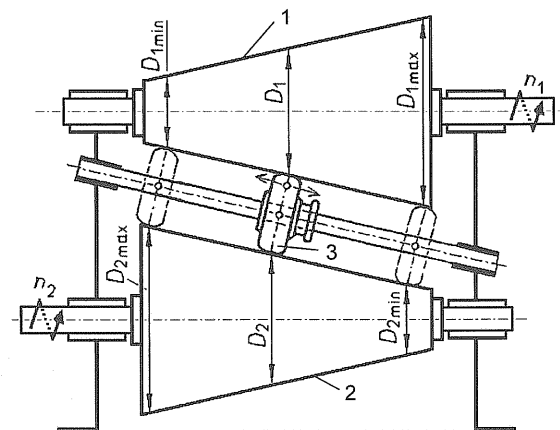
$$n_{2\min} = n_1 \cdot \frac{D_{1\min}}{D_{2\max}} \quad (4.9c)$$

Na obr. 4.16 je uveden třecí variátor. Rotační pohyb a kroticí moment se přenášejí z bubnu 1 na buben 2 pomocí přesuvné kladky 3. Ta se posouvá podél bubnů.

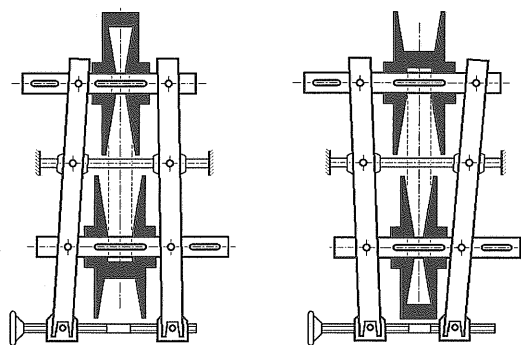
Na poloze kladky závisí velikost převodového poměru $i = \frac{n_1}{n_2} \approx \frac{D_2}{D_1}$.

Velikost převodového poměru nezávisí na velikosti kladky. Je to vlastně vložené kolo.

Na obr. 4.17 je znázorněn řetězový variátor. Tvoří ho dva páry kuželových kol s radiálními drážkami, do kterých zapadá lamelový řetěz. Převodový poměr se mění pomocí pákového mechanismu se šroubem s levým a pravým závitem tak, že první pár kotoučů se k sobě přibližuje a druhý pár kotoučů se současně oddaluje, nebo naopak (obr. 4.17 vlevo a vpravo). U páru kotoučů k sobě přitlačovaných se řetěz vysouvá na větší průměr, na druhém páru kotoučů se sesouvá na menší průměr. To má za následek změnu převodového poměru.



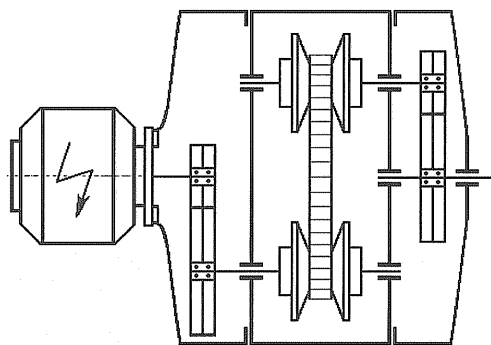
Obr. 4.16



právní a levý závit u šroubu

Obr. 4.17

Na obr. 4.18 je zakresleno spojení variátoru s převodovkami s ozubenými koly. Uspořádání je velice časté.



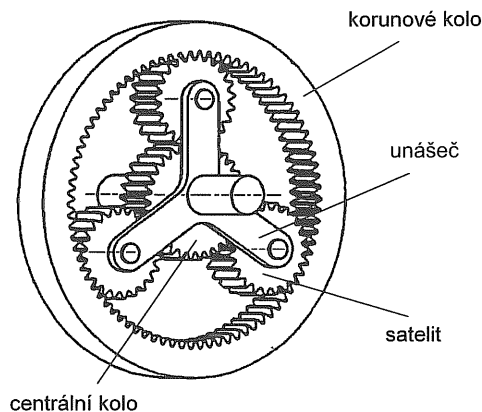
Obr. 4.18

Kontrolní otázky

1. Které veličiny se nejčastěji mění u mechanických převodů.
2. Vysvětlíte pojmy: převod dopomala, převod dorychla.
3. Co znamenají pojmy: reduktor a multiplikátor?
4. Napište základní vztah pro jednoduchý převod.
5. Co mají společného a co rozdílného převody řemenové a převody řetězové?
6. Co mají společného a co rozdílného převody ozubenými koly a převody třecí?
7. U kterých převodů je převodový poměr konstantní – přesný, v jakékoliv části jedné otáčky hnačího kola?
8. Proč se používá složený převod?
9. Jak se vypočítá převodový poměr u složeného převodu?
10. Kdy se používá převod s vloženým kolem? Proč se převodový poměr v tomto případě nemění?
11. Co je charakteristické pro variátory? Jaké jsou jejich výhody a nevýhody?
12. Jaké druhy variátorů znáte?
13. Co je regulační rozsah variátoru?

4.3 Planetové převody

Planetové převody jsou charakteristické tím, že jedno z jejich ozubených kol, satelit, provádí vůči rámu planetový pohyb. Koná současně dvě rotace – otáčí se kolem své vlastní osy a kolem osy unášeče, který satelity nese (obr. 4.19).



Obr. 4.19

U planetových soukolí je hnačí i hnaný člen uložený v jedné přímce. Planetových soukolí se využívá u automobilů, letadel, zdvihacích zařízení apod. Lze u nich dosáhnout značných převodových poměrů s malým počtem ozubených kol. Kroučící moment se rozdělí na více satelitů, což je výhodné. Zuby mohou mít menší velikost – moduly kol. U centrálních (korunových) kol souhlasí jejich osy s osou převodu. Tato kola mohou být pohyblivá nebo nepohyblivá, zastavená. Korunová kola mají ozubení vnější, ale i vnitřní. Unášeč se otáčí kolem centrální osy a slouží jako nosič satelitů. Nejčastěji se používají tři satelity. Satelity tvoří stejná kola s vnějším ozubením otočně rovnoměrně uložená na čepech unášeče.

Převody mohou být použity jako reduktory (převody dopomala), ale i multiplikátory (převody dorychla). Nevýhodou planetových převodů je jejich konstrukční složitost.

Planetová soukolí – diferenciály – mají obecně tři hlavní hřídele, z nichž jeden nebo dva mohou být hnačí. Obecně jde o mechanismy se dvěma stupni volnosti. Jestliže je jeden člen zastaven (mimo satelity), potom mluvíme o planetové převodovce.

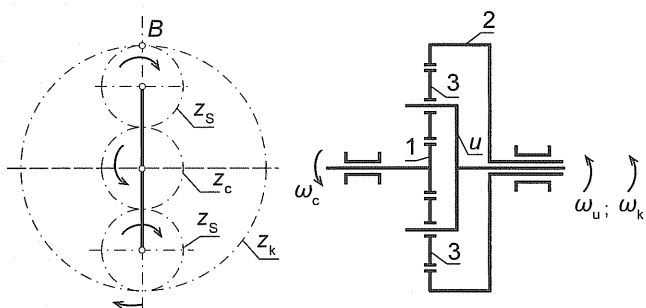
Odvození kinematické vazby se nejčastěji provádí těmito způsoby:

1. Metodou záměny planetového soukolí za soukolí předlohové. Podstatou této metody je změna pozorovatele kinematického stavu. Zatímco úhlové rychlosti hlavních hřídelů jsou uvažovány vzhledem k rámu, při záměně soukolí je pozorovatel umístěn na unášeči. Vstupní úhlová rychlost je $\omega_1 - \omega_u$ a výstupní úhlová rychlost je $\omega_2 - \omega_u$. Znamená to, že zastavením unášeče připojíme celé soustavě opačnou úhlovou rychlost $-\omega_u$. Převodový poměr takto zavedeného předlohového soukolí potom velice snadno vypočítáme.

2. Pomocí úhlových a obvodových rychlostí. Tato metoda je názorná.
3. Pomocí pólů pohybu. Řešíme valení ozubených kol v pólech pohybu. Využíváme přitom rozkladu pohybů.

4.3.1 Čelní planetový diferenciál s jednoduchými satelity

Na obr. 4.20 je znázorněn diferenciál s jednoduchými satelity.



Obr. 4.20

Centrální kolo 1 se otáčí úhlovou rychlostí ω_c , korunové kolo 2 úhlovou rychlostí ω_k , unášeč ω_u a satelity ω_s kolem čepů unášeče. Záměnou soukolí za předlohové (po zastavení unášeče) získáme užítím vztahu (4.7) rovnici:

$$\frac{\omega_c - \omega_u}{\omega_k - \omega_u} = \left(-\frac{z_s}{z_c}\right) \cdot \left(\frac{z_k}{z_s}\right) = -\frac{z_k}{z_c}. \quad (4.10)$$

Po úpravě dostaneme základní rovnici diferenciálu:

$$(\omega_c - \omega_u) \cdot z_c = -(\omega_k - \omega_u) \cdot z_k. \quad (4.11)$$

Poznámka: Znaménko minus je u vnějšího soukolí, protože mění smysl otáčení kol (viz obr. 4.20).

Pro úhlovou rychlost satelitů kolem čepů unášeče platí:

$$\frac{\omega_c - \omega_u}{\omega_s} = -\frac{z_s}{z_c} \Rightarrow \omega_s = -\frac{z_c}{z_s}(\omega_c - \omega_u) \quad (4.12a)$$

nebo z rovnosti rychlostí v bodě B podle rovnice (4.5) platí:

$$\frac{\omega_s}{\omega_k - \omega_u} = +\frac{z_k}{z_s} \Rightarrow \omega_s = +\frac{z_k}{z_s}(\omega_k - \omega_u). \quad (4.12b)$$

Počet stupňů volnosti u planetového diferenciálu:

Počet členů mechanismu: 5.

Počet rotačních dvojic: 4.

Počet obecných dvojic: 2.

Počet stupňů volnosti:

$$i = 3(n - 1) - 2(r + p + v) - o = 3(5 - 1) - 2 \cdot 4 - 2 = 2^\circ.$$

Příklad 68.

Určete otáčky unášeče n_u diferenciálu s jednoduchými satelity podle obr. 4.20.

Jsou dány: otáčky $n_c = 25 \text{ s}^{-1}$, $n_k = 2,5 \text{ s}^{-1}$, počty zubů $z_c = 40$, $z_s = 20$, $z_k = 80$.

Řešení

Z rovnice 4.11 vypočítáme úhlovou rychlost unášeče a následně i jeho otáčky:

$$\omega_u = \frac{\omega_c \cdot z_c + \omega_k \cdot z_k}{z_c + z_k}.$$

Otáčky unášeče:

$$n_u = \frac{n_c \cdot z_c + n_k \cdot z_k}{z_c + z_k} = \frac{25 \cdot 40 + 2,5 \cdot 80}{40 + 80} \text{ s}^{-1} = 10 \text{ s}^{-1}.$$

4.3.2 Čelní planetová převodovka s jednoduchými satelity

Čelní planetová převodovka s jednoduchými satelity se zastaveným korunovým kolem ($\omega_k = 0$, obr. 4.21).

Stanovení počtu stupňů volnosti u planetové převodovky:

Počet členů mechanismu: 4.

Počet rotačních dvojic: 3.

Počet obecných dvojic: 2.

Počet stupňů volnosti:

$$i = 3(n - 1) - 2(r + p + v) - o = 3(4 - 1) - 2 \cdot 3 - 2 = 1^\circ.$$

U této převodovky provedeme řešení všemi třemi dříve uvedenými způsoby.

a) Metoda zastavení unášeče.

Do vztahu (4.10) dosadíme za ω_k nulu:

$$\frac{\omega_c - \omega_u}{-\omega_u} = -\frac{z_k}{z_c}.$$

Po úpravě získáme převodový poměr mezi centrálním kolem a unášečem:

$$\begin{aligned} i_{cu}^k &= \frac{\omega_c}{\omega_u} = 1 + \frac{z_k}{z_c} = \frac{z_c + z_k}{z_c} = \frac{z_c + (z_c + 2z_s)}{z_c} = \\ &= \frac{2(z_c + z_s)}{z_c}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

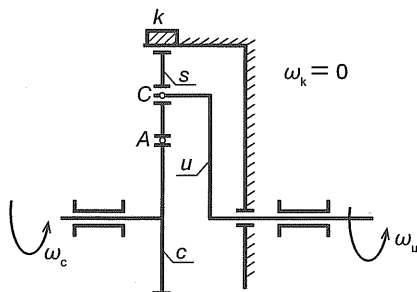
Symbol pro převodový poměr i se opatřuje třemi indexy – horním, který označuje zastavený člen a dvěma dolními, z nichž první odpovídá hnacímu členu a druhý členu hnanému.

Tento převod označíme: $i_{cu}^k > 1$; je to převod dopomala, tzv. velká redukce.

Za předpokladu, že hnacím členem je unášec, má výraz pro převodový poměr tvar:

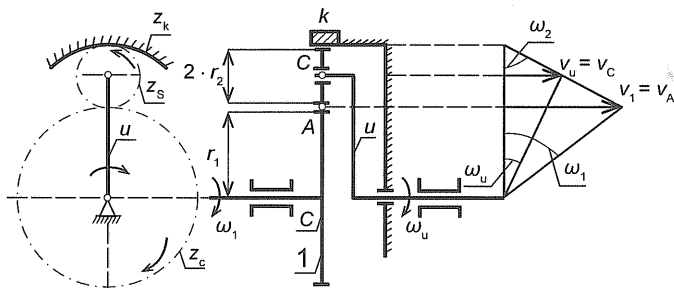
$$i_{uc}^k = \frac{\omega_u}{\omega_c} = \frac{z_c}{z_c + z_k} < 1.$$

Jde o převod dorychla.



Obr. 4.21

b) Určení převodového poměru z rovnosti obvodových rychlostí (obr. 4.22).



Obr. 4.22

Rychlost v_A

$$r_1 \cdot \omega_1 = 2 r_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{r_1}{2 r_2}.$$

Rychlost v_C :

$$r_u \cdot \omega_u = r_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \omega_u \cdot \frac{r_u}{r_2} = \omega_u \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_2}.$$

Z obou předchozích rovnic vyjádříme převodový poměr:

$$i_{cu}^k = \frac{\omega_1}{\omega_u} = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1} = \frac{2(z_c + z_s)}{z_c} = \frac{z_k + z_c}{z_c}. \quad (4.14)$$

c) Určení převodového poměru pomocí pólů pohybu (obr. 4.23).

Podmínka valení v bodě $A \equiv P_{23}$:

$$v_{21} = v_{31}.$$

Pohyb 31 rozložíme podle rovnice:

$$v_{31} = v_{34} + v_{41}.$$

$$\omega_{21} \cdot r_2 = -\omega_{34} \cdot r_3 + \omega_{41} \cdot r_2. \quad (A)$$

Podmínka valení v bodě B, tj. $B \equiv P_{31}$:

$$v_{31} = v_{34} + v_{41}.$$

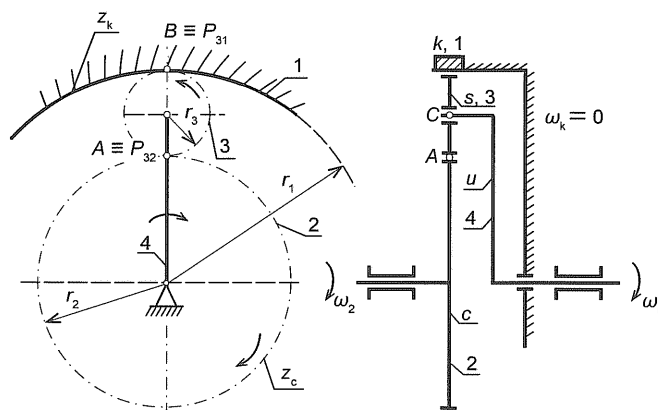
$$0 = \omega_{34} \cdot r_3 + \omega_{41} \cdot r_1. \quad (B)$$

Rovnice (A) a (B) sečteme:

$$\omega_{21} \cdot r_2 = \omega_{41} \cdot (r_1 + r_2),$$

$$i_{24} = \frac{\omega_{21}}{\omega_{41}} = \frac{r_1 + r_2}{r_2} = \frac{z_k + z_c}{z_c} = 1 + \frac{z_k}{z_c}.$$

Výsledek je stejný s rovnicemi (4.13) a (4.14).



Obr. 4.23

Čelní planetová převodovka s jednoduchým satelitem se zastaveným centrálním kolem (obr. 4.24).

Do vztahu (4.10) dosadíme za ω_c nulu:

$$\frac{-\omega_u}{\omega_k - \omega_u} = -\frac{z_k}{z_c}.$$

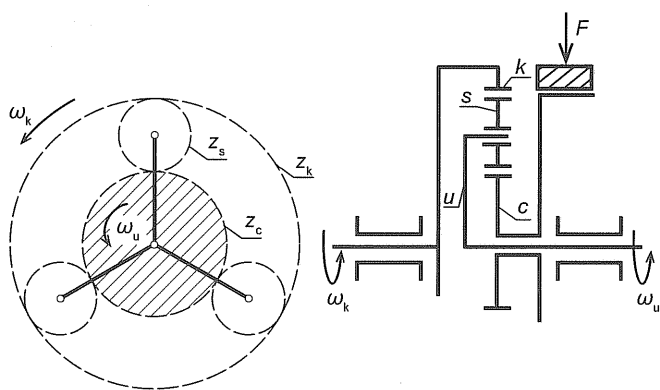
$$i_{ku}^c = \frac{\omega_k}{\omega_u} = 1 + \frac{z_c}{z_k} > 1 \dots : \quad (4.15)$$

převod dopomala, malá redukce.

Převrácením zlomků získáme výrazy pro převodový poměr mezi unášecem a korunovým kolem:

$$i_{uk}^c = \frac{\omega_u}{\omega_k} = \frac{z_k}{z_c + z_k} < 1 \dots : \quad (4.16)$$

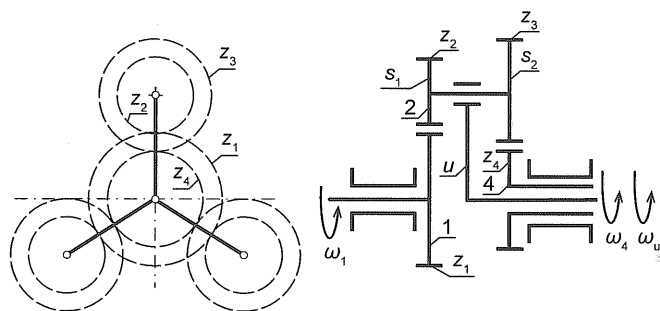
převod dorychla.



Obr. 4.24

4.3.3 Čelní planetový mechanismus s dvojitými satelity

Na obr. 4.25 je znázorněn diferenciál s dvojitými satelity typu E – E.

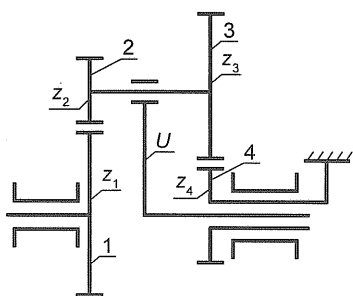


Obr. 4.25

Oba satelity konají epicykloidální pohyb, odtud označení převodu. Obě centrální kola mají vnější ozubení. Změnou soukolí za soukolí předlohouvé (při zastaveném unášeči) získáme vztah:

$$\frac{\omega_1 - \omega_u}{\omega_4 - \omega_u} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) \tag{4.17}$$

Zastavením centrálního kola 4 (\$\omega_4 = 0\$, obr. 4.26) získáme planetovou převodovku.

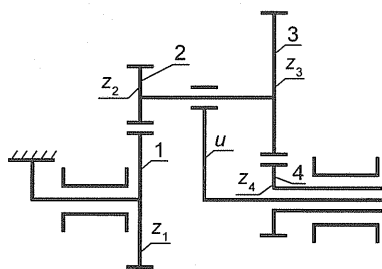


Obr. 4.26

Dosazením do vztahu (4.17) dostaneme výraz:

$$\frac{\omega_1 - \omega_u}{-\omega_u} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} \Rightarrow i_{1u}^4 = \frac{\omega_1}{\omega_u} = 1 - \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} \tag{4.18}$$

Zastavením centrálního kola 1 (\$\omega_1 = 0\$, obr. 4.27) získáme planetovou převodovku.



Obr. 4.27

Dosazením do vztahu (4.17) obdržíme vzorec:

$$\frac{-\omega_u}{\omega_4 - \omega_u} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} \Rightarrow i_{4u}^1 = \frac{\omega_4}{\omega_u} = 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} \tag{4.19}$$

Hodnoty výrazů pro převodové poměry \$i_{1u}^4\$ a \$i_{4u}^1\$ mohou být v absolutní hodnotě větší nebo i menší než 1, to záleží na zvoleném počtu zubů. Může se také změnit smysl otáček hnaného kola, jak vyplývá z příkladu.

Poznámka: Vztahy 4.17 až 4.19 platí za předpokladu, že velikosti zubů (moduly) jsou na všech kolech stejné. Jinak bychom museli obecně počítat s poloměry kol.

Příklad 69.

Je dána planetová převodovka, velká redukce. Centrální ozubené kolo C (obr. 4.22) má \$z_c = 53\$ zubů a otáčí se otáčkami \$n_1 = 25 \text{ s}^{-1}\$. Otáčky unášeče jsou \$n_u = 8,95 \text{ s}^{-1}\$. Určete počet zubů satelitů \$z_s\$ a jeho otáčky \$n_2\$. Pro výpočet otáček \$n_2\$ využijte pravý obr. 4.22.

Řešení

Převodový poměr při zastaveném korunovém kole:

$$i_{cu}^k = \frac{2(z_c + z_s)}{z_c} = \frac{n_1}{n_u}$$

$$2z_c + 2z_s = z_c \cdot \frac{n_1}{n_u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_s = \frac{z_c \left(\frac{n_1}{n_u} - 2\right)}{2} = \frac{53 \left(\frac{25}{8,95} - 2\right)}{2} = 21 \text{ zubů.}$$

Pro rychlost v_c v bodě C platí:

$$r_u \cdot \omega_u = r_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{r_u}{r_2} \cdot \omega_u =$$

$$= \frac{(r_1 + r_2) \cdot \omega_u}{r_2} = \frac{\frac{z_c + z_s}{2} \cdot m}{\frac{z_s}{2} \cdot m} \cdot \omega_u,$$

$$2\pi \cdot n_2 = \frac{z_c + z_s}{z_s} \cdot 2\pi \cdot n_u.$$

Otáčky satelitů

$$n_2 = \frac{z_c + z_s}{z_s} \cdot n_u = \frac{53 + 21}{21} \cdot 8,95 \text{ s}^{-1} = 31,54 \text{ s}^{-1}.$$

Příklad 70.

Velká redukce planetové převodovky (viz obr. 4.22) má převodový poměr $i = 2,3$ (převod dopomala). Centrální ozubené kolo C koná otáčky $n_1 = 19 \text{ s}^{-1}$, poloměr její roztečné kružnice $r_1 = 76 \text{ mm}$. Určete otáčky unášče a otáčky satelitů. Vypočítejte upravený převodový poměr a skutečné otáčky unášče.

Řešení

$$i_{cu}^k = \frac{n_1}{n_u} \Rightarrow n_u = \frac{n_1}{i_{cu}^k} = \frac{19 \text{ s}^{-1}}{2,3} = 8,26 \text{ s}^{-1}.$$

Obvodové rychlosti v bodě A:

$$r_1 \cdot \omega_1 = 2r_2 \cdot \omega_2. \quad (\text{A})$$

Obvodové rychlosti i v bodě C:

$$r_u \cdot \omega_u = r_2 \cdot \omega_2. \quad (\text{B})$$

Rovnici B upravíme:

$$(r_1 + r_2) \omega_u = r_2 \cdot \omega_2. \quad (\text{B}')$$

Rovnici (B') násobíme -2 a sečteme s rovnicí (A). Získáme:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot \omega_1 - 2(r_1 + r_2)\omega_u &= 0 \Rightarrow r_2 = \\ &= \frac{r_1 \cdot \omega_1 - 2r_1 \cdot \omega_u}{2\omega_u} = \frac{r_1 \cdot n_1 - 2r_1 \cdot n_u}{2n_u} = \\ &= \frac{r_1(n_1 - 2 \cdot n_u)}{2n_u} = \\ &= \frac{76 \text{ mm} (19 - 2 \cdot 8,26) \text{ s}^{-1}}{2 \cdot 8,26 \text{ s}^{-1}} = 11,41 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Poloměr roztečné kružnice r_2 satelitů musíme upravit na 12 mm .

Úhlová rychlost satelitů:

$$\omega_2 = \frac{z_c}{2z_s} \cdot \omega_1.$$

Otáčky satelitů:

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{z_c}{2z_s} \cdot n_1 = \frac{r_1}{2r_2} \cdot n_1 = \\ &= \frac{76 \text{ mm}}{2 \cdot 12 \text{ mm}} \cdot 19 \text{ s}^{-1} = 60,17 \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Upravený převodový poměr:

$$i_{cu}^k = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1} = \frac{2(76 + 12) \text{ mm}}{76 \text{ mm}} = 2,316.$$

Skutečné otáčky unášče:

$$n_u = \frac{n_1}{i_{cu}^k} = \frac{19 \text{ s}^{-1}}{2,316} = 8,20 \text{ s}^{-1}.$$

Příklad 71.

Vypočítejte otáčky unášče planetové převodovky podle obr. 4.26. Hnací kolo 1 má otáčky $n_1 = 18 \text{ s}^{-1}$.

Počty zubů ozubených kol:

$$z_1 = 80, z_2 = 24, z_3 = 60, z_4 = 44.$$

Řešení

Úhlová rychlost kola 1:

$$\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot n_1 = 2 \cdot \pi \cdot 18 \text{ s}^{-1} = 113,1 \text{ s}^{-1}.$$

Po zastavení unášče dostaneme předlohou převodovku, pro kterou můžeme určit převod:

$$\frac{\omega_1 - \omega_u}{\omega_4 - \omega_u} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right).$$

Protože $\omega_4 = 0$, můžeme psát:

$$\frac{\omega_1 - \omega_u}{-\omega_u} = \frac{\omega_1}{-\omega_u} + 1 = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}.$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned} \omega_u &= \omega_1 \cdot \frac{z_1 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_3 - z_2 \cdot z_4} = \\ &= 113,1 \text{ s}^{-1} \cdot \frac{80 \cdot 60}{80 \cdot 60 - 24 \cdot 44} = 145 \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Otáčky unášeče:

$$n_u = \frac{\omega_u}{2\pi} = \frac{145 \text{ s}^{-1}}{2\pi} = 23,08 \text{ s}^{-1}.$$

Pro typ soukolí $E - H$ (jedno centrální kolo s vnějším ozubením, druhé centrální kolo s vnitřním ozubením, konající **hypocykloidální pohyb**, obr. 4.28) platí vzorec:

$$\frac{\omega_1 - \omega_u}{\omega_4 - \omega_u} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}, \quad (4.20)$$

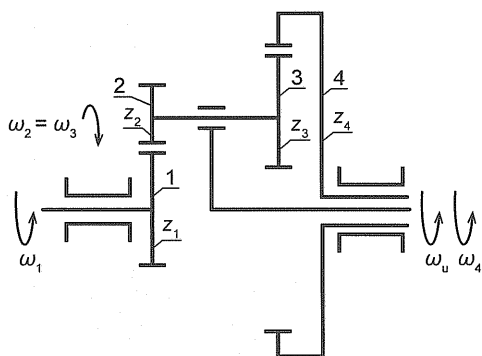
Zastavením kola 4 získáme z rovnice (4.20) planetovou převodovku s převodovým poměrem:

$$i_{1u}^4 = \frac{\omega_1}{\omega_u} = 1 + \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}. \quad (4.21)$$

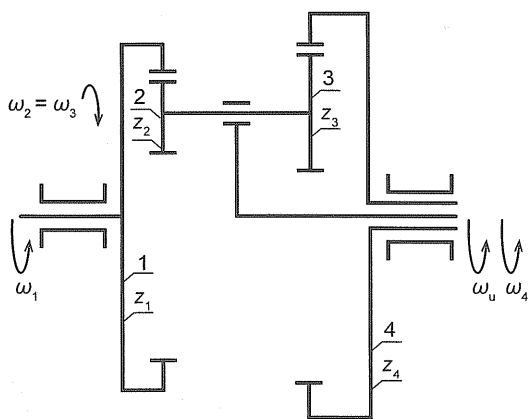
Zastavením kola 1 získáme převrácením zlomků (4.20) převodový poměr této převodovky:

$$i_{4u}^1 = \frac{\omega_4}{\omega_u} = 1 + \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4}. \quad (4.22)$$

V obou případech je převodový poměr větší než 1, tedy převod dopomala. V případě, že hnacím členem by byl unášeč, šlo by o převod dorychla.



Obr. 4.28



Obr. 4.29

Pro typ soukolí $H - H$ (obě centrální kola mají vnitřní ozubení – obr. 4.29) bude kinematická vazba stejná jako u převodovky typu $E - E$. Opět můžeme zastavit kolo 1, popř. 4 a získáme tak planetové převodovky s převody podle vztahu 4.18, popř. 4.19.

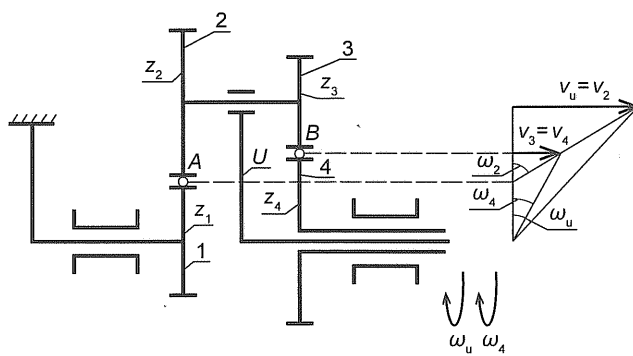
Příklad 72.

Porovnejte převodové poměry a smysly otáčení u planetové převodovky se zastaveným kolem 1 (obr. 4.30a, b).

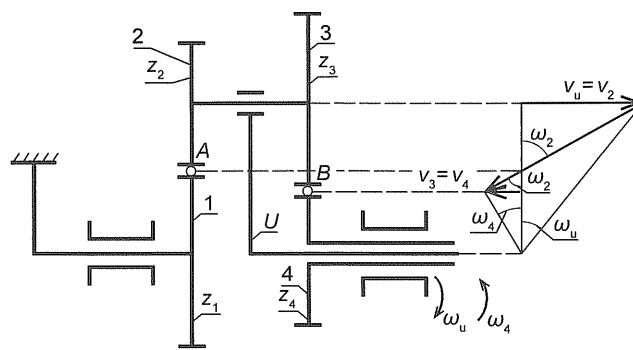
Počty zubů:

a) $z_1 = 21, z_2 = 29, z_3 = 15, z_4 = 35.$

b) $z_1 = 29, z_2 = 21, z_3 = 35, z_4 = 15.$



a)



b)

Obr. 4.30

Poznámka: Na obr. 4.30a jsou zakresleny i rychlosti kol. Je patrné, že výstupní otáčky unášeče v obou případech mají obrácený smysl. Na obr. 4.30b má kolo 3 větší počet zubů než kolo 2. Valení probíhá kolem bodu A . Bod B je pod bodem A , a proto má opačný smysl rychlosti. Rychlosti $v_3 = v_4$ mají opačný smysl než rychlosti $v_u = v_2$. Vysvětlení je podle obr. 3.4.

Řešení

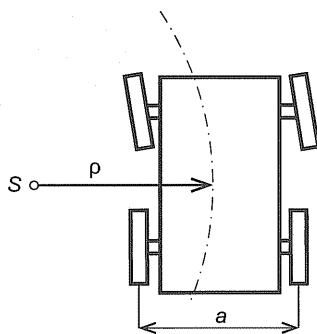
$$a) i_{4u}^1 = 1 - \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4} = 1 - \frac{21 \cdot 15}{29 \cdot 35} = 0,69 \quad \dots \text{převod dorychla,}$$

$$b) i_{4u}^1 = 1 - \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4} = 1 - \frac{29 \cdot 35}{21 \cdot 15} = -2,22 \quad \dots \text{převod dopomala.}$$

Smysl otáčení unášeče bude v obou případech rozdílný, viz znaménko mínus v druhém případě.

Příklad 73.

Vozidlo projíždí zatáčkou o poloměru ρ . Jeho levé kolo koná otáčky $n_1 = 9,5 \text{ s}^{-1}$, pravé kolo koná otáčky $n_2 = 10 \text{ s}^{-1}$. Rozchod kol $a = 1\,350 \text{ mm}$. Poloměr kola $r = 300 \text{ mm}$. Určete střední poloměr zatáčky ρ a rychlost vozidla v na tomto středním poloměru (obr. 4.31).



Obr. 4.31

Řešení

Střed levého kola se pohybuje rychlostí v_1 :

$$v_1 = 2\pi \cdot r \cdot n_1,$$

kde r je poloměr kola.

Tato rychlost má také velikost:

$$v_1 = \omega \left(\rho - \frac{a}{2} \right),$$

kde ω je úhlová rychlost vozidla kolem středu zatáčky S .

Platí:

$$2\pi \cdot r \cdot n_1 = \omega \left(\rho - \frac{a}{2} \right), \quad (\text{A})$$

Obdobné vztahy platí i pro pravé kolo:

$$v_2 = 2\pi \cdot r \cdot n_2,$$

$$v_2 = \omega \left(\rho + \frac{a}{2} \right),$$

$$2\pi \cdot r \cdot n_2 = \omega \left(\rho + \frac{a}{2} \right). \quad (\text{B})$$

Porovnáním rovnic (A) a (B) získáme rovnici:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\rho - \frac{a}{2}}{\rho + \frac{a}{2}} \Rightarrow \rho = \frac{n_1 + n_2}{n_2 - n_1} \cdot \frac{a}{2} =$$

$$= \frac{(9,5 + 10) \text{ s}^{-1}}{(10 - 9,5) \text{ s}^{-1}} \cdot \frac{1,35 \text{ m}}{2} = 26,3 \text{ m.}$$

Rychlost vozidla na středním poloměru ζ :

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{2\pi \cdot r (n_1 + n_2)}{2} =$$

$$= \frac{2\pi \cdot 0,3 \text{ m} (9,5 + 10) \text{ s}^{-1}}{2} =$$

$$= 18,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 66,2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

4.3.4 Kuželový planetový diferenciál

Používá se nejčastěji u automobilů, obráběcích strojů a zdvihadel. Je to soukolí, které umožňuje u automobilu diferencii otáček hnacích kol při průjezdu zatáčkou.

Diferenciál zabráňuje smýkání hnacích, nesterjně se otáčejících kol. Vnější hnací kolo se v zatáčce musí otáčet rychleji než vnitřní hnací kolo. Diferenciál vyrovnává otáčky na obou hnacích poloosách.

Na poloosách O_5 a O_6 jsou naklínována centrální kuželová kola z_5 a z_6 , do nichž zabírají kuželové satelity z_4 . Jejich hřídel je otočně uložen ve skříní unášeče, která je pevně spojena s talířovým kolem 3. S tímto kolem zabírá kuželové kolo 2 (hruška) naklínované na hnacím hřídeli.

Při jízdě po přímé dráze se satelity otáčejí pouze kolem poloos O_5 a O_6 , mají funkci spojky (za předpokladu stejného opotřebení pneumatik a stejného nahuštění). V zatáčce, když se tyto poloosy otáčejí nesterjnými otáčkami, se satelity otáčejí také kolem vlastní osy O_4 (viz obr. 4.32).

Řešení diferenciálu provedeme dvěma metodami:

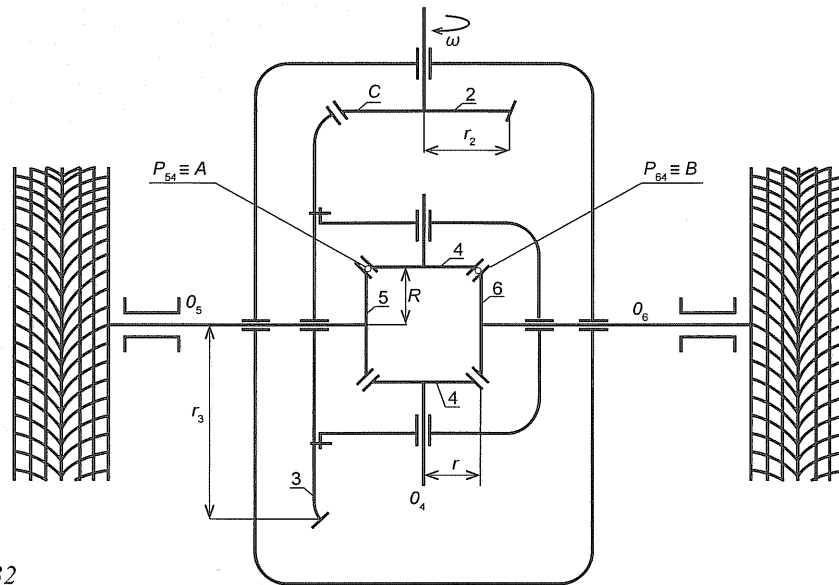
a) Unášec zastavíme tak, že celému mechanismu udělíme pohyb se zápornými otáčkami n_u .

Pro převod platí:

$$\frac{n_5 - n_u}{n_6 - n_u} = -1 \Rightarrow n_5 + n_6 = 2n_u. \quad (4.23)$$

Při zastavení unášeče mají kola 5 a 6 opačný smysl otáčení. Převodový poměr je proto -1 .

Když se v terénu jedno kolo zastaví (např. uvázne), druhé kolo se bude otáčet dvojnásobným počtem otáček. To ovšem z hlediska pohybu automobilu není možné (automobil se z terénu nemůže sám dostat), a proto se konstruuje tzv. uzávěrka diferenciálu. Ta spojí obě planetová kola napevno, z diferenciálu se stává převodovka a obě poloosy se otáčejí stejnými otáčkami.



Obr. 4.32

b) Řešení pomocí pólů pohybu.

V bodě $A \equiv P_{54}$ platí: $v_{51} = v_{41}$. Rozklad: $41 = 43 + 31$.

Potom: $\omega_{51} \cdot R = -\omega_{43} \cdot r + \omega_{31} \cdot R$. (A)

V bodě $B \equiv P_{64}$ platí: $v_{61} = v_{41}$. Rozklad: $41 = 43 + 31$.

Potom: $\omega_{61} \cdot R = +\omega_{43} \cdot r + \omega_{31} \cdot R$. (B)

Sečtením rovnic (A) a (B) dostaneme:

$$\omega_{51} + \omega_{61} = 2\omega_{31}, \quad (4.24)$$

což je ekvivalentní výrazu (4.23).

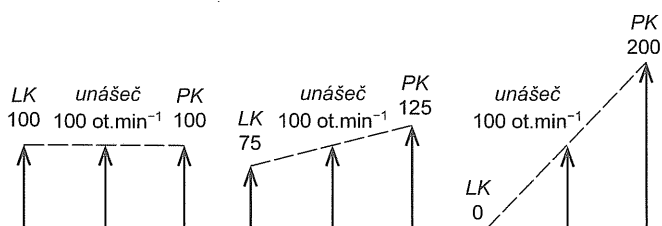
Pro bod C platí:

$$\omega_{31} \cdot r_3 = \omega_{21} \cdot r_2 \Rightarrow \omega_{31} = \omega_{21} \cdot \frac{r_2}{r_3}.$$

Při jízdě po vozovce jsou úhlové rychlosti na sobě závislé.

Při přímé jízdě je $\omega_{51} = \omega_{61}$. Při jízdě v zatáčce záleží na velikosti jejího poloměru. Při ω_{51} , resp. $\omega_{61} = 0$ se druhé kolo otáčí dvojnásobnou úhlovou rychlostí než při stejné rychlosti po přímé dráze.

Činnost diferenciálu při různých provozních stavech je znázorněna na obr. 4.33.



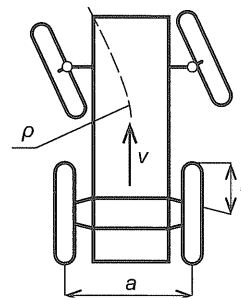
Obr. 4.33

Příklad 74.

Automobil s hnacími zadními koly projíždí kruhovou zatáčkou o poloměru $\rho = 15$ m rychlostí $v = 5$ m.s⁻¹ (obr. 4.34).

Průměr kol automobilu $d = 620$ mm, rozchod kol $a = 1,6$ m. Poloměr planetových kol $R = 80$ mm, poloměr kol satelitů $r = 50$ mm.

Určete úhlové rychlosti kol ω_{51} , ω_{61} a relativní otáčky satelitů n_{43} vůči unášeči.



Obr. 4.34

Řešení

Obvodová rychlost levého kola:

$$v_L = v \cdot \frac{2\rho - a}{2\rho} = 5 \text{ m.s}^{-1} \cdot \frac{2 \cdot 15 \text{ m} - 1,6 \text{ m}}{2 \cdot 15 \text{ m}} = 4,733 \text{ m.s}^{-1}.$$

Úhlová rychlost levého kola:

$$\omega_5 = \frac{v_L}{d/2} = \frac{4,733 \text{ m.s}^{-1}}{0,62 \text{ m}/2} = 15,268 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Obvodová rychlost pravého kola:

$$v_P = v \cdot \frac{2\rho + a}{2\rho} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \frac{2 \cdot 15 \text{ m} + 1,6 \text{ m}}{2 \cdot 15 \text{ m}} = 5,267 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Úhlová rychlost pravého kola:

$$\omega_6 = \frac{v_P}{d/2} = \frac{5,267 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{0,62 \text{ m}/2} = 16,990 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Z podmínek valení v bodech A a B získáme rovnice:

$$\omega_{51} \cdot R = -\omega_{43} \cdot r + \omega_{31} \cdot R. \quad (\text{A})$$

$$\omega_{61} \cdot R = +\omega_{43} \cdot r + \omega_{31} \cdot R. \quad (\text{B})$$

Rovnici (A) vynásobíme hodnotou -1 a potom obě rovnice sečteme:

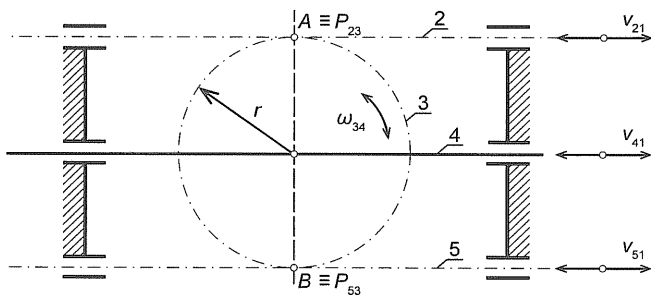
$$\begin{aligned} (\omega_{61} - \omega_{51}) \cdot R &= 2\omega_{43} \cdot r \Rightarrow \omega_{43} = \frac{(\omega_6 - \omega_5) \cdot R}{2r} = \\ &= \frac{(16,990 - 15,268) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0,08 \text{ m}}{2 \cdot 0,05 \text{ m}} = 1,38 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Otáčky satelitů vůči unášeci:

$$n_{43} = \frac{\omega_{43}}{2\pi} = \frac{1,38 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2\pi \text{ rad}} = 0,22 \text{ s}^{-1}.$$

4.4 DIFERENCIÁLNÍ ÚSTROJÍ S OZUBENÝMI HŘEBENY

Dva ozubené hřebeny 2 a 5 se posouvají v rovnoběžných vedeních a mezi nimi je vloženo ozubené kolo 3 s hladkou tyčí 4. Ústrojí má dva stupně volnosti. Můžeme měnit vždy dvě nezávislé veličiny, např. v_{21} a v_{51} nebo v_{41} a ω_{34} (obr. 4.35).



Obr. 4.35

Každý si sám může odvodit počet stupňů volnosti mechanismu. Pokud jeden člen soustavy zastavíme, vznikne nám převodové ústrojí s jedním stupněm volnosti.

Při řešení diferenciálu jsou obvykle dány rychlosti hřebenů 2 a 5, tj. v_{21} a v_{51} a určujeme rychlosti v_{41} a ω_{34} . Hřebeny 2 a 5 mohou mít smysly rychlosti stejné nebo opačné. Výjimky valení:

Bod A : $v_{21} = v_{31}$; rozklad $31 = 34 + 41$.

$$v_{21} = r \cdot \omega_{34} + v_{41}. \quad (\text{A})$$

Bod B : $v_{51} = v_{31}$; rozklad $31 = 34 + 41$.

$$v_{51} = -r \cdot \omega_{34} + v_{41}. \quad (\text{B})$$

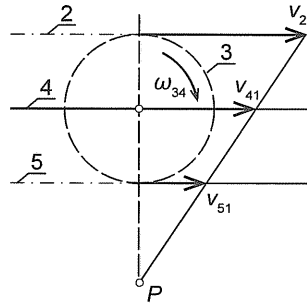
Rovnice (A) a (B) sečteme a upravíme:

$$v_{41} = \frac{v_{51} + v_{21}}{2}. \quad (4.25)$$

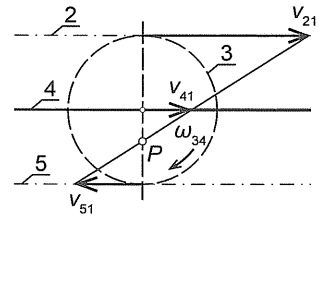
Rovnice (A) a (B) odečteme a upravíme:

$$\omega_{34} = \frac{v_{21} - v_{51}}{2r}. \quad (4.26)$$

Na obr. 4.36 je zakreslen diferenciál se stejnými smysly rychlosti hřebenů 2 a 5, na obr. 4.37 s opačnými smysly.



Obr. 4.36



Obr. 4.37

Příklad 75.

Jaká je posuvná rychlost ozubeného kola a jeho otáčky s poloměrem roztečné kružnice $r = 150 \text{ mm}$, pohybují-li se hnací hřebeny 2 a 5 rychlostí $v_{21} = 0,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $v_{51} = 0,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$:

a) ve stejném smyslu (viz obr. 4.36),

b) v opačném smyslu (viz obr. 4.37).

Řešení

$$\text{a) } v_{41} = \frac{v_{21} + v_{51}}{2} = \frac{(0,9 + 0,3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2} = 0,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\omega_{34} = \frac{v_{21} - v_{51}}{2r} = \frac{(0,9 - 0,3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2 \cdot 0,15 \text{ m}} = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$n_{34} = \frac{\omega_{34}}{2\pi} = \frac{2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2\pi \text{ rad}} = 0,318 \text{ s}^{-1}.$$

$$b) v_{41} = \frac{v_{21} + v_{51}}{2} = \frac{[0,9 + (-0,3)] \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2} = 0,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\omega_{34} = \frac{v_{21} - v_{51}}{2r} = \frac{[0,9 - (-0,3)] \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2 \cdot 0,15 \text{ m}} = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$n_{34} = \frac{\omega_{34}}{2\pi} = \frac{4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2\pi} = 0,637 \text{ s}^{-1}.$$

• Záběr ozubených hřebenů s ozubeným kolem s rozdílnými roztečnými průměry

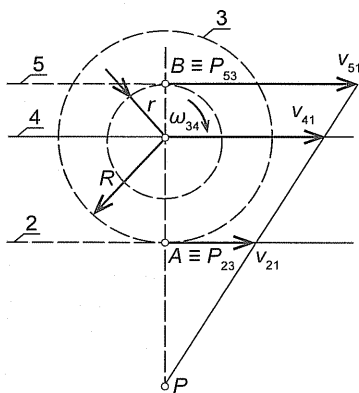
Příklad 76.

Určete otáčky ozubeného kola n_{34} a rychlost v_{41} . Úlohu řešte pro pohyb hřebenů ve stejném, ale i opačném smyslu.

Zadané hodnoty:

$$v_{51} = 1,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, v_{21} = 0,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, R = 300 \text{ mm}, r = 180 \text{ mm}.$$

a) Výminky valení (obr. 4.38):



Obr. 4.38

Bod A: $v_{21} = v_{31}$; rozklad $31 = 34 + 41$.

$$v_{21} = -R \cdot \omega_{34} + v_{41}. \quad (A)$$

Bod B: $v_{51} = v_{31}$; rozklad $31 = 34 + 41$.

$$v_{51} = +r \cdot \omega_{34} + v_{41}. \quad (B)$$

Od rovnice (B) odečteme rovnici (A):

$$\begin{aligned} v_{51} - v_{21} &= (R + r) \omega_{34} \Rightarrow \omega_{34} = \frac{v_{51} - v_{21}}{R + r} = \\ &= \frac{(1,8 - 0,6) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{(0,3 + 0,18) \text{ m}} = +2,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \end{aligned}$$

$$n_{34} = \frac{\omega_{34}}{2\pi} = \frac{+2,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2\pi \text{ rad}} = +0,4 \text{ s}^{-1}.$$

Za ω_{34} dosadíme do rovnice (A):

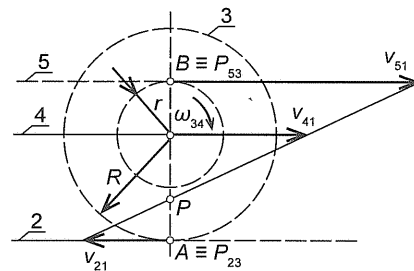
$$v_{21} = -R \cdot \frac{v_{51} - v_{21}}{R + r} + v_{41},$$

po úpravě:

$$v_{41} = \frac{R \cdot v_{51} + r \cdot v_{21}}{R + r} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 1,8 + 0,18 \cdot 0,6}{(0,3 + 0,18)} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) Výminky valení (obr. 4.39):



Obr. 4.39

Bod A: $v_{21} = v_{31}$; rozklad $31 = 34 + 41$.

$$v_{21} = +R \cdot \omega_{34} - v_{41}. \quad (C)$$

Bod B: $v_{51} = v_{31}$; rozklad $31 = 34 + 41$.

$$v_{51} = +r \cdot \omega_{34} + v_{41}. \quad (D)$$

Rovnice (C) a (D) sečteme:

$$\begin{aligned} v_{21} + v_{51} &= (R + r) \omega_{34} \Rightarrow \omega_{34} = \\ &= \frac{(v_{21} + v_{51})}{R + r} = \frac{(0,6 + 1,8) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{(0,3 + 0,18) \text{ m}} = 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \end{aligned}$$

$$n_{34} = \frac{\omega_{34}}{2\pi} = \frac{5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2\pi \text{ rad}} = 0,8 \text{ s}^{-1}.$$

Za ω_{34} dosadíme do rovnice (D):

$$v_{51} = r \cdot \frac{(v_{21} + v_{51})}{R + r} + v_{41}, \text{ po úpravě}$$

$$v_{41} = \frac{v_{51} \cdot R - v_{21} \cdot r}{R + r} =$$

$$= \frac{1,8 \cdot 0,3 - 0,6 \cdot 0,18}{0,3 + 0,18} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

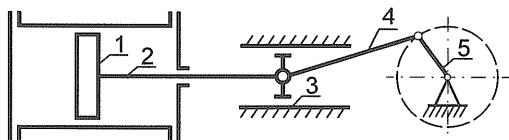
Kontrolní otázky

1. Nakreslete planetový převod a vyjmenujte jeho hlavní části.
2. Jaký je rozdíl mezi planetovým diferenciálem a planetovou převodovkou?
3. Odvoďte základní rovnici planetového diferenciálu.
4. Jaký pohyb může konat centrální kolo, korunové kolo a unášeč u planetové převodovky?
5. Jaký pohyb koná satelit u planetové převodovky?
6. Naznačte kinematické řešení planetového převodu pomocí metody zastavení unášeče.
7. Vysvětlete kinematické řešení planetového převodu pomocí úhlových rychlostí.
8. K čemu slouží kuželový diferenciál?
9. Odvoďte závislost mezi otáčkami satelitů a unášeče u kuželového diferenciálu.
10. Nakreslete schéma kuželového diferenciálu a popište jeho jednotlivé části.
11. Jaký je pohyb satelitů u kuželového diferenciálu při přímé jízdě a v zatáčkách?
12. Kolik stupňů volnosti má diferenciál s ozubenými tyčemi?
13. Jak určíme rychlost pohybu hladké tyče a otáčky ozubeného kola u diferenciálu s ozubenými tyčemi?

4.5 KLIKOVÝ MECHANISMUS

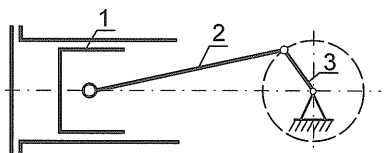
Mechanismus patří do skupiny kloubových mechanismů. Jde o šestičlenný, případně čtyřčlenný mechanismus. Slouží k přeměně posuvného pohybu na pohyb rotační (u spalovacích motorů), nebo naopak k přeměně rotačního pohybu na pohyb posuvný (u pístových čerpadel a kompresorů).

Dříve se u pomaluběžných strojů používal klikový mechanismus úplný s křížákem (obr. 4.40), kde 1 je píst, 2 – pístní tyč, 3 – křížák, 4 – ojnice, 5 – klika.



Obr. 4.40

U rychloběžných strojů se používá nyní mechanismus zkrácený (obr. 4.41), kde 1 je píst, 2 – ojnice, 3 – klika.

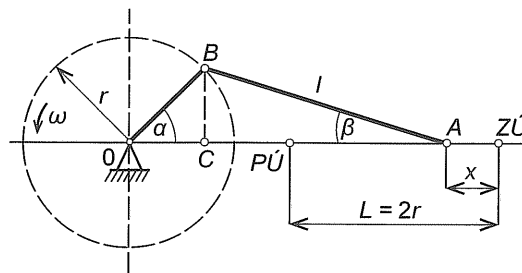


Obr. 4.41

Ojnice je zde přímo spojena s pístem. Píst, pístní tyč a křížák konají přímočarý vratný pohyb, klika (klikový hřídel) koná pohyb rotační a ojnice obecný pohyb rovinný.

A) Početní řešení

• Dráha pístu



Obr. 4.42

Kde ZÚ je zadní úvrať, krajní poloha pístu, nejbližší od klikového hřídele,

PÚ – přední úvrať, krajní poloha pístu, nejbližší od klikového hřídele,

- r – rameno kliky (m),
- l – délka ojnice (m),
- α – úhel kliky (rad),
- β – úhel ojnice (rad),
- x – dráha pístu ze zadní úvratě (m),
- c – rychlost pístu ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$),
- a – zrychlení pístu ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$),
- v – obvodová rychlost klikového čepu ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$),
- ω – úhlová rychlost kliky ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$),
- L – zdvih pístu (m).

Předpoklad: úhlová rychlost kliky ω je konstantní.

Klikový poměr $\lambda = \frac{r}{l}$.

Z obr. 4.42 plyne pro souřadnici x pístu vztah:

$$r + l = x + r \cdot \cos \alpha + l \cdot \cos \beta.$$

Pro polohu pístu x odtud získáme:

$$x = r + l - (r \cdot \cos \alpha + l \cdot \cos \beta).$$

Po úpravě:

$$x = r \left[1 - \cos \alpha + \frac{1}{\lambda} (1 - \cos \beta) \right]. \quad (4.27a)$$

Užitím sinové věty získáme z trojúhelníka ABO rovnici:

$$\sin \beta = \frac{r}{l} \cdot \sin \alpha = \lambda \cdot \sin \alpha.$$

Po dosazení za $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \alpha}$ do rovnice pro dráhu pístu x získáme:

$$x = r \left[1 - \cos \alpha + \frac{1}{\lambda} \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \alpha} \right) \right]. \quad (4.27b)$$

Vztah pro dráhu pístu x upravíme podle binomické věty:

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}(-x)^1 + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{2}\right)(-x)^2 + \frac{1}{3!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right)(-x)^3 + \dots = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 \dots \text{atd.}$$

Po dosazení našich hodnot do této řady získáme pro dráhu pístu výraz:

$$x = r \left[1 - \cos \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \alpha + \frac{\lambda^3}{8} \sin^4 \alpha + \dots \right].$$

Využijeme pouze první dva členy binomické řady. Pro danou hodnotu λ řada velmi rychle konverguje, například pro $\lambda = \frac{1}{3,5}$ je $\frac{\lambda^3}{8} = 0,003$, potom:

$$x = r \left[1 - \cos \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \alpha \right]. \quad (4.27c)$$

Největší chyba je podle tohoto vzorce při úhlu kliky $\alpha = 90^\circ$. Pro $\lambda = \frac{1}{3,5}$ činí 2,6 %.

• Rychlost posuvného pohybu pístu

Stanoví se derivací dráhy podle času:

$$c = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dx}{d\alpha} \cdot \omega.$$

Význam derivace a základní pravidla derivování jsou uvedeny níže. Pro derivování goniometrických funkcí platí pravidla:

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x,$$

$$y = \cos x, \quad y' = -\sin x,$$

$$y = \sin^2 x, \quad y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x,$$

$$y = \sin ax, \quad y' = a \cdot \cos ax,$$

$$c = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = r \left(\sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2\alpha \right) \cdot \omega = v \left(\sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2\alpha \right). \quad (4.28)$$

Největší chyba rychlosti je při úhlech $\alpha \approx 60^\circ$ a $\alpha \approx 120^\circ$ a pro $\lambda = \frac{1}{3,5}$ činí 4 %.

Maximální rychlost pístu je přibližně tehdy, když klika s ojnicí svírá pravý úhel – její velikost je:

$$c_{\max} \approx v \cdot \sqrt{1 + \lambda^2} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}). \quad (4.29)$$

Přesnou velikost rychlosti pístu bychom získali derivací přesného vztahu pro dráhu (4.27b) – to je však nad rámec tohoto textu.

Přesnou velikost rychlosti pístu můžeme také získat z podmínky tuhosti úsečky, podle níž složky rychlosti bodu A (rychlost c) i bodu B (rychlost v) do společné spojnice \overline{AB} musí být stejně velké. Z průmětů rychlostí c a v do směru spojnice AB podle obr. 4.43 plyne přesný vztah pro rychlost pístu pro pohyb vpřed i zpět:

$$c = \frac{v \cdot \sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \beta}. \quad (4.30)$$

Tento výraz má tu nevýhodu, že pro zvolený úhel α musíme podle sinové věty dopočítávat úhel β .

Rychloběžnost pístových strojů s klikovým mechanismem je dána střední pístovou rychlostí:

$$c_s = 2L \cdot n = 4r \cdot n \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{m}, \text{s}^{-1}), \quad (4.31)$$

kde L je velikost zdvihu pístu (m).

• Zrychlení posuvného pohybu pístu

Určí se derivací rychlosti podle času:

$$a = \frac{dc}{dt} = \frac{dc}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \cdot \frac{dc}{d\alpha}. \quad (4.32a)$$

Derivujeme vztah (4.28) a získáme:

$$a = r \cdot \omega^2 (\cos \alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha). \quad (4.32b)$$

Největší odchylka pro zrychlení je při $\alpha \approx 90^\circ$, pro $\lambda = 1 : 3,5$ je asi 4,3 %.

V úvratích vyjdou přesná zrychlení:

$$\text{pro } \alpha = 0: \quad a_{\text{zú}} = r \cdot \omega^2 (1 + \lambda),$$

$$\text{pro } \alpha = \pi: \quad a_{\text{pú}} = -r \cdot \omega^2 (1 - \lambda).$$

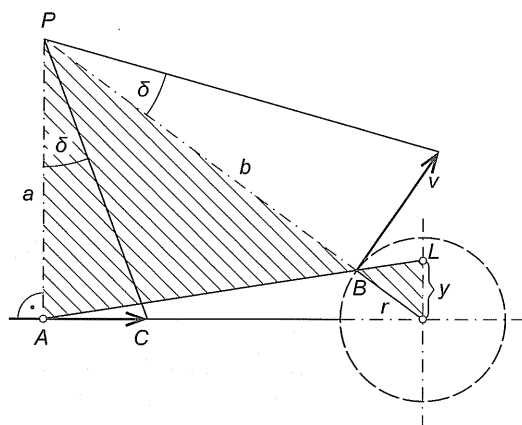
B) Grafické řešení rychlosti a zrychlení pístu

Grafické řešení rychlostí můžeme provést podle již známých metod:

- pomocí stejného zorného úhlu koncových bodů rychlostí z pólu,
- pomocí tuhosti úsečky.

V řešeném příkladu přidáme ještě metodu základního rozkladu pohybu, pomocí kterého zjišťujeme i zrychlení pístu.

Ad a) Rychlost pístu pomocí stejného zorného úhlu koncových bodů rychlostí z pólu (obr. 4.43).



Obr. 4.43

Pomocí normál trajektorií pohybu pístu a klikového čepu zjistíme pól pohybu P . Zakreslíme známou rychlost klikového čepu v . Označíme úhel δ . Pod stejným úhlem vedeme z pólu paprsek k rychlosti pístu c , u které známe směr.

Uvedeme ještě jednodušší způsob zjišťování rychlosti pístu.

Platí vztahy:

$$\tan \delta = \frac{c}{a} = \frac{v}{b}.$$

Vyšrafované trojúhelníky jsou si podobné.

Platí:

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{r},$$

spojením obou výrazů získáme rychlost pístu c :

$$c = \frac{v}{r} \cdot y = \omega \cdot y. \quad (4.33)$$

Rychlost pístu c je přímo úměrná úsečce y , kterou na svislé ose vymezuje prodloužený směr ojnice. Při konstantní úhlové rychlosti kliky úsečka y v určitém měřítku znázorňuje okamžitou rychlost pístu.

Příklad 77.

Početně a graficky pomocí základního rozkladu určete pro danou polohu kliky rychlost a zrychlení pístu.

Dáno: poloměr kliky $r = 25$ mm, délka ojnice $l = 75$ mm, úhel $\alpha = 60^\circ$. Otáčky klikového hřídele $n = 1\,500$ min $^{-1}$ jsou konstantní.

A) Početní řešení

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{\pi \text{ rad} \cdot 1\,500 \text{ s}^{-1}}{30} = 157,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\lambda = \frac{r}{l} = \frac{25 \text{ mm}}{75 \text{ mm}} = \frac{1}{3}.$$

Rychlost pístu určíme podle přibližného vztahu (4.28):

$$\begin{aligned} c &= v \left(\sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2\alpha \right) = r \cdot \omega \left(\sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2\alpha \right) = \\ &= 0,025 \text{ m} \cdot 157,1 \text{ s}^{-1} \left(\sin 60^\circ + \frac{\frac{1}{3}}{2} \cdot \sin 120^\circ \right) = \\ &= 3,97 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Zrychlení vypočítáme podle přibližného vztahu (4.32b):

$$\begin{aligned} a &= r \cdot \omega^2 (\cos \alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha) = \\ &= 0,025 \text{ m} (157,1 \text{ s}^{-1})^2 \left(\cos 60^\circ + \frac{1}{3} \cos 120^\circ \right) = \\ &= 206 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \end{aligned}$$

B) Grafické řešení

Provádíme pomocí základního rozkladu, při kterém je unášivý pohyb posuvný a relativní pohyb rotační. Představujeme si, že celá ojnice (body BC) se nejprve posune a potom pootočí kolem referenčního bodu B .

Měřítko rychlostí: 1 mm \equiv 1 m \cdot s $^{-1}$.

Měřítko zrychlení: 1 mm \equiv 10 m \cdot s $^{-2}$.

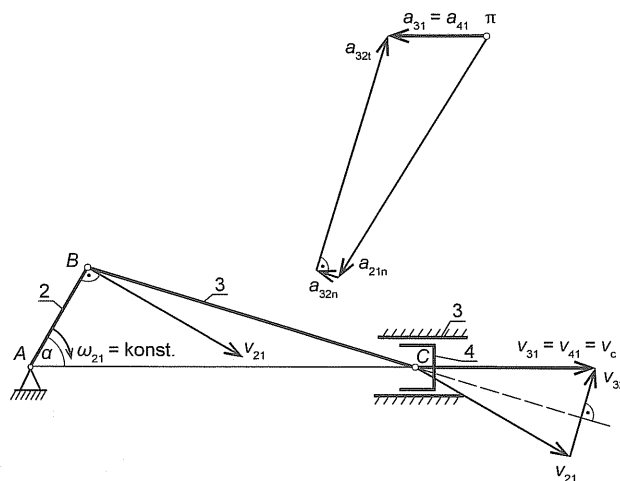
Pro bod C platí rozklad:

$$\vec{v}_{41} = \vec{v}_{31} = \vec{v}_{32} + \vec{v}_{21}.$$

U rychlosti v_{21} známe velikost i směr – je kolmý na rameno kliky AB :

$$v_{21} = \overline{AB} \cdot \omega_{21} = 0,025 \text{ m} \cdot 157,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 3,93 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Rychlost v_{32} je kolmá na rameno BC (otáčení kolem bodu B). Nositelka rychlosti v_{31} leží na spojnici AC . Obrázec rychlostí je zobrazen na obr. 4.44.



Obr. 4.44

Z obrazce jsou odečteny velikosti rychlosti $v_{32} = 1,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a rychlost pístu $v_{31} = v_c = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
Pro zrychlení pístu \vec{a}_{41} platí vektorová rovnice:

$$\vec{a}_{41} = \vec{a}_{31} = \vec{a}_{32} + \vec{a}_{21}.$$

Zrychlení a_{21} má pouze normálovou složku, protože úhlová rychlost $\omega_{21} = \text{konst.}$:

$$a_{21n} = \frac{v_{21}^2}{AB} = \frac{(3,93 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{0,025 \text{ m}} = 618 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Zrychlení a_{32} má normálovou i tečnou složku. Normálovou složku vypočítáme, tečnou složku určíme z obrazce zrychlení. Obě složky zrychlení jsou na sebe kolmé.

$$a_{32n} = \frac{v_{32}^2}{BC} = \frac{(1,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{0,075 \text{ m}} = 48 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Z obrazce zrychlení při známém směru vektoru zrychlení \vec{a}_{41} můžeme odměřit $a_{32t} = 535 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Úhlové zrychlení:

$$\epsilon_{32t} = \frac{a_{32t}}{BC} = \frac{535 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}{0,075 \text{ m}} = 7133 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Z obrazce zrychlení odměřeno $a_{31} = 206 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Zrychlení pístu v dané poloze je $206 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Výsledky početního i grafického řešení se shodují.

Příklad 78.

Vypočítejte dráhy, rychlosti a zrychlení pístu pro jednotlivé polohy klikového mechanismu.

Dané hodnoty: $r = 30 \text{ mm}$, $l = 150 \text{ mm}$, $\lambda = \frac{r}{l} = 0,2$, otáčky kliky jsou konstantní $n = 10 \text{ s}^{-1}$.

Rychlosti a zrychlení pístu v závislosti na úhlu kliky α jsou na obr. 4.45 a v tab. 4.2.

Řešení

Úhlová rychlost:

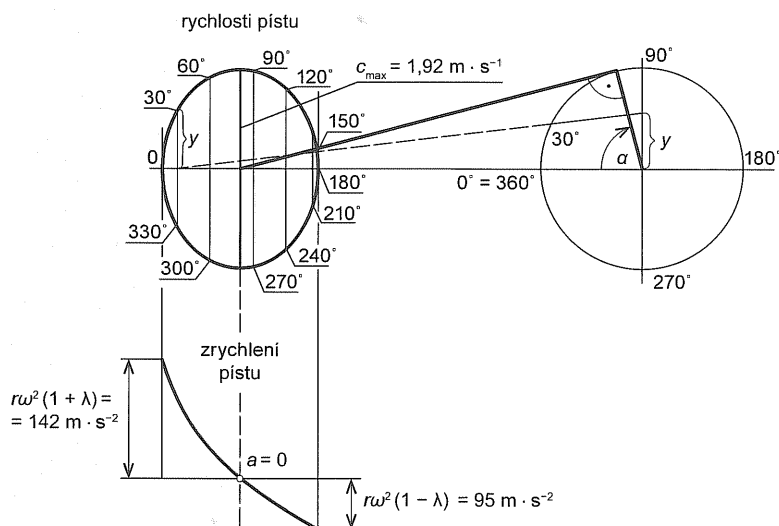
$$\omega = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot 10 \text{ s}^{-1} = 62,83 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Pro dráhu, rychlosti a zrychlení pístu platí vztahy:

$$x = r \left[1 - \cos \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \alpha \right],$$

$$c = r \cdot \omega \left(\sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2\alpha \right),$$

$$a = r \cdot \omega^2 (\cos \alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha).$$



Obr. 4.45

Tabulka 4.2. Kinematické poměry na klikovém mechanismu

Úhel kliky α (°)	Dráha pístu ze ZÚ x (mm)	Rychlost pístu c (m·s ⁻¹)	Zrychlení pístu a (m·s ⁻²)
0 = 360	0	0	142,1
30 = 330	4,7	1,106	114,4
60 = 300	17,3	1,796	47,4
90 = 270	33	1,885	-23,7
120 = 240	47,3	1,469	-71,1
150 = 210	56,7	0,779	-90,7
180	60	0	-94,7

Maximální rychlost pístu je přibližně tehdy, jestliže klika a ojnice spolu svírají přibližně pravý úhel.

Určíme ji podle přibližného vztahu:

$$c_{\max} = r \cdot \omega \sqrt{1 + \lambda^2} =$$

$$= 0,03 \text{ m} \cdot 62,83 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \sqrt{1 + 0,2^2} = 1,922 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Dráha x pístu při maximální rychlosti.

Z pravoúhlého trojúhelníka určíme úhly β a α :

$$\tan \beta = \frac{r}{l} = \lambda = 0,2 \Rightarrow \beta = 11,31^\circ,$$

$$\alpha = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 11,31^\circ = 78,69^\circ.$$

$$x_{\text{cmax}} = r \left[1 - \cos \alpha + \frac{1}{\lambda} (1 - \cos \beta) \right] =$$

$$= 0,03 \text{ m} \left[1 - \cos 78,69^\circ + \frac{1}{0,2} (1 - \cos 11,31^\circ) \right] =$$

$$= 0,027 \text{ m}.$$

Kontrolní otázky

1. Jaký je rozdíl mezi úplným a zkráceným klikovým mechanismem?
2. Jaký pohyb koná u klikového mechanismu píst, pístní tyč a křížák?
3. Jaký pohyb u klikového mechanismu koná ojnice?
4. Jaký pohyb u klikového mechanismu koná klika (klikový hřídel)?
5. Proč pro výpočet dráhy, rychlosti a zrychlení pístu používáme přibližné vztahy?
6. Jakou metodu používáme při grafickém určení rychlosti a zrychlení pístu?
7. V jaké poloze kliky je maximální rychlost pístu?
8. Jaké jsou vztahy pro zrychlení pístu v úvratích?

4.6 KULISOVÉ MECHANISMY

Kulisou, podle níž se tyto mechanismy nazývají, je vodící hranolovité těleso, v němž se pohybuje tzv. kámen, obvykle čtyřhranný.

Kulisovým mechanismem měníme rotační pohyb na pohyb posuvný nebo kývavý.

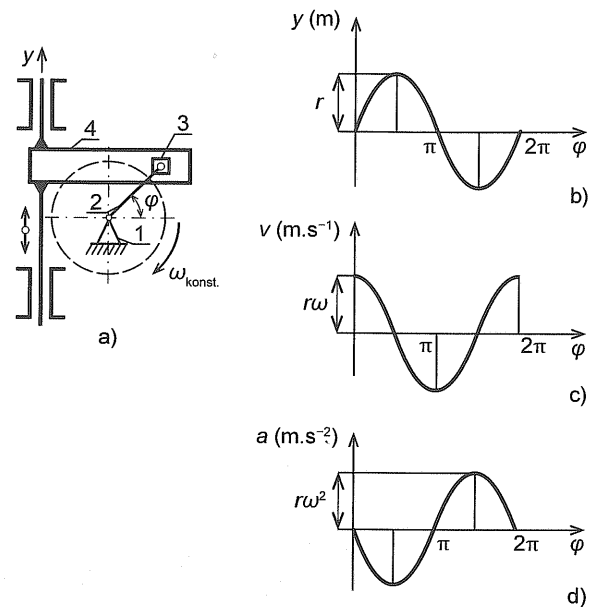
Kulisové mechanismy dělíme na posuvné, kývavé a otáčivé.

Probereme první dva typy.

4.6.1 Pravoúhlý kulisový mechanismus

Průběhy kinematických veličin (obr. 4.46).

Kde 1 – rám, 2 – klika, 3 – kámen, 4 – kulisa.



Obr. 4.46

Předpoklad: úhlová rychlost $\omega = \text{konst.}$

Dráha kulisy (i smýkadla):

$$y = r \cdot \sin \varphi = r \cdot \sin \omega t. \quad (4.34)$$

Rychlost kulisy:

$$c = r \cdot \omega \cdot \cos \omega t. \quad (4.35)$$

Zrychlení kulisy:

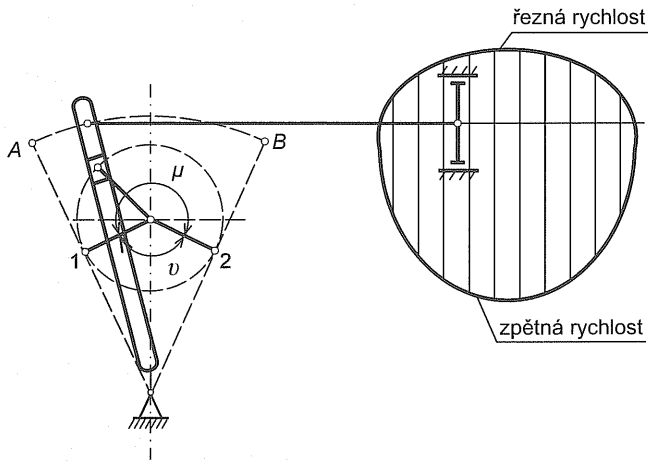
$$a = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t = -\omega^2 \cdot y. \quad (4.36)$$

Pravoúhlá kulisa koná harmonický pohyb.

4.6.2 Kulisový mechanismus s kývavou kulisou

Mechanismus se využívá zejména u vodorovných obráběčů. Doba zpětného zdvihu smýkadla je podstatně kratší než doba pracovního zdvihu nože. Tím se zkracuje ztrátový čas.

V bodech 1 a 2 (obr. 4.47) je smýkadlo v úvratích. Z obrázku je zřejmé, že úhel ϑ je nepoměrně menší než úhel μ . Proto také zpětná rychlost je podstatně větší než řezná rychlost.



Obr. 4.47

Obr. 4.48

Při pohybu kamene z polohy 1 do polohy 2 koná nůž hlavní řezný pohyb. Při pohybu kamene z polohy 2 do polohy 1 koná nůž zpětný zrychlený pohyb.

Velikosti řezných a zpětných rychlostí jsou v diagramu na obr. 4.48.

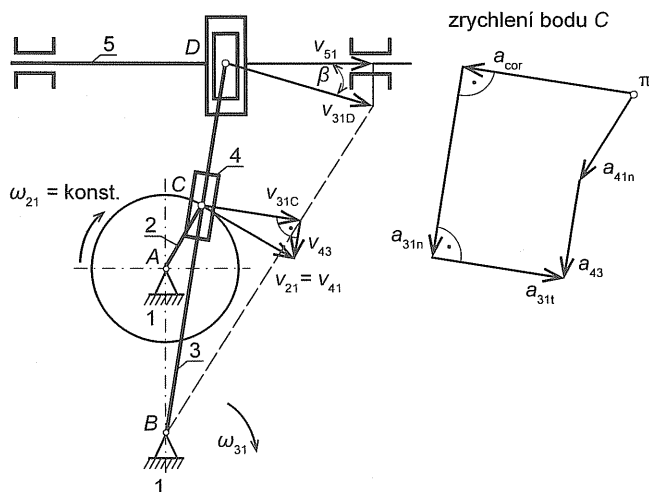
Příklad 79.

U kulisového mechanismu s kývavou kulisou zjistěte rychlosti a zrychlení bodu D . Příklad řešte obecně pro konstantní úhlovou rychlost kliky.

Řešení

Unášivý pohyb kulisy \vec{v}_{31} je rotační, proto úlohu musíme řešit Coriolisovým rozkladem.

Kulisový mechanismus s kývavou kulisou je znázorněn na obr. 4.49, kde 1 – rám, 2 – klika, 3 – kulisa, 4 – kámen, 5 – smýkadlo.



Obr. 4.49

Pro bod C platí rozklad: $41 = 43 + 31$.

$$\vec{v}_{41} = \vec{v}_{43} + \vec{v}_{31}.$$

V bodě C také platí: $\vec{v}_{41} = \vec{v}_{21}$.

Rychlost kliky \vec{v}_{21} je dána.

Pro zrychlení platí vztah: $\vec{a}_{41} = \vec{a}_{43} + \vec{a}_{31} + \vec{a}_{\text{cor}}$.

Zrychlení \vec{a}_{41} má pouze složku normálovou (úhlová rychlost kliky je konstantní):

$$a_{41n} = \frac{v_{41}^2}{r}$$

Coriolisovo zrychlení:

$$a_{\text{cor}} = 2\omega_{31} \cdot v_{43}, \quad \omega_{31} = \frac{v_{31}}{BC}.$$

Zrychlení a_{31n} :

$$a_{31n} = \frac{v_{31}^2}{BC}.$$

Tečná složka zrychlení a_{31t} (ve známém směru) se určí z grafu zrychlení vzhledem k rovněž známému směru a_{43} .

Úhlové zrychlení:

$$\varepsilon_{31} = \frac{a_{31t}}{BC}.$$

Rychlosti a zrychlení bodu D :

$$\frac{v_{31D}}{BD} = \frac{v_{31C}}{BC} \Rightarrow v_{31D} = v_{31C} \cdot \frac{BD}{BC}.$$

Axiální složka rychlosti:

$$v_{31Dax} = v_{31D} \cdot \cos \beta.$$

Normálové a tečné zrychlení bodu D :

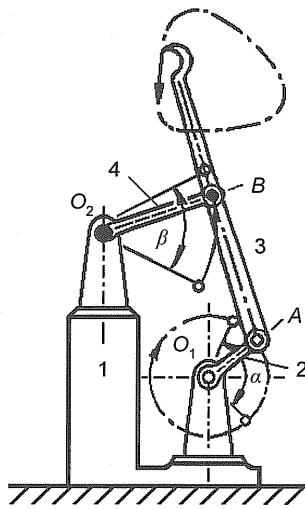
$$a_{31Dn} = \frac{v_{31}^2}{BD}, \quad a_{31Dt} = \varepsilon_{31} \cdot BD.$$

Celkové zrychlení bodu D :

$$a_{31D} = \sqrt{a_{31Dn}^2 + a_{31Dt}^2}.$$

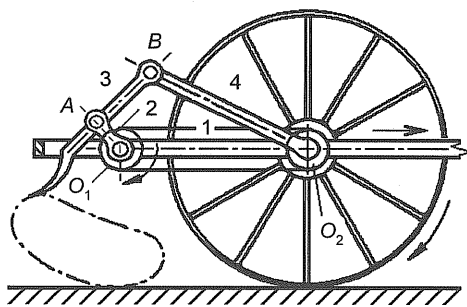
4.7 ČTYŘKLOUBOVÝ MECHANISMUS

Čtyřkloubový mechanismus je jedním ze základních typů mechanismů. Často se používá u zemědělských strojů. Znamé je také např. použití u filmové promítačky při posouvání filmu, kde využíváme skutečnosti, že část dráhy prodloužené části ojnice je přibližně přímková (obr. 4.50).



Obr. 4.50

Na obr. 4.51 je znázorněn obraceč sena.

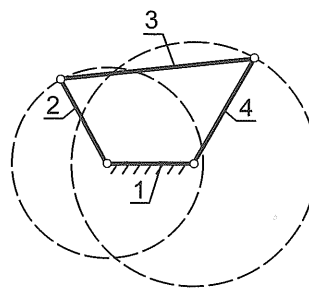


Obr. 4.51

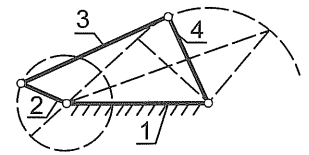
Čtyřčlen má jeden stupeň volnosti. Skládá se z rámu (1), hnacího a hnaného členu. Hnací členem (2) může být klika nebo vahadlo, hnaným členem (4) je klika nebo vahadlo. Členy (2) a (4) se nazývají klika nebo vahadlo podle toho, zda se otáčejí buď o plný úhel (klika), nebo o úhel menší než 2π (vahadlo).

Dělení čtyřkloubových mechanismů:

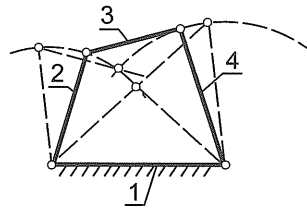
- a) dvojklikový (obr. 4.52a),
- b) klikovahadlový (obr. 4.52b),
- c) dvouvahadlový (obr. 4.52c),
- d) paralelogram (obr. 4.52 d),
- e) antiparalelogram (obr. 4.52e).



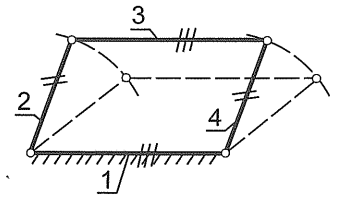
a)



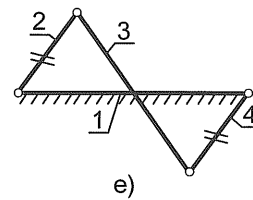
b)



c)



d)

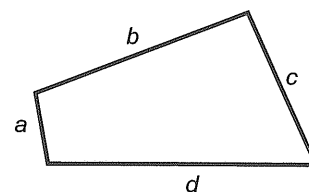


e)

Obr. 4.52

Poznámka: Čárkovaně jsou označeny jednotlivé dráhy bodů.

Podmínky pro jednotlivé typy čtyřčlenů (obr. 4.53):
 a – nejkratší část, d – nejdelší část.

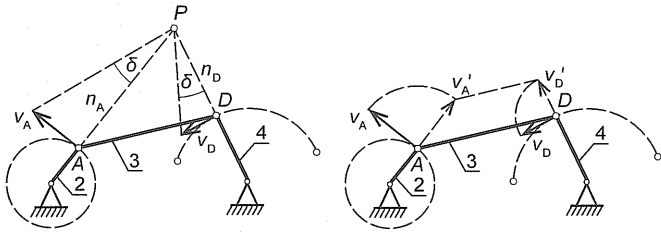


Obr. 4.53

Tabulka 4.3. Analýza čtyřkloubového mechanismu

Druh mechanismu	Podmínka	Rám	Poznámka
dvojklikový	$a + d < b + c$	a	nejkratší je rám
klika a vahadlo	$a + d < b + c$	b nebo d	nejkratší je klika
dvouvahadlový	$a + d > b + c$	jakýkoliv člen	nejkratší je ojnice

Na obr. 4.54 je znázorněn čtyřčlenný mechanismus s klikou a vahadlem. Má se určit rychlost bodu D vahadla, je-li dána úhlová rychlost kliky ω_{21} . Řešení lze provést pomocí pólu pohybu nebo pomocí pootočených rychlostí.



Obr. 4.54

Jestliže použijeme první metodu, potom nejprve musíme zjistit pól pohybu jako průsečík normál n_A a n_D . Koncové body rychlostí v_A a v_D se z pólu P zobrazují pod stejným zorným úhlem δ . Při použití druhé metody známou rychlost v_A otočíme o 90° získáme tak vektor v_A' . Jeho koncovým bodem vedeme rovnoběžku s úsečkou AD . Ta na normále n_D určí pootočenou rychlost v_D' . Otočením o 90° získáme skutečnou rychlost v_D .

V příkladu určíme rychlost a zrychlení bodu D ještě další metodou.

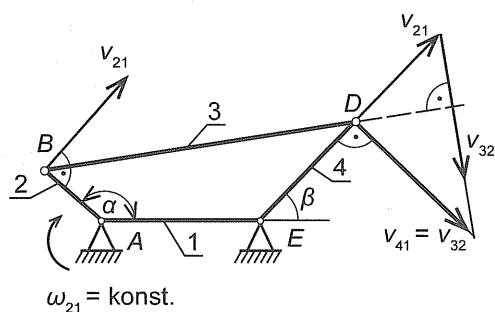
Příklad 80.

Určete rychlost a zrychlení bodu D čtyřčlenu základním rozkladem (obr. 4.55).

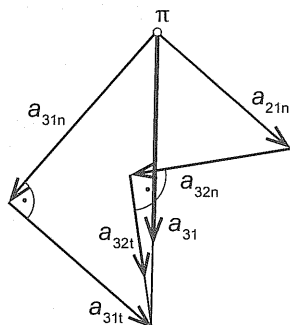
Dané hodnoty:

$$\overline{AB} = 200 \text{ mm}, \quad \overline{AE} = 300 \text{ mm}, \quad \overline{ED} = 300 \text{ mm},$$

$$\alpha = 135^\circ, \quad \beta = 45^\circ, \quad \omega_{21} = 60 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = \text{konst.}$$



$$\omega_{21} = \text{konst.}$$



Obr. 4.55

Podle tab. 4.1 jde o dvojklikový čtyřčlenný mechanismus.

Měřítka rychlostí: $1 \text{ mm} \equiv 0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Měřítka zrychlení: $1 \text{ mm} \equiv 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Pro bod D můžeme psát rozklad pohybů: $31 = 32 + 21$.

$$\vec{v}_{41} = \vec{v}_{31} = \vec{v}_{32} + \vec{v}_{21}.$$

U unášivé rychlosti v_{21} bodu B jsou známy velikost i směr – je kolmý na rameno kliky AB .

$$v_{21} = \overline{AB} \cdot \omega_{21} = 0,2 \text{ m} \cdot 60 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = 12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Unášivou rychlost v_{21} má celá úsečka BD , tedy i bod D .

U rychlosti v_{32} známe směr, je kolmý na spojnici BD (otáčení kolem bodu B). U rychlosti v_{31} je znám také směr, je kolmý na spojnici DE (otáčení kolem bodu E). Snadno potom graficky určíme velikost rychlosti v_{31} .

Odečteno: $v_{31} = 17 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_{32} = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Pro zrychlení platí vektorová rovnice:

$$\vec{a}_{41} = \vec{a}_{31} = \vec{a}_{32} + \vec{a}_{21}.$$

Zrychlení a_{21} má pouze normálovou složku, protože úhlová rychlost $\omega_{21} = \text{konst.}$

$$a_{21n} = \frac{v_{21}^2}{\overline{AB}} = \frac{(12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{0,2 \text{ m}} = 720 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Zrychlení a_{32} má normálovou i tečnou složku. Normálovou složku vypočítáme, má směr spojnice BD . Tečnou složku určíme z obrazce zrychlení. Obě složky jsou na sebe kolmé.

$$a_{32n} = \frac{v_{32}^2}{\overline{BD}} = \frac{(20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{0,65 \text{ m}} = 615 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

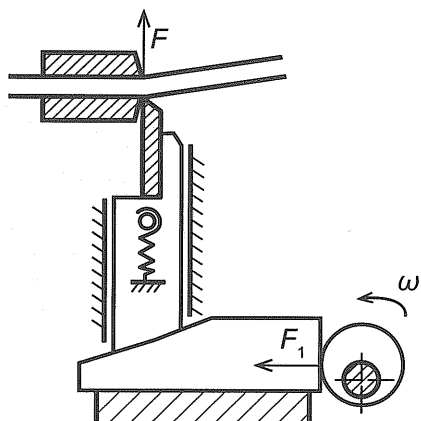
Zrychlení a_{31} má normálovou i tečnou složku. Normálovou složku vypočítáme, má směr spojnice DE . Tečnou složku určíme z obrazce zrychlení. Obě složky jsou na sebe kolmé.

$$a_{31n} = \frac{v_{31}^2}{\overline{ED}} = \frac{(17 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{0,30 \text{ m}} = 963 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Z obrazce zrychlení odečteno $a_{31} = 1\,240 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

4.8 KLÍNOVÝ MECHANISMUS

Mechanismus převádí posuvný pohyb na jiný posuvný pohyb. Oba pohyby jsou často na sebe kolmé. Na *obr. 4.56* je uvedeno stříhání drátu pomocí klínového mechanismu. Síla F_1 vyvinutá pomocí excentru je podstatně menší než síla F potřebná k přestřižení drátu. Silové poměry byly odvozeny ve staticce.

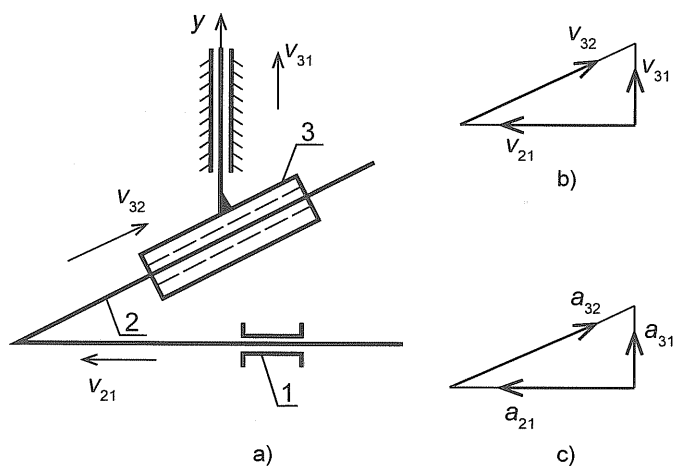


Obr. 4.56

Na *obr. 4.57* je zakresleno kinematické schéma klínového mechanismu. Ten se skládá z rámu (1), hnacího členu (2), který se pohybuje v ose x a hnaného členu, který se posouvá ve směru osy y . Oba členy jsou spojeny vedením.

Rychlosti i zrychlení hnaného členu (3) v_{31} a a_{31} určíme pomocí základního rozkladu pohybů:

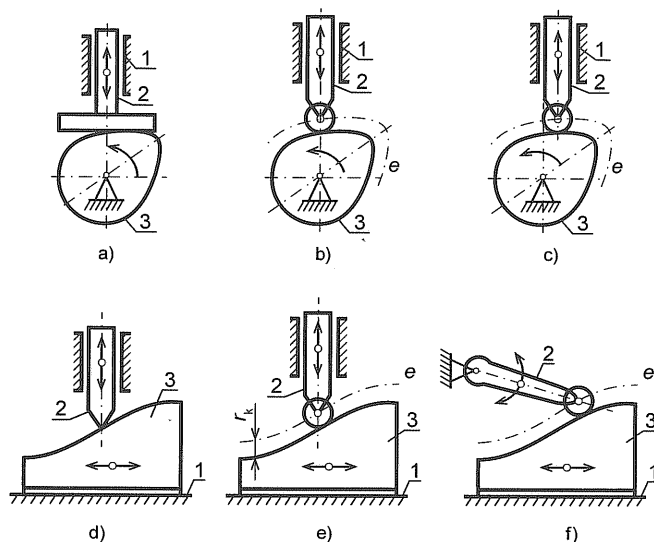
$$\vec{v}_{31} = \vec{v}_{32} + \vec{v}_{21}; \quad \vec{a}_{31} = \vec{a}_{32} + \vec{a}_{21}.$$



Obr. 4.57

4.9 VAČKOVÉ MECHANISMY

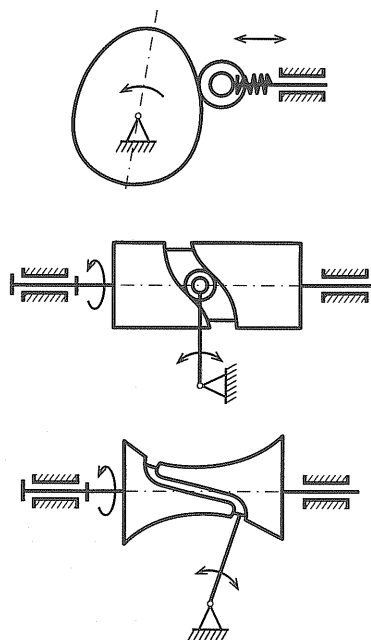
Vačkové mechanismy převádějí nejčastěji rotační pohyb vačky (hnacího členu) na posuvný vratný nebo kývavý pohyb hnaného členu. Mohou také vytvářet převod mezi dvěma posuvnými pohyby. Hnaným členem je nejčastěji zdvihátko s kladkou, talířkem nebo kyvné rameno (*obr. 4.58*). Při malých silách a rychlostech může sledovat tvar vačky také zdvihátko s hrotem.



Obr. 4.58

Vačkové mechanismy se používají u textilních, obráběcích, tiskařských, balicích a dalších výrobních strojů. Velmi důležitou roli hrají u ventilových rozvodů spalovacích motorů.

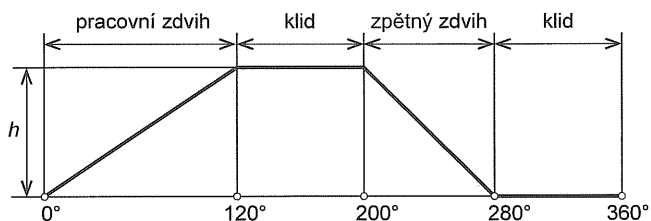
Na *obr. 4.59* jsou uvedeny další typy vaček, rovinné nebo prostorové.



Obr. 4.59

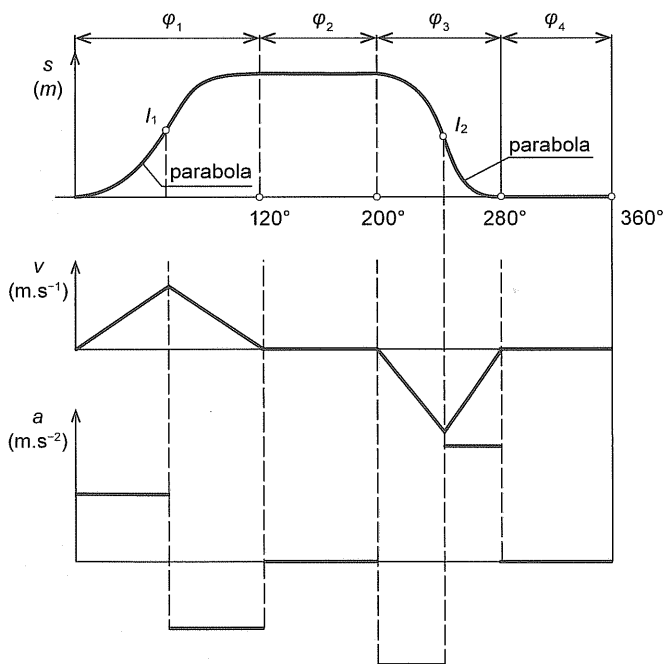
Vzestupný bok vačky slouží ke zrychlování, sestupná část ke zpomalování pohybu zdvihátka. Má-li se pohyb (zdvih) a také rychlost a zrychlení zdvihátka měnit přesně podle programu, musí mít vačka určitý profil.

Průběh pohybu hnaného členu za jednu otáčku vačky vyjádříme zdvihovým diagramem. Na obr. 4.60 je takový jednoduchý diagram. Skládá se pouze z přímkových úseků. Má ostré přechody, což není vhodné. Ostré přechody nahrazujeme obvykle technickými křivkami, parabolou nebo sinusovkou.



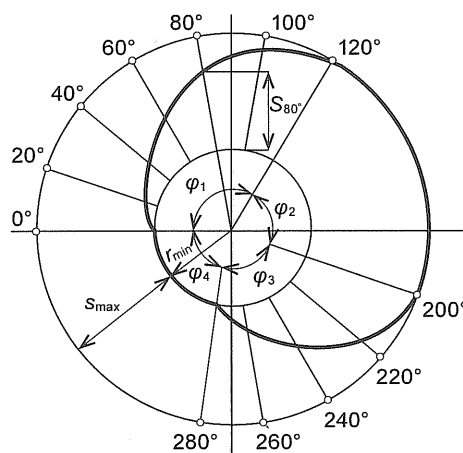
Obr. 4.60

Na obr. 4.61 je zdvihová křivka v pracovní části vytvořená dvěma parabolami. Rychlost zdvihu (derivace zdvihu) je přímková. Největší rychlost je v inflexních bodech I_1 a I_2 . Zrychlení zdvihu (derivace rychlosti) je v pracovních částech konstantní. Z kladných do záporných hodnot se dostává skokem. V mechanismu vznikají značné setrvačné síly. Mechanismus musí být dostatečně tuhý, aby co nejméně pružil. Skutečná zdvihová křivka je částečně odlišná od teoretické zdvihové křivky. I minimální nepřesnosti při výrobě vačky mají velmi nepříznivý vliv na velikost zrychlení zdvihátka. Proto se vačka musí počítat s přesností 0,001 mm.



Obr. 4.61

Na obr. 4.62 je zakreslen obrys vačky se zdvihovou i zpětnou křivkou vytvořenou parabolami. Pro jednoduchost je vačkový mechanismus proveden se zdvihátkem zakončeným hrotem.



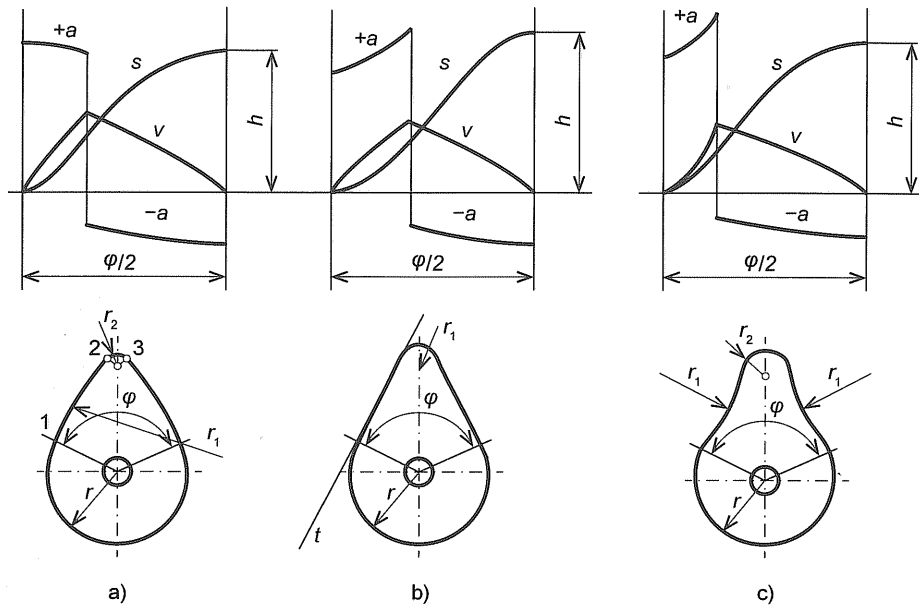
Obr. 4.62

Obrys vačky při zadaném zdvihovém diagramu se určí tímto postupem:

1. Nakreslíme kružnici o poloměru $R = r_{\min} + s_{\max}$, kde r_{\min} je poloměr základní kružnice, s – maximální zdvih hnaného členu.
2. Kružnici rozdělíme na fáze φ_1 až φ_4 podle zdvihové křivky.
3. Fázový úhel pro pracovní zdvih rozdělíme na přibližný počet stejných dílů a zakreslíme středové paprsky v kružnici.
4. Na takto sestrojené paprsky přeneseme příslušné délky zdvihu ze zdvihové křivky.
5. Jednotlivé body spojíme plynulou křivkou a získáme tak obrys vačky pro zdvihátko s hrotem.

Poznámka: Profil vačky pro zdvihátko s kladičkou dostaneme sestrojením ekvidistanty k uvedené křivce ve vzdálenosti poloměru kladičky.

Mezi nejznámější patří harmonické vačky, tangenciální vačky a vačky s vydutými boky (obr. 4.63).



Obr. 4.63

Harmonická vačka (obr. 4.63a) je tvořena čtyřmi kruhovými oblouky. Pohyb zdvihátka zajišťuje talířek (obr. 4.58a). Tangenciální vačka je vytvořena dvěma kruhovými oblouky a jejich tečnami (obr. 4.63b). Se zdvihátkem je spojena kladka (obr. 4.58b). Vačka s dutými boky (obr. 4.63c) se používá ve spojení s kladíčkou.

Diagram dráhy, rychlosti a zrychlení je nakreslen pouze pro poloviční úhel φ pracovního zdvihu. U všech tří vaček má průběh zrychlení skokový tvar, z vysokých kladných hodnot do poněkud nižších záporných hodnot.

Harmonická vačka je nejrozšířenější na vačkových hřídelích rychloběžných motorů, dosahuje rychlé otevírání a zavírání ventilů.

Tangenciální vačka se používá u pomaluběžných motorů nebo při pohonu vstřikovacích čerpadel.

Vačka s vydutými boky se používá u vačkových kotoučů hvězdicových motorů.

Kontrolní otázky

1. Nakreslete posuvný kulisový mechanismus.
2. Jaký je průběh kinematických veličin u posuvného kulisového mechanismu při konstantní úhlové rychlosti?
3. Nakreslete kulisový mechanismus s kývavou kulisou.
4. Zdůvodněte, proč zpětná rychlost u vodorovné obrážky je větší než řezná rychlost.
5. Nakreslete základní typy čtyřčlenného mechanismu.
6. Jaký pohyb koná klika a jaký vahadlo u čtyřčlenného mechanismu?
7. Nakreslete klínový mechanismus.
8. K jaké transformaci pohybu slouží klínový mechanismus?
9. K jaké transformaci pohybu slouží vačkový mechanismus.
10. Vysvětlete pojem „zdvihový diagram vačkového mechanismu“.
11. Proč musí být vačkový mechanismus tuhý a vyrobený s velkou přesností?
12. Nakreslete nejznámější vačky a uveďte, kde se používají.

POUŽITÁ LITERATURA

- Bajer, J.: *Mechanika I*. Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci 2004.
- Bolek, A. – Kochman, J. a kol.: *Části strojů. 2. svazek*. Praha, SNTL 1990.
- Brát, V.: *Příručka kinematiky s příklady*. Praha, SNTL 1976.
- Bureš, O. a kol.: *Traktory a automobily*. Praha, SZN 1980.
- Bušek, I.: *Řešené úlohy z matematiky*. Praha, SPN 1985.
- Černý, J. – Zelenka, R.: *Traktory a automobily II*. Praha, SPN 1980.
- Freisleben, B.: *Základy strojnictví. Úvaly*, ALBRA 2004.
- Hollyday, D. – Resniek, S. – Walker, J.: *Fyzika. Mechanika I*. Brno, Vutium 2000.
- Julina, M. – Venclík, V.: *Mechanika – kinematika pro školu a praxi*. Praha, Scientia 2000.
- Kolektiv: *Fyzika I. Příklady*. Liberec, Technická univerzita v Liberci 2016.
- Kříž, R. – Weigner, K. – Svoboda, J.: *Stavba a provoz strojů III. Mechanismy*. Praha, SNTL 1983.
- Kunc, A. – Bláha, J. – Daniel, A. – Zima, J.: *Mechanika I*. Praha, SNTL 1961.
- Kunc, A. – Daniel, A. – Šidák, J. – Zima, J.: *Mechanika III*. Praha, SNTL 1961.
- Nahodil, J.: *Sbírka úloh z fyziky pro SŠ*. Praha, Prometheus 2011.
- Pešík, L.: *Části strojů, 2. díl*. Liberec, Technická univerzita v Liberci 2002.
- Podešva, J.: *Základy mechaniky*. Ostrava, Technická univerzita Ostrava 2006.
- Salaba, S. – Matěna, A.: *Mechanika I. Statika*. Praha, SNTL 1977.
- Šesták, J. a kol.: *Technická mechanika, mechanika tuhých těles*. Praha, SZN 1985.
- Turek, I., – Skála, O. – Haluška, J.: *Sbírka úloh z mechaniky*. Praha, SNTL 1975.
- Tvrzský, J.: *Mechanika pro 2. ročník SPŠ elektrotechnických*. Praha, SNTL 1975.
- Vencálek, F. – Kutílek, M.: *Fyzika pro 1. ročník SPŠ*. Praha, SPN 1964.

Ing. Oldřich Šámal

TECHNICKÁ MECHANIKA

KINEMATIKA

Vydalo nakladatelství INFORMATORIUM, spol. s r. o.,
Roztylská 1860/1, 148 00 Praha 11
v roce 2018 jako svou 354. publikaci
Odpovědná redaktorka Ing. Iva Brzáková
Grafická úprava a sazba Soňa Brzáková
Obálka Luboš Walter
Vydání první

www.informatorium.cz