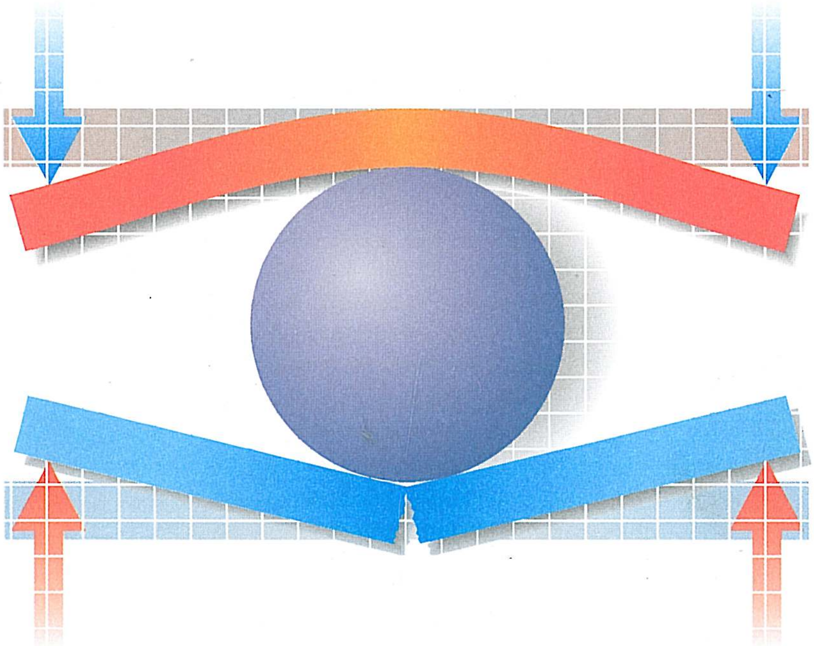
Ing. Anton Daniš

Mechanika

pre SPŠ strojnícke



PRUŽNOSŤ A PEVNOSŤ

Tematický zošit

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Autor © Ing. Anton Daniš, 2000

Lektorovali: Ing. Viera Netoušková
Ing. Tatiana Zehetnerová

Schválilo Ministerstvo školstva Slovenskej republiky dňa 8. októbra 1999 pod číslom 3780/1999-4 ako 1. vydanie učebnice pre 1. a 2. ročník skupín študijných odborov 2381 6 strojárstvo.

Druhé vydanie, 2004

Všetky práva vyhradené.
Toto dielo ani žiadnu jeho časť nemožno reprodukovať bez súhlasu majiteľa práv.

Zodpovedná redaktorka RNDr. Jana Belasová
Graficky upravila Ľubica Rybánska
Výtvarná redaktorka Mgr. Ľubica Suchalová
Obálku navrhol Igor Imro

Vyšlo vo vydavateľstve Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá, s. r. o.
Sasinkova 5, 815 60 Bratislava
Vytlačila Svornosť, a. s., Bratislava

ISBN 80-08-02888-2 (1. vydanie)
ISBN 80-10-00529-0

OBSAH

PREDHOVOR

MECHANIKA

Tematický zošit *Pružnosť a pevnosť* je súčasťou série tematických zošitov tvoriacich učebnicu Mechanika pre stredné odborné školy. Vznikla na základe požiadaviek SOŠ, ktoré už dlhší čas pociťujú nedostatok vhodných učebníc, zodpovedajúcich platným učebným osnovám a súčasne platným normám.

Učebnica bude vhodná aj pre stredné odborné učilištia strojnícke a všade tam, kde sa učia teoretické základy strojníctva. Obsahuje teoretické základy pre návrhy a výpočty, ktoré sa uplatňujú v strojníckych konštrukciách. Výklad dopĺňa množstvo ilustračného materiálu a riešených príkladov. Predpokladáme, že študenti a čitatelia majú k dispozícii strojnícke tabuľky, na ktoré sa často odvolávame a odkiaľ berieme materiálové či iné hodnoty. Používanie symbolov a značiek je tiež prispôsobené symbolom a značkám uvádzaným v strojníckych tabuľkách. Tie hodnoty, ktoré sa v tabuľkách nenachádzajú, sú uvedené v učebnici.

V súčasnosti, kedy sa naša ekonomika snaží intenzívne začleniť do medzinárodnej spolupráce, sa celý normalizačný systém prepracováva. To sa prejavuje v nových normách technického kreslenia a tiež v označovaní materiálov. V čase tvorby tejto učebnice ešte neboli k dispozícii úplné prevodové tabuľky medzi materiálovými normami EN a STN, preto sme používali iba tie dostupné materiály, pri ktorých bol možný prevod. Prevodová tabuľka niektorých vybraných materiálov je uvedená v závere učebnice. V niektorých prípadoch sme použili pôvodné označenie materiálov podľa STN.

Nekladieme si za cieľ zahrnúť čitateľa množstvom vzťahov a vzorcov, ale ukázať postupy, ako sa k nim možno dopracovať. To by mohlo viesť k rozvíjaniu tvorivej práce s učebnicou. Úroveň matematiky, ktorá je využívaná v učebnici, zodpovedá úrovni druhého ročníka stredných priemyselných škôl, kedy sa tento predmet vyučuje. V niektorých prípadoch to vedie k tomu, že sa vzťahy neodvodzujú, ale iba uvedú. Farebné rozlíšenie v obrázkoch má umožniť lepšiu a rýchlejšiu orientáciu, kde použitie modrej farby znamená *príčinu* a použitie červenej, z toho vyplývajúci *dôsledok*.

Veríme, že učebnica nájde obľubu nielen medzi študentmi, pre ktorých je predovšetkým určená, ale aj medzi učiteľmi a ostatnou technickou verejnosťou.

Autor

1 ZOZNAM POUŽITÝCH ZNAČIEK VELIČÍN A SYMBOLOV

Značka	Veličina	Jednotka
A	práca	J
	ťažnosť	–
A_{def}	deformačná práca	J
b	šírka	m; mm
c	súčiniteľ vzpernosti	–
c_{II}, c_{III}	súčiniteľ zníženia napätia	–
d, D	priemer	m; mm
d_0; D_0	pôvodný priemer	m; mm
E	modul pružnosti v ťahu	Pa; MPa
e	excentricita	m; mm
F	sila	N; kN
G	modul pružnosti v šmyku	Pa; MPa
g	tiažové zrýchlenie	ms^{-2}
H	pólová vzdialenosť	mm
h	výška	m; mm
i	polomer kvadratického momentu prierezu	m; mm
J_P	polárny moment prierezu	m^4; mm^4
J_x, J_y	kvadratický moment prierezu	m^4; mm^4
k	miera bezpečnosti	–
l	dĺžka	m; mm
l_0	pôvodná dĺžka	m; mm
l_{red}	redukovaná dĺžka	m; mm
M	moment sily	Nm; Nmm
M_k	krútiaci moment	Nm; Nmm
M_o	ohybový moment	Nm; Nmm
M_{ored}	redukovaný ohybový moment	Nm; Nmm
m	hmotnosť	kg
	Poissonova konštanta	–
n	frekvencia otáčania, otáčky	s^{-1}
P	výkon	W; kW
p	tlak, tlak na stykovej ploche	Pa; MPa
q	dĺžkové zaťaženie, spojité bremeno	Nm^{-1}; Nmm^{-1}
r, R	polomer, polomer krivosti	m; mm
R_e	meraním zistená hodnota medze klzu	Pa; MPa
R_m	meraním zistená hodnota medze pevnosti	Pa; MPa
R_p	dohovorená medza klzu z trvalej deformácie pod zaťažením	Pa; MPa
$R_p0{,}2$	dohovorená medza klzu z trvalej deformácie 0,2 % deformácie pod zaťažením	Pa; MPa
S	plošný obsah	m^2; mm^2
S_M	plocha momentového obrazca	m^2; mm^2
S_0	pôvodná plocha prierezu	m^2; mm^2
t	Celziova teplota	°C
	čas	s
	hrúbka	m; mm

Značka	Veličina	Jednotka
V	objem	m^3; mm^3
V_0	počiatočný objem	m^3; mm^3
v	rýchlosť	ms^{-1}
W	energia napätosti	J
W_k	prierezový modul v krútení	m^3; mm^3
W_o	prierezový modul v ohybe	m^3; mm^3
w	objemová hustota deformačnej energie	Jm^3; Jmm^3
x_T, y_T, z_T,	súradnice ťažiska	m; mm
y	priehyb	m; mm
Z	pomerné zúženie prierezu (kontrakcia)	–
α	tvarový súčiniteľ	–
	rovinný uhol	rad
	súčiniteľ pre krútenie obdĺžnikových prierezov	–
	uhol natočenia prierezu	rad
α_B	Bachov opravný súčiniteľ	–
α_t	teplotný súčiniteľ dĺžkovej rozťažnosti	K^{-1}
β	súčiniteľ pre krútenie obdĺžnikových prierezov	–
	vrubový súčiniteľ skutočného zhustenia napätia	–
γ	súčiniteľ pre krútenie obdĺžnikových prierezov	–
	skosenie	–
δ	vôľa medzi závitmi pružiny	mm
Δl	predĺženie (skrátenie)	mm
Δt	teplotný rozdiel	°C
ε	pomerné predĺženie	–
ε_m	súčiniteľ veľkosti súčiastky	–
ε_p	súčiniteľ stavu povrchu súčiastky	–
η	súčiniteľ vrubovej citlivosti materiálu	–
ϑ	pomerné skrútenie	–
λ	štíhlostný pomer	–
λ_m	medzný štíhlostný pomer	–
μ	Poissonovo číslo	–
ρ	hustota	kgm^{-3}
σ	normálové napätie	Pa; MPa
τ	tangenciálne napätie	Pa; MPa
σ_C; τ_C	napätie na medzi únavy	Pa; MPa
σ_{Cef}; τ_{Cef}	napätie na medzi únavy znížené pre súčiastku	Pa; MPa
σ_E; τ_E	napätie na medzi pružnosti	Pa; MPa
σ_K; τ_K	napätie na medzi klzu	Pa; MPa
σ_P; τ_P	napätie na medzi pevnosti	Pa; MPa
σ_U; τ_U	napätie na medzi úmernosti	Pa; MPa
σ_c; τ_c	cyklické napätie	Pa; MPa
σ_a; τ_a	amplitúda napätia	Pa; MPa
σ_h; τ_h	horné napätie	Pa; MPa
σ_m; τ_m	stredné napätie (predpätie)	Pa; MPa
σ_n; τ_n	dolné napätie	Pa; MPa
φ	súčiniteľ vzpernosti	–
	uhol skrútenia	rad
ω	uhlová rýchlosť	rad s^{-1}

INDEXY NA OZNAČOVANIE VELIČÍN

Pre sily *F*:

1, 2, 3	– podľa poradia
x, y, z	– v danej osi
A, B, C	– v danom bode
c	– celková
g	– gravitačná (tiažová)
kr	– kritická
n, N	– normálová
t	– priečna; tangenciálna (dotyčnicová)
q	– náhradná za spojité bremeno

Pre napätia:

1, 2	– hlavné napätia
x, y, z	– v danej osi
υ, ξ	– v danej rovine
t	– v ťahu
d	– v tlaku
o	– v ohybe
k	– v krútení
s	– v šmyku
D	– dovolené
red	– redukované
kr	– kritické

PRÍKLADY OZNAČOVANIA INDEXMI

F_{Ax}	– väzbová sila v bode *A* v smere osi *x*
F_t	– priečna sila
F_q	– náhradná sila za spojité bremeno
F_g	– gravitačná (tiažová) sila
F_{kr}	– kritická sila
	a pod.

σ_{Pt}	– napätie v ťahu na medzi pevnosti
σ_{Do}	– dovolené napätie v ohybe
σ_1	– hlavné napätie
σ_{kr}	– kritické napätie
τ_{Ck}	– napätie v krútení na medzi únavy
τ_{Ps}	– napätie v šmyku na medzi pevnosti
	a pod.

2 ZÁKLADNÉ POJMY

MECHANIKA

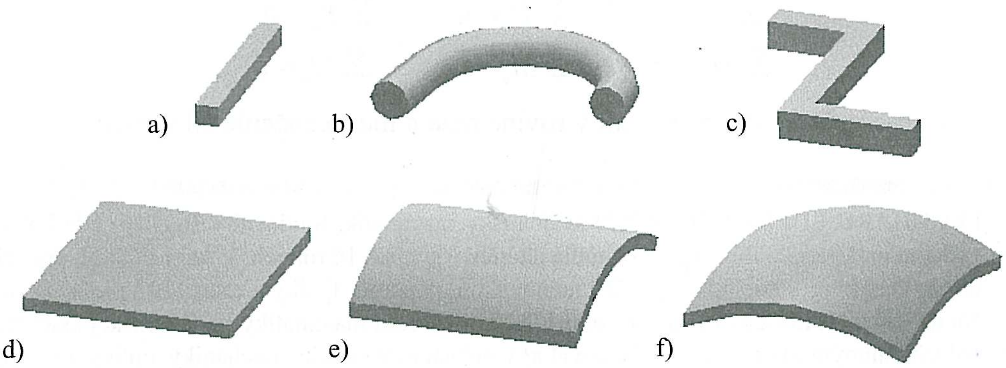
Pri návrhu rozmerov súčiastok strojov alebo rôznych konštrukcií sa takmer vždy stretávame s problémom, aké rozmery musíme navrhnúť, aby bola konštrukcia dostatočne pevná a zároveň, aby nebola predimenzovaná. Tieto úlohy rieši časť mechaniky, ktorú nazývame pružnosť a pevnosť.

Súčiastky, ktoré tvoria prvky konštrukcie alebo sú súčiastkami strojov a zariadení, sú často tvarovo veľmi zložité. Preto ich pri výpočtoch idealizujeme na tri základné nosné prvky:

a) prút – prvok, ktorého dĺžka je oveľa väčšia ako priečne rozmery. Os prútu môže byť priama, krivá alebo zalomená *(obr. 2.1 a, b, c)*. Prúty nazývame podľa toho, akú majú v konštrukcii funkciu napr. hriadele, osi, nosníky, trámy, priečky, stĺpy a pod.,

b) doska – je tuhé teleso, ktorého hrúbka je zanedbateľná oproti ostatným rozmerom. Doska môže byť rovinná alebo rovinne zakrivená *(obr. 2.1 d, e)*,

c) škrupina – na rozdiel od dosky má priestorovo zakrivenú plochu *(obr. 2.1 f)*.



Obr. 2.1

Na rozdiel od statiky, kde sa uvažujú dokonale tuhé telesá, berieme v pružnosti a pevnosti do úvahy aj deformácie. Predpokladáme, že sú vzhľadom na rozmery telesa veľmi malé a že po odstránení zaťaženia zmiznú, teda teleso sa vráti do svojej pôvodnej polohy. Takéto teleso nazývame pružným telesom

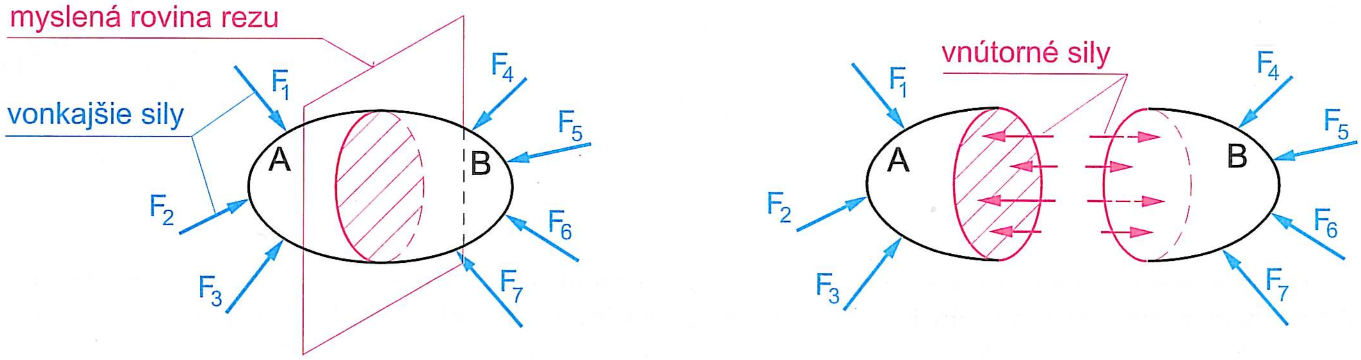
2.1 VONKAJŠIE A VNÚTORNÉ SILY

Na telesá pôsobia sily vyvolané pôsobením iných telies – súčiastok. Tieto sily sa nazývajú vonkajšie sily Rozdeľujeme ich na:

a) sily pôsobiace na teleso zvonku – zaťaženia, väzbové sily, reakcie, tlak vetra, tlak kvapaliny, tiaž snehu a pod.,
b) sily viazané na hmotu telesa pôsobiace vo všetkých bodoch telesa – vlastná tiaž, zotrvačné sily, odstredivé sily a pod.

Napriek tomu, že na telesá pôsobia vonkajšie sily, telesá zostávajú celistvé. Čiastočne sa deformujú a po odstránení síl spôsobujúcich zaťaženie, sa častice snažia vrátiť do pôvodnej polohy. Sily, ktoré bránia deformácii telesa a vracajú vychýlené častice deformovaného telesa do pôvodnej polohy, nazývame vnútorné sily

Predpokladáme, že materiál je vo všetkých smeroch rovnorodý – má rovnaké vlastnosti vo všetkých bodoch a vo všetkých smeroch. Takémuto materiálu hovoríme homogénny izotropný materiál. Na vyjadrenie vlastností vnútorných síl sa najčastejšie používa metóda mysleného rezu, ktorú vytvoril Euler. Touto metódou dokážeme zistiť vnútorné sily v ktoromkoľvek mieste telesa.



Obr. 2.2

Na teleso z *obr. 2.2* pôsobí sústava vonkajších síl. V mieste, v ktorom chceme zisťovať vnútorné sily, rozdelíme teleso na dve časti *A* a *B*. Teraz nebude v rovnováhe ani časť *A* ani *B*, pokiaľ v mieste rezu nepripojíme také veľké vnútorné sily, ktoré nahradia pôsobenie časti *A* na časť *B* a naopak. Pretože účinky sú rovnaké na obe časti rozdeleného telesa, musia mať sily rovnakú veľkosť, ale opačnú orientáciu. Ak je pôvodné teleso vplyvom vonkajších síl v rovnováhe, musí byť každá jeho časť v rovnováhe aj po vykonaní rezu a zavedení vnútorných síl. Pre zostávajúcu časť telesa sú vnútorné sily vonkajšími silami a môžeme ich vypočítať zo statických podmienok rovnováhy:

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum F_z = 0$$
$$\sum M_x = 0, \qquad \sum M_y = 0, \qquad \sum M_z = 0$$

Touto metódou zistíme veľkosť výslednice síl v rovine rezu a nie rozloženie síl v rovine.

LEONHARD EULER (1707–1783) švajčiarsky matematik. Študoval v Bazileji, kde bol žiakom iného veľkého matematika Bernoulliho. Štúdiá ukončil v svojich 16 rokoch. V roku 1727 ho pozvala Katarína I. do St. Peterburgu, kde ho roku 1730 menovala profesorom fyziky a roku 1733 profesorom matematiky. Na naliehanie Fridricha II. sa stal roku 1741 profesorom matematiky na Berlínskej akadémii vied. Hoci bol významným matematikom, pracoval aj v oblasti astronómie, mechaniky, optiky a v akustike.

2.2 DEFORMÁCIE

Vezmime si do ruky špongiu na utieranie tabule, ktorá má tvar kvádra. Môžeme na ňu pôsobiť rôznymi silami, pričom sa špongia deformuje do najrôznejších tvarov. Môžeme ju naťahovať, stláčať, ohýbať, skrúcať a pod. Bežné súčiastky sa v prevádzke deformujú podobne, ale v oveľa menšej miere. Ak sa deformuje celé teleso, potom predpokladáme, že sa deformuje každá jeho časť, preto stačí, ak skúmame deformácie na elementárnej kocke. Ak na kocke dôjde k zmene dĺžkových rozmerov, túto deformáciu nazývame predĺženie alebo skrátenie. Ak dôjde k zmene pravých uhlov, túto deformáciu nazývame skosenie. Týmito dvoma typmi deformácií, môžeme zostaviť akúkoľvek zmenu tvaru.

2.2.1 Predĺženie

Predstavme si, že na gumové pásy rovnakého prierezu ale rôznej dĺžky dáme rovnaké závažie a zmeriame o koľko sa pásy predĺžia. Zrejme, že kratší pás sa predĺži menej ako dlhší. Predĺženie môžeme vyjadriť vzťahom:

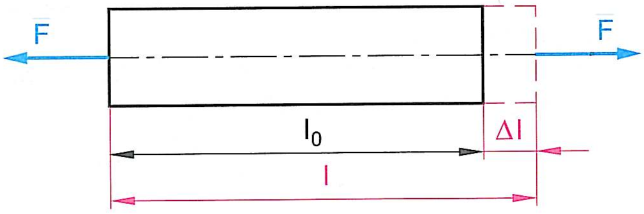
$$\Delta l = l - l_0 \qquad [\mathrm{m, mm}]$$

kde l [m, mm] je dĺžka predĺženého pásu,
l_0 [m, mm] je pôvodná dĺžka pásu.

Toto predĺženie nazývame absolútne predĺženie.

Z príkladu vidieť, že porovnanie predĺžení dvoch telies týmto spôsobom nám veľa nepovie. Na porovnávanie predĺženia tak, aby bol odstránený vplyv dĺžky, sa zaviedol pojem pomerné predĺženie.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{alebo} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}\cdot 100 \; [\%]$$



Obr. 2.3

Je to bezrozmerné číslo vyjadrujúce pomer predĺženia k pôvodnej dĺžke, resp. percentuálne predĺženie pôvodnej dĺžky – ide o relatívne predĺženie.

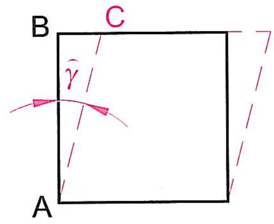
2.2.2 Skosenie

Ide o zmenu pravého uhla kocky *(obr. 2.4)*, kde $\overline{BC}$ je posunutie a γ je zmena uhla – skosenie. Pri malej zmene uhla, čo najčastejšie zodpovedá skutočnosti, môžeme s dostatočnou presnosťou napísať:

$$\mathrm{tg}\,\gamma \doteq \hat{\gamma} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

Táto deformácia nie je závislá od rozmerov súčiastky, a preto ju hodnotíme ako relatívnu deformáciu.

Zmena tvaru súčiastky sa môže skladať zo zmeny dĺžky, zmeny pravého uhla alebo zo zmien dĺžky a pravého uhla súčasne.

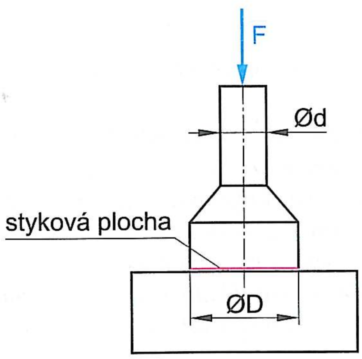


Obr. 2.4

2.3 TLAK A NAPÄTIE

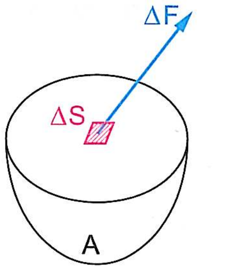
Nechajme na seba pôsobiť dve telesá podľa *obr. 2.5*. V mieste ich vzájomného styku – na povrchoch oboch súčiastok – dochádza k silovému pôsobeniu. Tomuto pôsobeniu hovoríme tlak na stykových plochách (ďalej len tlak). Veľkosť tlaku je vo všeobecnosti podielom sily a priemetu stykovej plochy do roviny kolmej na smer pôsobenia sily:

$$p = \frac{F}{S} \quad [\text{Pa, MPa}]$$

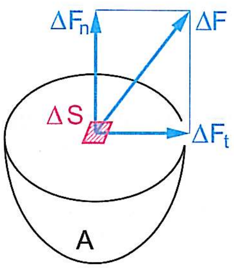


Obr. 2.5

Veľkosť výslednice vnútorných síl na súčiastke s rôznymi priemermi *(obr. 2.5)* je v každom priereze rovnaká. Intenzita silového pôsobenia v priereze s priemerom d je ale väčšia ako v priereze s priemerom D. Na porovnávanie veľkosti intenzity vnútorných síl sa zaviedol pojem napätie. Napätie je podiel výslednice vnútorných síl a prierezovej plochy, na ktorú pôsobí.



Obr. 2.6



Obr. 2.7

Aký je teda rozdiel medzi tlakom a napätím? Napriek tomu, že ich jednotky sú rovnaké [MPa], rozdiel je v tom, že tlak vzniká v mieste styku dvoch telies a jeho veľkosť vyjadruje intenzitu ich vzájomného pôsobenia a napätie je vyjadrením intenzity vnútorných síl na jednotku prierezu v skúmanom priereze telesa.

Vezmime teleso zaťažené vonkajšími silami, veďme ním rez myslenou rovinou a skúmajme jednu jeho časť.

Na skúmanej časti telesa vyznačme veľmi malú (elementárnu) plôšku ΔS, na ktorú pôsobí výslednica vnútorných síl ΔF. Podiel:

$$\nu = \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad \text{[MPa]}$$

vyjadruje priemerné napätie na plôške ΔS. Vo všeobecnom prípade nie je sila ΔF kolmá na elementárnu plôšku ΔS. Rozložme túto silu na zložku kolmú na rovinu ΔF_n a na zložku, ktorá leží v myslenej rovine rezu ΔF_t.

Tieto zložky prechádzajú ťažiskom plochy a každá z nich spôsobuje iné napätie. Zložka kolmá na rovinu spôsobuje normálové napätie

$$\sigma = \frac{\Delta F_n}{\Delta S} \quad \text{[MPa]}$$

a zložka ležiaca v rovine mysleného rezu spôsobuje tangenciálne napätie

$$\tau = \frac{\Delta F_t}{\Delta S} \quad \text{[MPa]}$$

Normálové napätia bránia časticiam telesa oddeľovať sa od seba alebo sa k sebe približovať v smere kolmom na rovinu mysleného rezu

Tangenciálne napätia bránia časticiam posúvať sa v rovine rezu

Pojmy napätie a deformácia sú základnými pojmami pružnosti a pevnosti. Budeme sa stretávať s tabuľkovými hodnotami napätí, ktoré sú základnými materiálovými konštantami. Sú to napr.:

R_m, R_{ms} [MPa] – napätie na medzi pevnosti, (σ_p, τ_p, – staré označenie)

R_e, R_{es} [MPa] – napätie na medzi klzu, (σ_K, τ_K, – staré označenie)

Z týchto napätí sa vypočítavajú prípustné možné napätia, ktoré materiál bezpečne prenesie:

σ_D, (τ_D) – dovolené napätia

V tabuľkách sa nachádzajú aj hodnoty napätí na medzi únavy σ_C, τ_C, o význame ktorých budeme hovoriť v kapitole 11 Cyklické namáhanie, únava kovov a tvarová pevnosť.

Zhrnutie:

Náuka o pružnosti a pevnosti rieši účinok vonkajších síl na teleso – deformácie a napätia. Rozlišujeme dva typy deformácií:
– dĺžkovú deformáciu, ktorú môžeme vyjadriť ako absolútne predĺženie Δl alebo ako pomerné, teda relatívne predĺženie ε,
– tvarovú deformáciu – skos, ktorá je relatívnou deformáciou.

Na zistenie veľkosti vnútorných síl sa používa metóda mysleného rezu. Zakladá sa na tom, že účinok odstránenej časti telesa nahradíme takými vnútornými silami, aby zostávajúca časť zostala v rovnováhe.

Tlak je vyjadrením intenzity pôsobenia dvoch síl na seba v mieste styku, napätie je vyjadrením intenzity vnútorných síl na jednotku plochy. Napätie vyjadruje odpor, ktorý kladie materiál vonkajším silám snažiacim sa deformovať teleso. Rozlišujeme dva druhy napätí – normálové – pôsobiace kolmo na rovinu mysleného rezu a tangenciálne, ktoré pôsobí v rovine rezu.

2.4 ZÁKLADNÉ DRUHY NAMÁHANÍ

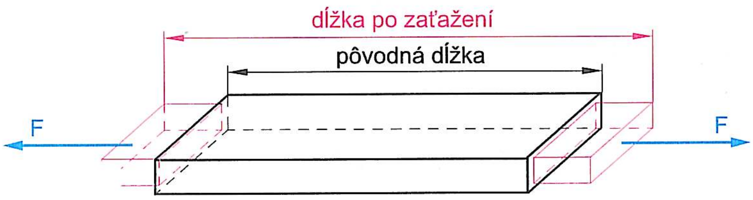
Teleso môže byť zaťažované viacerými spôsobmi. Aký druh namáhania sa pritom vyvolá, môžeme zistiť:

– podľa vzájomnej polohy riešeného prierezu a výslednice vonkajších síl,
– podľa polohy výslednice vnútorných síl vzhľadom na riešený prierez a jeho ťažisko.

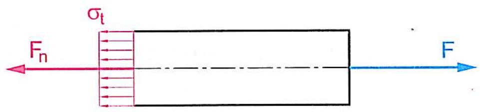
Rozoznávame štyri základné druhy namáhaní.

2.4.1 Namáhanie ťahom alebo tlakom

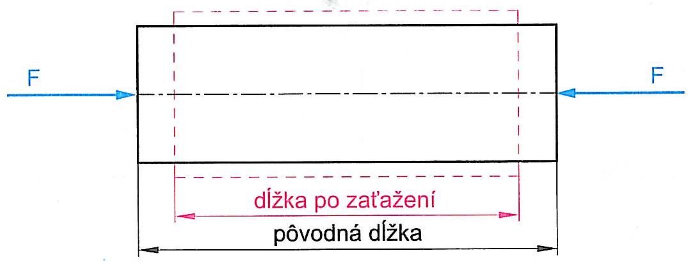
Namáhanie ťahom alebo tlakom vzniká vtedy, ak dve rovnako veľké sily, opačnej orientácie, ležiace na spoločnej vektorovej priamke, ktorá prechádza osou tyče, pôsobia pri ťahu von z prierezu a pri tlaku smerom do prierezu. Jedna sila môže byť nahradená závesom alebo podperou. Výslednica vnútorných síl prechádza ťažiskom prierezu a je kolmá na rovinu prierezu.



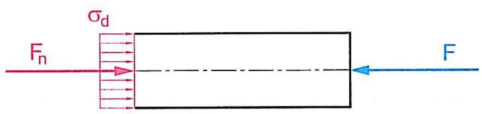
$$\sigma_t = \frac{F_n}{S} \quad [\text{MPa}]$$



a) namáhanie ťahom



$$\sigma_d = \frac{F_n}{S} \quad [\text{MPa}]$$



b) namáhanie tlakom

Obr. 2.8

Deformácia

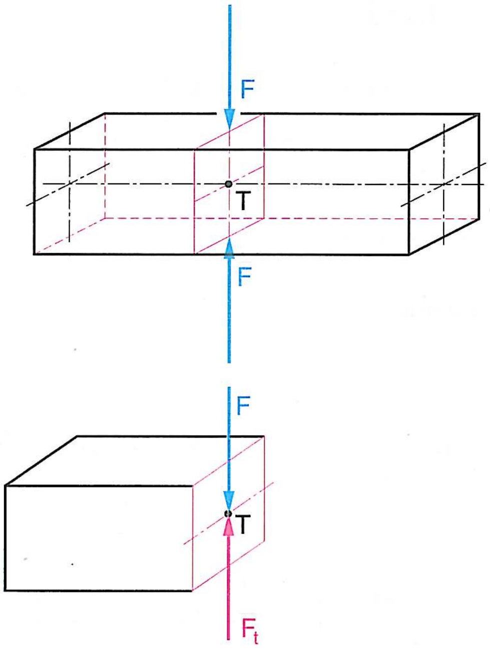
Pri ťahu dochádza k predĺženiu telesa v smere pôsobenia síl a v priečnych smeroch dochádza k zúženiu. Pri tlaku dochádza k skráteniu telesa v smere pôsobenia síl a v priečnych smeroch k rozšíreniu rozmerov.

Napätie

Vzniká normálové napätie rovnomerne rozložené po priereze.

2.4.2 Namáhanie šmykom

Namáhanie čistým šmykom vzniká vtedy, ak dve rovnako veľké sily, opačnej orientácie, ležiace na spoločnej vektorovej priamke, ktorá prechádza ťažiskom prierezu, pôsobia kolmo na os tyče. Výslednica vnútorných síl prechádza ťažiskom prierezu a leží v rovine mysleného rezu.



$$\tau_s = \frac{F_t}{S} \quad [\text{MPa}]$$

Obr. 2.9

Deformácia

Pri šmyku sa susedné vrstvy posúvajú oproti sebe v smere pôsobiacej sily.

Napätie

Vzniká tangenciálne napätie rovnomerne rozložené po priereze.

2.4.3 Namáhanie ohybom

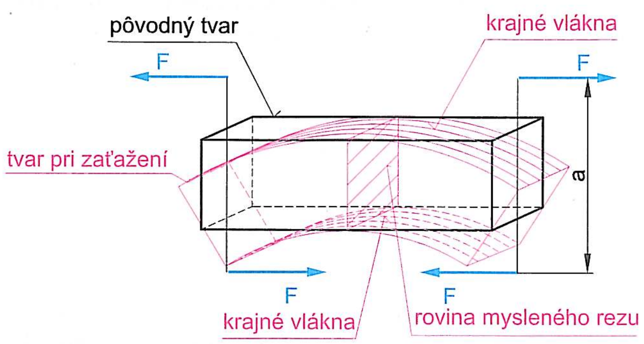
Vzniká vtedy, ak na teleso pôsobia silové dvojice, ktorých roviny prechádzajú osou súmernosti daného prierezu a sú na ne kolmé. Vnútorné sily sa redukujú na silovú dvojicu pôsobiacu v kolmej rovine na rovinu mysleného rezu.

Deformácia

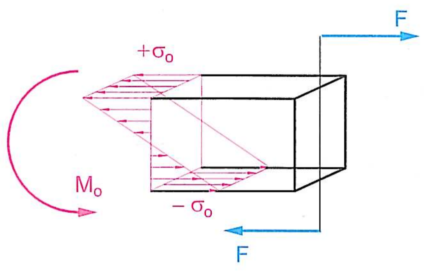
Deformácia je nerovnomerná. Časť telesa sa predlžuje za súčasného skracovania inej časti telesa. Najviac deformované sú krajné vlákna. Medzi týmito časťami je vrstva, ktorá sa nedeformuje a nazýva sa neutrálna vrstva.

Napätie

Vznikajú normálové napätia. V jednej časti ťahové a v druhej časti tlakové.



$$\sigma_0 = \frac{M_0}{W_0} \quad [\text{MPa}]$$



Obr. 2.10

2.4.4 Namáhanie krútením

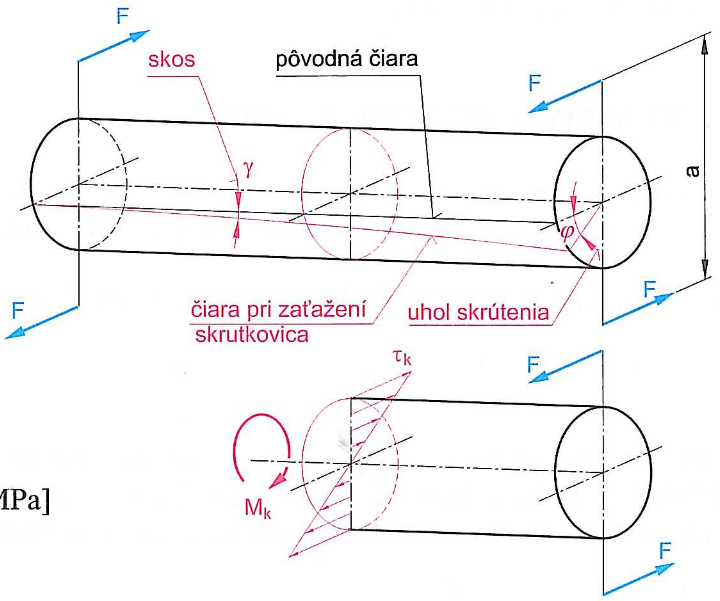
Vzniká vtedy, ak na teleso pôsobia silové dvojice, ktorých roviny sú kolmé na os súmernosti prierezu. Vnútorné sily sa redukujú na dvojicu síl ležiacu v rovine prierezu.

Deformácia

Deformácia je nerovnomerne rozložená po priereze. Dochádza k natáčaniu vrstiev oproti sebe. Uhol, ktorý vznikne medzi okrajovými prierezmi deformovaného prúta nazývame uhol skrútenia a uhol stúpania skrutkovice, ktorá vznikne deformáciou povrchovej priamky nedeformovaného prúta sa nazýva skos.

Napätie

Vzniká tangenciálne napätie, ktoré je nerovnomerne rozložené po priereze. Najväčšie je na povrchu prierezu a v osi prúta je nulové.



$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} \quad [\text{MPa}]$$

Obr. 2.11

V bežnej strojárskej praxi sa vyskytujú jednoduché namáhania pomerne málo. Častejšie nastávajú prípady, kedy dochádza ku kombinácii jednotlivých druhov namáhaní, napr. ťah a ohyb, strih a ohyb, ohyb a krútenie a podobne.

2.5 RIEŠENIE ÚLOH PRUŽNOSTI A PEVNOSTI

Pri riešení úloh pružnosti a pevnosti sa najčastejšie používa takýto postup:

1. Teleso uvoľníme – väzby nahradíme väzbovými silami a vyrátame ich.
2. V mieste, ktoré chceme riešiť vedieme myslený rez.
3. Necháme si jednu, pokiaľ možno jednoduchšiu časť.
4. Nahradíme pôsobenie odstránenej časti vnútornými silami (vypočítame veľkosť napätí v tomto mieste).
5. Riešime zmenu tvaru – deformáciu.
6. Použitím fyzikálnych zákonov vyjadríme závislosť medzi silami a deformáciou s ohľadom na materiál telesa.
7. Určíme účinky, ktoré vyvolávajú na zaťažené telesá vonkajšie a vnútorné sily, prípadne momenty vonkajších a vnútorných síl.

Zhrnutie:

Poznáme štyri základné druhy namáhania: ťah – tlak, strih, ohyb a krútenie. V praxi sú súčiastky iba zriedkavo namáhané jedným druhom namáhania. Oveľa častejšie ide o kombinácie jednotlivých druhov namáhaní.

MECHANIKA

3 NAMÁHANIE ŤAHOM A TLAKOM

3.1 ZÁKLADNÉ POJMY

Namáhanie ťahom (tlakom) vzniká vtedy, ak dve rovnako veľké sily opačnej orientácie, ležiace na spoločnej vektorovej priamke, ktorá prechádza osou tyče, pôsobia pri ťahu von z prierezu a pri tlaku smerom do prierezu. Takto sme definovali namáhanie ťahom v kapitole 2. Zároveň sme povedali, že pri ťahu aj tlaku vzniká v namáhanom priereze normálové napätie, ktoré bráni deformácii a udržuje teleso v celosti. Vzniká pritom deformácia – pri ťahu predĺženie, pri tlaku skrátenie.

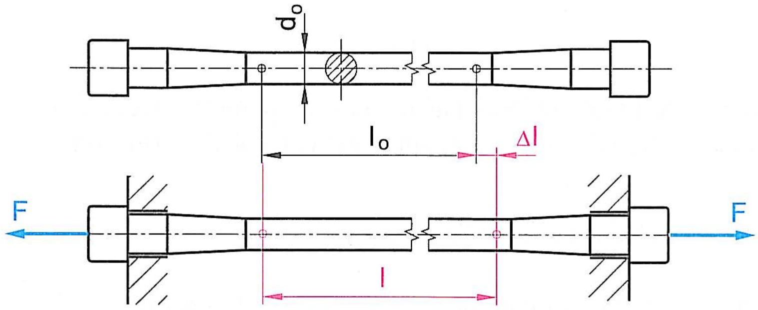
3.2 SKÚŠKA ŤAHOM A TLAKOM – HOOKOV ZÁKON

Pre návrh akejkoľvek súčiastky musíme poznať vlastnosti materiálu, z ktorej bude vyrobená. Pri súčiastkach prenášajúcich zaťaženie potrebujeme pomerne presne poznať aké sú základné číselné hodnoty mechanických vlastností materiálu.

Už v roku 1660 anglický fyzik Robert Hooke na základe štúdie deformácie oceľových pružín formuloval tento zákon:

Pre väčšinu konštrukčných materiálov existuje určitá hranica, po ktorú je deformácia priamoúmerná zaťaženiu, ktoré túto deformáciu spôsobilo.

Základné vlastnosti materiálu sa zisťujú statickou skúškou materiálu na trhacom stroji. Na tento účel sa zo skúšaného materiálu vyrobí skúšobná tyčka, ktorú postupne, veľmi pomaly, takmer staticky zaťažujeme. Pri skúške zisťujeme grafickú závislosť medzi zaťažením F a celkovým predĺžením Δl skúšobnej tyčky.

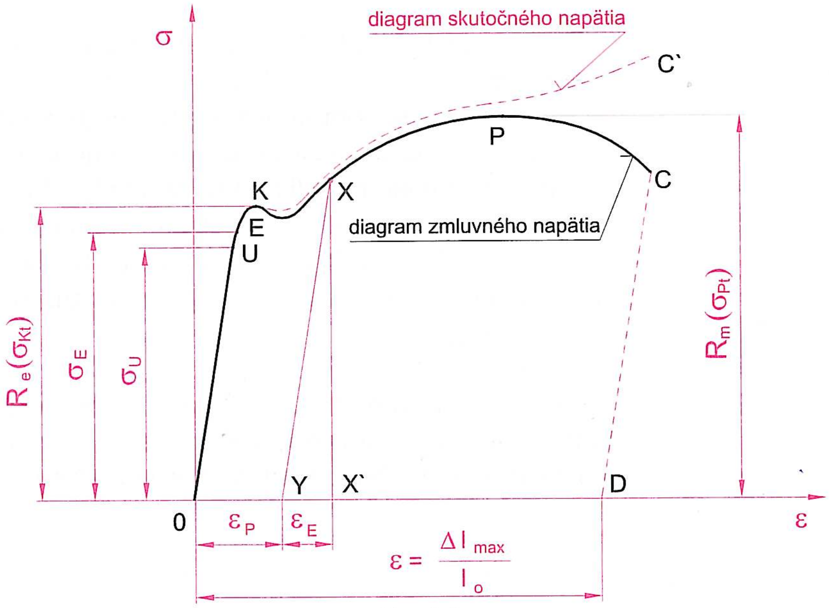


Obr. 3.1

Skúšobná tyčka má presné, normou stanovené rozmery. Normalizovaných skúšobných tyčiek je však niekoľko druhov, ktoré sa od seba líšia nielen rozmermi, ale aj tvarom. Preto namerané hodnoty platia iba pre danú skúšobnú tyčku. Aby sa mohli hodnoty získané meraním porovnávať, prekreslíme diagram tak, že namiesto zaťažujúcej sily vynesieme zmluvné napätie vypočítané ako podiel zaťažujúcej sily a pôvodného prierezu

$$\sigma = \frac{F}{S_0}$$

a namiesto celkového predĺženia pomerné predĺženie ε. Takto získané hodnoty sú hľadanými číselnými hodnotami mechanických vlastností materiálu. Závislosť medzi napätím a predĺžením prebieha priamočiaro z bodu O až do bodu U. V tejto oblasti platí Hookov zákon a napätie dané bodom U nazývame napätím na medzi úmernosti σ_U. Ak by sme v ľubovoľnom mieste v rozmedzí od bodu O do U odľahčili skúšobnú tyčku, zmrštila by sa na pôvodnú dĺžku. Presné zistenie medze úmernosti je veľmi obtiažne a bez moderných trhacích strojov s počítačovým vyhodnocovaním nameraných hodnôt je to prakticky nemožné. Častejšie sa zisťuje napätie na medzi pružnosti σ_E, ktoré je v diagrame vyznačené ako bod E. Pri dosiahnutí tejto medze nastáva trvalá deformácia tyčky v hodnote 0,005 % pôvodnej dĺžky. Po túto medzu sa materiál prakticky pružne deformuje. Preto sa v praxi často medza úmernosti a medza pružnosti stotožňuje.



Obr. 3.2

Ďalším zaťažovaním pomerné predĺženie rastie rýchlejšie ako napätie a závislosť je zobrazená krivkou. Ak dosiahneme bod K – napätie na medzi klzu, začne sa tyčka rýchlo predlžovať pričom sa napätie nezvyšuje, naopak, často poklesne. Pri tyčkách z *húževnatého materiálu* sa dá napätie na medzi klzu zistiť veľmi presne a je východiskovou hodnotou pre pevnostné výpočty. Pri ďalšom zvyšovaní napätia rastie pomerné predĺženie dosť rýchlo až do bodu P, ktorému odpovedá napätie na medzi pevnosti. Je to najväčšia hodnota zmluvného napätia. Číselná hodnota tohto napätia je veľmi dôležitá *pre krehké materiály*, ktoré nemajú výraznú medzu klzu a je východiskovou hodnotou pre pevnostné výpočty krehkých materiálov. Po dosiahnutí napätia na medzi pevnosti sa tyčka z húževnatého materiálu začne v jednom mieste silne zužovať, až dôjde k pretrhnutiu, aj keď zmluvné napätie klesá. Skutočné napätie, ktoré sa počíta vzhľadom na skutočný prierez je v najužšom mieste podstatne vyššie a rastie až do pretrhnutia skúšobnej tyčky.

Meraním zistené hodnoty napätia na medzi pevnosti materiálu v ťahu označujeme R_m a napätia na medzi klzu R_e.

Ak odľahčíme skúšobnú tyčku v ľubovoľnom bode za medzou pružnosti, napr. v bode X, odpruženie nastane podľa čiary $\overline{XY}$ rovnobežnej s úsečkou $\overline{OU}$. Úsečka $\overline{X'Y} = \varepsilon_E$ predstavuje pružnú časť a úsečka $\overline{OY} = \varepsilon_P$ plastickú časť pomernej deformácie. Úsečka $\overline{OD} = A$ predstavuje maximálnu hodnotu plastickej časti pomernej deformácie a nazývame ju ťažnosť.

$$A = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Je to bezrozmerné číslo charakterizujúce plastické vlastnosti materiálu. Túto hodnotu zisťujeme na roztrhnutej tyčke tak, že roztrhnutú tyčku spojíme v prípravku a na značkách, ktoré pred zaťažovaním znázorňovali dĺžku tyčky l_0, nameriame hodnotu l po roztrhnutí tyčky. Často sa ťažnosť vyjadruje v percentách. Potom platí:

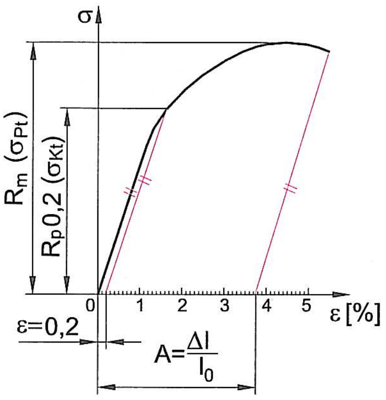
$$A = \frac{l - l_0}{l_0} \cdot 100 \ [\%]$$

Iný spôsob vyjadrenia tvárnych vlastností materiálu je pomocou kontrakcie materiálu alebo pomerným zúžením prierezu. Ak pôvodný prierez skúšobnej tyčky označíme S_0 a najmenší prierez v mieste pretrhnutia tyčky S, potom kontrakciu materiálu vypočítame podľa vzťahu:

$$Z = \frac{S_0 - S}{S_0}$$

Podobne ako ťažnosť je aj hodnota kontrakcie bezrozmerné číslo. Pri vyjadrení v percentách platí:

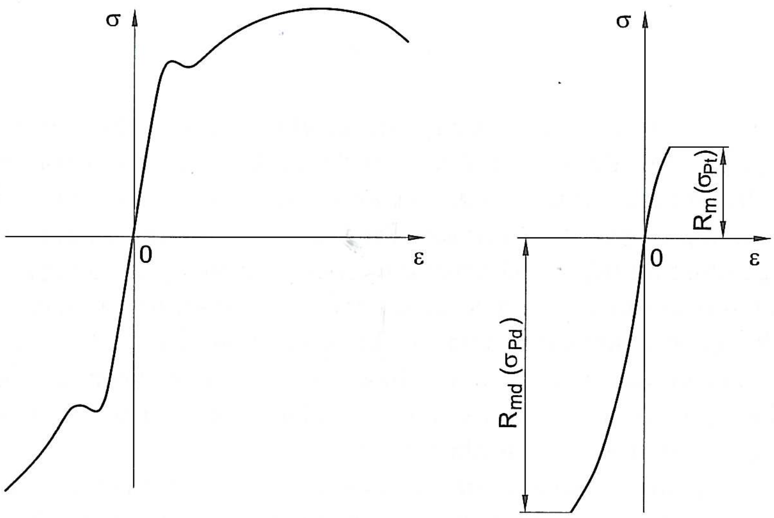
$$Z = \frac{S_0 - S}{S_0} \cdot 100 \; [\%]$$



Obr. 3.3

Ocele s nízkym obsahom uhlíka majú pomerne vysoké hodnoty ťažnosti a kontrakcie. Tiež majú veľmi výraznú medzu klzu. So zvyšujúcim sa obsahom uhlíka v oceli sa zvyšujú hodnoty medze klzu a aj medze pevnosti. Súčasne sa ale znižuje ťažnosť ocele. Pri oceliach s vysokým obsahom uhlíka nie je medza klzu výrazná a nedá sa z trhacieho diagramu odrátať. Pri týchto oceliach sa za medzu klzu pokladá za také napätie, pri ktorom sa dosiahne trvalá deformácia $\varepsilon_K = 0,2$ % z pôvodnej dĺžky. Táto hodnota napätia sa označuje $R_p0,2$ (podľa starého označenia $\sigma_{Kt0,2}$).

Pri skúške ocele na tlak sa stláča skúšobný valček. Ten sa deformuje do tvaru súdka. Je to preto, lebo medzi rovinami lisu a valčeka vzniká veľké trenie, ktoré bráni v tomto mieste rozšíreniu materiálu.



Obr. 3.4

Diagram tlakovej skúšky je po medzu klzu takmer identický s diagramom pre skúšku ťahom. Za medzou klzu má odlišný charakter, pretože húževnaté materiály sa dajú často stláčať bez porušenia súdržnosti a stláčanie prebieha pomalšie ako pri skúške ťahom. Preto krivka nemusí mať v tlakovej oblasti koncový bod. Medza pevnosti v tlaku sa dá zistiť iba pre krehké materiály, kedy dochádza k porušeniu súdržnosti materiálu. Odlišný je diagram ťahovej a tlakovej skúšky pri liatine. Liatina nemá medzu úmernosti, medzu pružnosti ani medzu klzu. Má podstatne vyššiu medzu pevnosti v tlaku ako v ťahu, a to až 3 ÷ 4-násobnú.

Zhrnutie:

Základné mechanické hodnoty materiálov sa zisťujú statickou skúškou ťahom (tlakom). Základné hodnoty mechanických vlastností materiálov sú:

a) medza úmernosti σ_U,
b) medza pružnosti σ_E,
c) medza klzu R_e, $R_p0,2$,
d) medza pevnosti R_m,
e) ťažnosť A,
f) kontrakcia Z.

Diagram pri skúške tlakom je takmer rovnaký po medzu klzu. Medza pevnosti v tlaku sa dá zistiť iba pre krehké materiály. Liatina má odlišný tvar ťahovej a tlakovej časti diagramu. Dosahuje oveľa vyššie hodnoty medze pevnosti v tlaku ako v ťahu.

KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Ako sa zisťujú základné hodnoty mechanických vlastností materiálu?
2. Aké sú významné body na trhacom diagrame?
3. Prečo nepoužívame diagram $F - \Delta l$ ale $\sigma - \varepsilon$.
4. Aký je rozdiel medzi medzou úmernosti a medzou pružnosti?
5. Ako sa zisťuje ťažnosť materiálu?
6. Ako sa zisťuje kontrakcia materiálu?
7. Ako sa zisťuje číselná hodnota napätia na medzi klzu pri materiáloch s nevýraznou medzou klzu?
8. Ako sa odlišuje zmluvný diagram od skutočného diagramu?
9. Pri ktorých materiáloch má význam robiť skúšku materiálu na tlak a ako sa robí?
10. Aký je priebeh skúšky ťahom a tlakom pre ocele a aký pre liatinu?
11. Ktoré hodnoty sú podkladom pre pevnostné výpočty pri húževnatých a vysokopevných materiáloch?

3.2.1 Hookov zákon

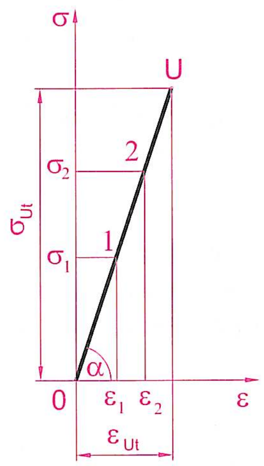
Už sme hovorili, že materiál sa deformuje priamoúmerne so zaťažením po medzu úmernosti. Po bod U platí takáto matematická závislosť:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma_U}{\varepsilon_U} = \text{konšt.} = E$$

teda

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = E \qquad \text{alebo} \qquad \sigma = \varepsilon \cdot E$$

Toto je matematické vyjadrenie Hookovho zákona – základného zákona pružnosti a pevnosti. Konštanta E sa nazýva modul pružnosti v ťahu a je základnou materiálovou konštantou v oblasti pružnej deformácie. Jednotkou pre modul pružnosti je MPa. Pre oceľ sú hodnoty $E = (1{,}7 \div 2{,}15).10^5$ MPa. Tieto hodnoty platia až do 100 °C. Potom prudko klesajú.



Obr. 3.5

Z Hookovho zákona vyplýva, že pre podiel:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = 1 \qquad \text{platí} \qquad E = \sigma$$

to znamená, že modul pružnosti je vlastne také napätie, ktoré by spôsobilo predĺženie materiálu na dvojnásobnú dĺžku. Toto môže nastať napr. pri gume, ktorá má veľmi malý modul pružnosti $E = (2 \div 10)$ MPa.

Dosaďme do Hookovho zákona

$$\text{za} \quad \sigma = \frac{F}{S_0} \qquad \text{a za} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

potom

$$\frac{F}{S_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot E$$

z toho

$$\Delta l = \frac{F \cdot l_0}{E \cdot S_0}$$

Odvodený výraz nazývame deformačná podmienka pre ťah. Z uvedeného vzťahu vyplýva, že predĺženie Δl je priamoúmerné so zaťažujúcou silou F a dĺžkou l_0 a nepriamoúmerné s prierezom S_0 a modulom pružnosti E. Súčin $E \cdot S_0$ sa nazýva tuhosťou v ťahu. Ak teraz vyjadríme pomerné predĺženie, dostaneme vzťah:

$$\varepsilon = \frac{F}{E \cdot S_0}$$

Pri pohľade na uvedený vzťah môžeme konštatovať, že pomerné predĺženie je podielom charakteristickej hodnoty zaťaženia a tuhosti v ťahu.

Ešte si treba všimnúť túto závislosť:

Celkové predĺženie je nepriamoúmerné s modulom pružnosti v ťahu E. To znamená, že čím bude väčší modul pružnosti, tým menšie bude predĺženie. Ak si však uvedomíme, že modul pružnosti sa pre rôzne druhy ocelí mení iba veľmi málo (je takmer konštantný), vyplýva z toho záver, že:

Deformáciu nie je možné podstatne ovplyvniť kvalitou daného materiálu.

Deformácia je prakticky rovnaká pre najkvalitnejšie aj podradné ocele. Na zníženie deformácie treba ovplyvniť druhý člen tuhosti v ťahu – zväčšiť prierezové rozmery.

PRÍKLAD

Vyrátajte o koľko sa predĺži oceľová tyč s priemerom $d = 10$ mm a dĺžkou $l_0 = 1$ m, ak ju zaťažíme silou $F = 1$ kN.

Výpočet:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l_0}{E \cdot S_0}$$

$$\Delta l = \frac{4 \cdot F \cdot l_0}{\pi \cdot E \cdot d_0^2}$$

$$\Delta l = \frac{4 \cdot 1000 \cdot 1000}{\pi \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 10^2}$$

$$\Delta l = 0{,}0606 \text{ mm}$$

Tyč sa predĺži o 0,0606 mm.

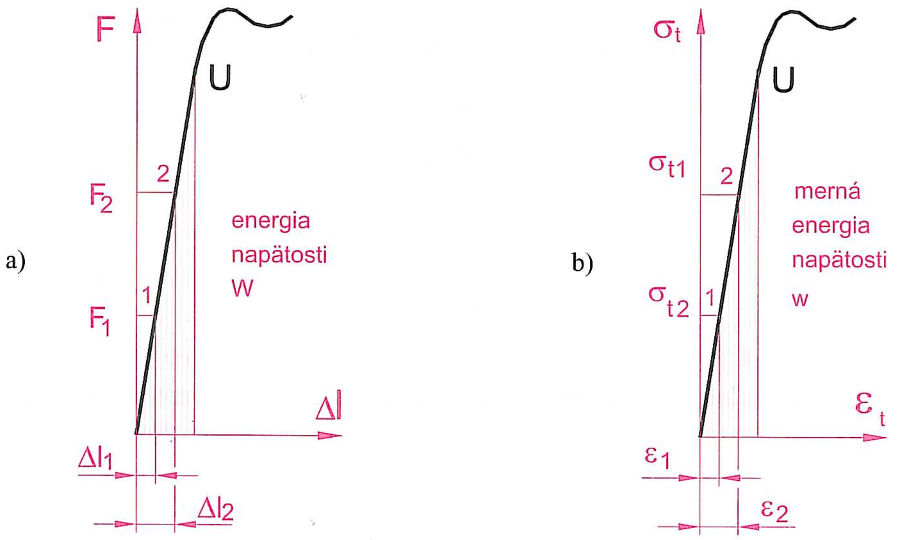
Pri predlžovaní (skracovaní) telesa namáhaného ťahom (tlakom) v medziach platnosti Hookovho zákona sa vykoná pretvárna – deformačná práca A, ktorá je znázornená plochou vyšrafovaného trojuholníka *(obr. 3.6 a)* v diagrame $F - \Delta l$. Touto prácou získava teleso energiu napätosti W, ktorá je daná vzťahom:

$$W = A = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l \quad \text{[Nmm]}$$

Aby sme mohli porovnávať energie pre rôzne telesá, vyjadrujeme energiu napätosti vzhľadom na objem telesa. Nazývame ju merná energia napätosti w a je znázornená v diagrame $\sigma_P - \varepsilon_t$ plochou vyšrafovaného trojuholníka *(obr. 3.6 b)*, z ktorého vyplýva:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \sigma_{t(d)} \cdot \varepsilon_{t(d)} = \frac{1}{2} \sigma_{t(d)} \frac{\sigma_{t(d)}}{E} = \frac{\sigma_{t(d)}^2}{2E}$$

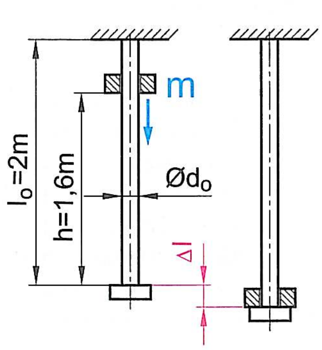
Tieto poznatky sa využívajú pri výpočte telies namáhaných rázom.



Obr. 3.6

PRÍKLAD

Vypočítajte priemer zvislej oceľovej tyče d_0 dĺžky $l_0 = 2$ m, upnutej na hornom konci, namáhanej rázom telesa $m = 3$ kg pri páde z výšky $h = 1{,}6$ m na narážku, ak je dané maximálne možné napätie $\sigma_t = 150$ MPa.



Obr. 3.7

Výpočet:

Energia rázu:

$$A = m \cdot g \cdot h$$
$$A = 3 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}6 = 47{,}1 \text{ Nm}$$

Energia napätosti:

$$W = w \cdot V$$
$$V = \frac{\pi \cdot d_0^2}{4} \cdot l_0$$
$$w = \frac{\sigma_t^2}{2E}$$

Pri porovnaní energie rázu a energie napätosti dostaneme:

$$A = W = w \cdot V$$
$$A = \frac{\sigma_t^2}{2 \cdot E} \cdot \frac{\pi \cdot d_0^2}{4} \cdot l_0$$

a z toho priemer:

$$d_0 = \sqrt{\frac{8 \cdot E \cdot A}{\pi \cdot \sigma_t^2 \cdot l_0}}$$

Ak chceme, aby hodnota priemeru d_0 vyšla v milimetroch, musíme dosadiť E [MPa], A [Nmm], σ_t [MPa], l_0 [mm].

$$d_0 = \sqrt{\frac{8 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 47\,100}{\pi \cdot 150^2 \cdot 2\,000}}$$
$$d_0 = 23{,}66 \text{ mm}$$

Zhrnutie:

Hookov zákon $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ je základným zákonom pružnosti a pevnosti. V medziach platnosti tohto zákona platia základné podmienky pevnosti. Platí pre väčšinu kovových materiálov. Neplatí napr. pre liatinu.

Pri predlžovaní telesa v medziach platnosti Hookovho zákona teleso získava energiu napätosti – W, ktorú vzhľadom na objem telesa nazývame mernou energiou napätosti – w.

ROBERT HOOKE (1635–1703) anglický fyzik a prírodovedec. Od 1665 profesor geometrie v Gresham College v Londýne. Najvýznamnejšie bolo jeho zistenie (Hookov zákon), že deformácia pružného telesa je priamoúmerná sile, ktorá ju spôsobila. Tento zákon je základom teórie pružnosti a pevnosti látok. Spolu s Huygensom zistil teplotu varu a topenia látok. Navrhol prijať za nulový bod teplotnej stupnice teplotu topenia ľadu. Skonštruoval zložitý mikroskop, ktorým pozoroval bunkovú štruktúru rastlinných a živočíšnych tkanív. Pripisuje sa mu objav buniek. S jeho menom sa spája prvé dôkladné štúdium farieb tenkých vrstiev, čo vysvetľoval vlnovou teóriou svetla. Zaoberal sa štúdiom zemskej príťažlivosti a predpokladal, že gravitácia je podobná magnetickej alebo elektrickej sile. Vynašiel a zdokonalil mnohé fyzikálne prístroje. Bol aj architektom a podľa jeho projektov postavili v Londýne mnoho stavieb.

KONTROLNÉ OTÁZKY:

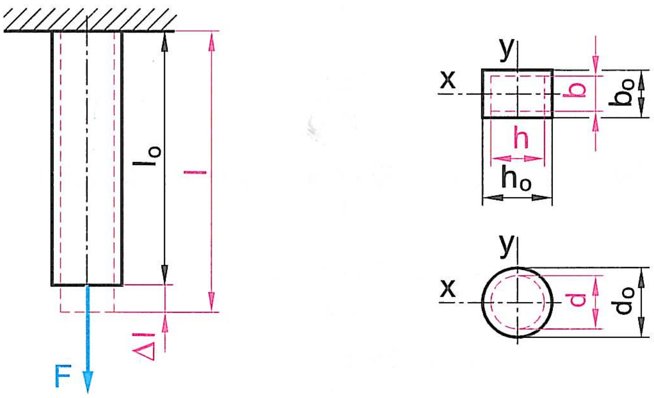
1. Uveďte definíciu Hookovho zákona a jeho matematické vyjadrenie.
2. Čo je to modul pružnosti v ťahu a akú hodnotu má pre oceľ?
3. Aká je deformačná podmienka pre ťah?
4. Čo je to tuhosť v ťahu?
5. Ako vplýva kvalita materiálu na predĺženie tyče?
6. Ako sa dá znázorniť deformačná práca a merná energia napätosti?
7. Ako sa vypočíta energia napätosti telesa?

3.3 POMERNÁ ZMENA DĹŽKY A PRIEREZOVÝCH ROZMEROV – POISSONOVA KONŠTANTA

Tyč s obdĺžnikovým alebo kruhovým prierezom sa pri namáhaní ťahom (tlakom) v medziach platnosti Hookovho zákona predlžuje (skracuje). V určitom pomere sa menia aj prierezové rozmery tak, že výsledný prierez zostáva geometricky podobný pôvodnému prierezu.

Ak označíme pomernú zmenu prierezových rozmerov v smere osi x ε_{tx} a v smere osi y ε_{ty}, potom pre obdĺžnikový prierez platí:

$$\varepsilon_{tx} = \varepsilon_{ty} = \frac{h_0 - h}{h_0} = \frac{b_0 - b}{b_0}$$



Obr. 3.8

a pre kruhový prierez:

$$\varepsilon_{tx} = \varepsilon_{ty} = \frac{d_0 - d}{d_0}$$

Pritom pomerná zmena dĺžky oboch tyčí je:

$$\varepsilon_t = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Pomer pomernej zmeny prierezových rozmerov a pomernej zmeny dĺžky tyče je pre každý materiál, pre ktorý platí Hookov zákon stály a nazýva sa Poissonovo číslo, označuje sa μ.

$$\frac{\varepsilon_{tx}}{\varepsilon_t} = \frac{\varepsilon_{ty}}{\varepsilon_t} = \mu$$

Poissonovo číslo je bezrozmerné a určuje, koľkokrát je pomerná zmena prierezových rozmerov menšia než pomerná zmena dĺžky tyče. Prevrátená hodnota Poissonovho čísla:

$$m = \frac{1}{\mu}$$

sa nazýva Poissonova konštanta. Pre niektoré vybrané materiály hodnoty modulov pružnosti v ťahu E a Poissonovho čísla μ sú uvedené v *tab. 3.1*. Modul pružnosti v ťahu E a Poissonovo číslo μ jednoznačne charakterizujú deformačné vlastnosti materiálu v pružnej oblasti.

Tabuľka 3.1

MATERIÁL	E [MPa]	μ
Oceľ	210 000	0,30
Sivá liatina	105 000	0,25
Meď	118 000	0,35
Bronz	108 000	0,35
Mosadz	98 000	0,35
Hliník a jeho zliatiny	68 600	0,33
Horčíkové zliatiny	34 300	0,30
Zinok	83 400	0,27
Olovo	16 700	0,45
Sklo	58 800	0,23
Polystyrén	3 340	0,35
Bakelit	49 000	0,25
Celuloid	3 920	0,35
Guma	2 až 8	0,49
Drevo (v smere vlákien)	12 000	–
Drevo (naprieč vláknami)	2 700	–
Organické sklo	2 100	0,35
Betón	18 000	0,13

PRÍKLAD

Oceľový čap s priemerom $d_0 = 60$ mm a dĺžkou $l_0 = 110$ mm sa stláča silou $F = 280$ kN. Vypočítajte dĺžku l a priemer d pri stláčaní.

Riešenie:

Z Hookovho zákona platí:

$$\varepsilon_d = \frac{\sigma_d}{E} = \frac{F}{E \cdot S_0} = \frac{4 \cdot F}{E \cdot \pi \cdot S_0}$$

$$\varepsilon_d = \frac{4 \cdot 280\,000}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 60^2} = 0{,}000\,47$$

Celková zmena dĺžky:

$$\Delta l = \varepsilon_d \cdot l_0$$

$$\Delta l = 0{,}000\,47 \cdot 110 = 0{,}0518 \quad \text{mm}$$

Dĺžka tyče pri stlačení:

$$l = l_0 - \Delta l$$

$$l = 110 - 0{,}0518 = 109{,}948 \quad \text{mm}$$

Zmena priemeru:

$$\Delta d = \varepsilon_{dx} \cdot d_0 = \varepsilon_d \cdot \mu \cdot d_0$$

$$\Delta d = 0{,}000\,47 \cdot 0{,}3 \cdot 60 = 0{,}008\,46 \quad \text{mm}$$

Priemer d pri stláčaní:

$$d = d_0 + \Delta d$$

$$d = 60 + 0{,}008\,46 = 60{,}008\,46 \quad \text{mm}$$

3.4 DOVOLENÉ NAPÄTIE V ŤAHU A TLAKU, MIERA BEZPEČNOSTI

Pri návrhu rozmerov súčiastky chceme, aby súčiastka preniesla bezpečne a bez trvalých deformácií požadované zaťaženie. To znamená, že môžeme pripustiť iba určitú veľkosť napätia – dovolené napätie. Dovolené napätie nesmie prekročiť medzu úmernosti σ_U. Pretože určenie medze úmernosti je veľmi náročné, dovolené napätie sa určuje:

a) z medze klzu R_e; $R_p0{,}2$; (σ_K – v staršej literatúre); R_{ek}; (τ_K – v staršej literatúre) pre tvárne materiály,
b) z medze pevnosti R_m; (σ_P – v staršej literatúre); R_{ms}; R_{mk}; (τ_{Ps} – v staršej literatúre) pre krehké materiály.

Dovolené napätie sa označuje σ_D (τ_D) a podľa druhu namáhania sa pridáva značka:
σ_{Dt} – dovolené napätie v ťahu,
σ_{Dd} – dovolené napätie v tlaku,
σ_{Do} – dovolené napätie v ohybe,
τ_{Ds} – dovolené napätie v šmyku,
τ_{Dk} – dovolené napätie v krútení.

Veľkosť dovoleného napätia vypočítame zo vzťahu:

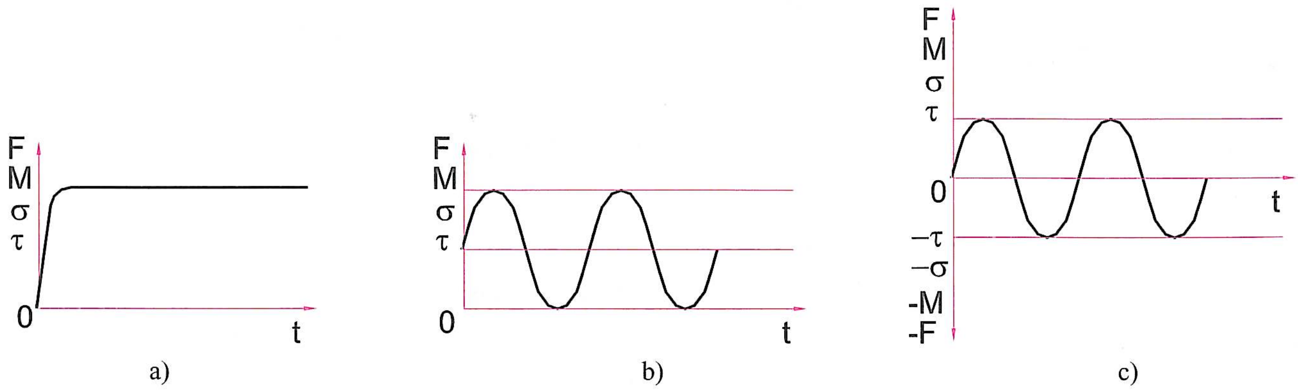
$$\sigma_D = \frac{R_e}{k} \quad \text{alebo} \quad \tau_{Ds} = \frac{R_{es}}{k};\ \tau_{Dk} = \frac{R_{ek}}{k} \quad \text{pre tvárne – húževnaté materiály,}$$

$$\sigma_D = \frac{R_m}{k} \quad \text{alebo} \quad \tau_{Ds} = \frac{R_{ms}}{k};\ \tau_{Dk} = \frac{R_{mk}}{k} \quad \text{pre krehké materiály,}$$

kde k je **miera bezpečnosti**. Určuje koľkokrát je dovolené napätie menšie ako medza klzu, prípadne medza pevnosti. Miera bezpečnosti sa volí:

$k = 1{,}7 \div 2{,}0$ pre tvárne ocele (vzhľadom na R_e; $R_p0{,}2$)
$k = 2{,}5 \div 4{,}0$ krehké ocele (vzhľadom na R_m)
$k = 4{,}0 \div 10$ pre liatinu (vzhľadom na R_{md})
$k = 8{,}0 \div 10$ pre hliník a jeho zliatiny (vzhľadom na R_e)
$k = 6{,}0 \div 12$ pre drevo (vzhľadom na R_o)
$k = 4{,}0 \div 8{,}0$ pre betón (vzhľadom na R_{md})

Takto vypočítané hodnoty platia iba pre súčiastky, ktoré sú zaťažené pokojne – staticky. V strojoch a zariadeniach však väčšina súčiastok je namáhaná tak, že zaťaženie sa mení s časom. Pre tieto súčiastky je hodnota dovoleného napätia menšia. Presnejší spôsob kontroly takto zaťažovaných súčiastok vysvetlíme v kapitole 11 Cyklické namáhanie, únava kovov a tvarová pevnosť. Pre bežné výpočty si rozdelíme spôsoby zaťaženia na 3 skupiny:



Obr. 3.9

1. Statické zaťaženie – sila, moment a teda aj napätie sú konštantné *(obr. 3.9 a)*,
2. Miznúce zaťaženie – sila alebo moment sa mení od 0 po maximum *(obr. 3.9 b)*,
3. Striedavé zaťaženie – sila alebo moment sa mení od záporného po kladné maximum *(obr. 3.9 c)*.

Dovolené napätie pre iný ako statický spôsob namáhania vyrátame tak, že dovolené napätie násobíme súčiniteľom, ktorý je závislý od druhu materiálu a spôsobu zaťaženia takto:

$$\sigma_{D,II} = c_{II} \cdot \sigma_D$$
$$\sigma_{D,III} = c_{III} \cdot \sigma_D$$

kde σ_D – dovolené napätie pre statické zaťaženie,
$\sigma_{D,II}$ – dovolené napätie pre miznúce zaťaženie,
$\sigma_{D,III}$ – dovolené napätie pre striedavé zaťaženie,
c_{II} – súčiniteľ zníženia dovoleného napätia pre miznúci spôsob zaťaženia,
c_{III} – súčiniteľ zníženia dovoleného napätia pre striedavý spôsob zaťaženia.

Súčinitele c_{II} a c_{III} nájdeme v strojníckych tabuľkách. Tiež tu nájdeme dovolené napätia podľa jednotlivých spôsobov zaťaženia pre vybrané druhy materiálov.

Zhrnutie:

Pre výpočet strojových súčiastok potrebujeme poznať hodnoty dovolených napätí σ_D (τ_D). Dovolené napätie sa vypočíta:

$\sigma_D = \frac{R_e}{k}$ *alebo* $\tau_{Ds} = \frac{R_{es}}{k}$; $\tau_{Dk} = \frac{R_{ek}}{k}$ *pre tvárne – húževnaté materiály*

$\sigma_D = \frac{R_m}{k}$ *alebo* $\tau_{Ds} = \frac{R_{ms}}{k}$; $\tau_{Dk} = \frac{R_{mk}}{k}$ *pre krehké materiály*

Okrem statického spôsobu rozoznávame miznúci a striedavý spôsob zaťaženia. Pre iný ako statický spôsob zaťaženia násobíme vypočítané dovolené napätie súčiniteľom zníženia dovoleného napätia c_{II} (c_{III}).

KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Aká je závislosť medzi pomerným predĺžením a pomerným zúžením?
2. Čo predstavuje Poissonovo číslo?
3. Vysvetlite pojem dovoleného napätia.
4. Aké hodnoty napätí z diagramu $\sigma - \varepsilon$ sú základom na určenie dovolených napätí?
5. Ako vyrátame dovolené napätia pre iný ako statický spôsob namáhania?

3.5 SPÔSOBY VÝPOČTU A KONTROLY SÚČIASTOK NAMÁHANÝCH ŤAHOM ALEBO TLAKOM

Pri výpočte a kontrole súčiastok sa stretávame s tromi formami výpočtu:

1. *Kontrolný výpočet* – poznáme zaťažujúcu silu, prierez a kontrolujeme, či skutočné napätie v súčiastke neprekročilo dovolené napätie.
2. *Návrhový výpočet* – poznáme veľkosť zaťažujúcej sily a dovoleného napätia a vypočítame minimálny prierez. Tomuto spôsobu navrhovania rozmerov hovoríme dimenzovanie.
3. *Výpočet únosnosti* – poznáme prierez a dovolené napätie a rátame, akú maximálnu silu súčiastka unesie.

Dovolené napätie býva najčastejšie dané značkou materiálu. Pri výpočte sa vychádza zo základnej pevnostnej nerovnice, ktorá je vo všeobecnom tvare daná:

skutočné napätie ≤ dovolené napätie

$$\sigma_{(t,d)} \leq \sigma_{D(t,d)}$$

Skutočné napätie vypočítame zo vzťahu:

$$\text{skutočné napätie} = \frac{\text{ťahová (tlaková) sila}}{\text{prierez}}$$

$$\sigma_{(t,d)} = \frac{F}{S}$$

Spojením obidvoch vzťahov dostaneme *pevnostnú nerovnicu* pre namáhanie ťahom alebo tlakom:

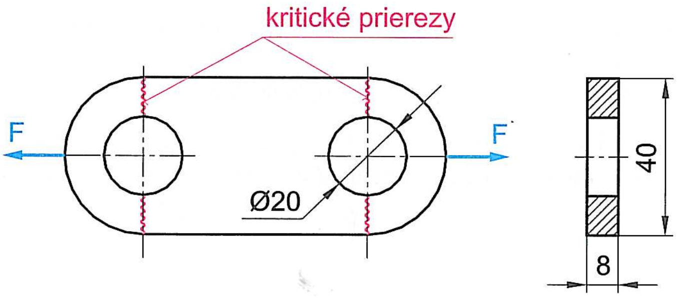
$$\sigma_{(t,d)} = \frac{F}{S} \leq \sigma_{D(t,d)}$$

3.5.1 Kontrolný výpočet

Pri tomto spôsobe výpočtu kontrolujeme, či prevádzkové napätie neprekročí dovolené napätie.

PRÍKLAD

Zistite, či súčiastka z materiálu označeného podľa EN 1027-1 P 265 (pôvodné označenie podľa STN 11 418) podľa *obr. 3.10* zaťažená miznúcou silou F = 10 kN vydrží dané zaťaženie.



Obr. 3.10

Rozbor:

Na riešenie tejto úlohy použijeme pevnostnú nerovnicu:

$$\sigma_{t,II} = \frac{F}{S} \leq \sigma_{Dt,II}$$

Sila je v každom mieste rovnaká a maximálne napätie je v mieste najmenšieho prierezu. Najmenší – kritický prierez je v mieste vyznačenej roviny. Pre dovolené napätie použijeme hodnotu miznúceho zaťaženia.

Výpočet:

$$\sigma_{t,II} = \frac{F}{S} \leq \sigma_{Dt,II}$$

kde $S = (h - d) \cdot b$

$$\sigma_{t,II} = \frac{10\,000}{(40-20)\cdot 8} = 62{,}5 \text{ MPa}$$

Z tabuliek zistíme pre daný materiál hodnotu napätia na medzi klzu R_e = 205 až 255 MPa. Z tejto hodnoty vyrátame hodnotu dovoleného napätia.

$$\sigma_{Dt} = \frac{R_e}{k}$$

Aby sme mali istotu, že súčiastka zaťaženie bezpečne prenesie, berieme nižšiu hodnotu R_e = 205 MPa a mieru bezpečnosti $k = 2$.

$$\sigma_{Dt} = \frac{205}{2} = 102{,}5 \text{ MPa}$$

Dovolené napätie pre miznúci spôsob zaťaženia vyrátame zo vzťahu:

$$\sigma_{Dt,II} = c_{II} \cdot \sigma_{Dt}$$

Pre daný materiál nájdeme v strojníckych tabuľkách súčiniteľ zníženia napätia podľa spôsobu zaťaženia $c_{II} = 0{,}85$.

$$\sigma_{Dt,II} = 0{,}85 \cdot 102{,}5 = 87 \text{ MPa}$$

Pretože platí nasledujúca nerovnosť

$$\sigma_{t,II} = 62{,}5 \text{ MPa} < \sigma_{Dt,II} = 87 \text{ MPa}$$

môžeme konštatovať, že súčiastka pre dané zaťaženie vyhovuje.

3.5.2 Návrhový výpočet

Poznáme veľkosť zaťažujúcej sily a dovoleného napätia a počítame minimálny prierez.

PRÍKLAD

Vypočítajte minimálny a navrhnite normalizovaný U prierez podľa STN 42 5570 z materiálu S235JRG1 podľa EN 1027-1 (pôvodne 11 373) pre prút prútovej konštrukcie, ktorý je zaťažený staticky osovou silou $F = 150$ kN.

Rozbor:

Podobne ako v predchádzajúcom prípade, vychádzame z pevnostnej nerovnice:

$$\sigma_t = \frac{F}{S} \leq \sigma_{Dt}$$

V tomto prípade za maximálne napätie dosadíme dovolené napätie.

Výpočet:

$$\sigma_{Dt} \geq \frac{F}{S_{min}}$$

z toho

$$S_{min} \geq \frac{F}{\sigma_{Dt}}$$

Zo strojníckych tabuliek zistíme $R_e = (200 \div 250)$ MPa. Volíme $R_e = 200$ MPa. Dovolené napätie vyrátame:

$$\sigma_{Dt} = \frac{R_e}{k}$$

Pre húževnatú oceľ je miera bezpečnosti $k = 1{,}7$ až 2.

$$\sigma_{Dt} = \frac{200}{2} = 100 \text{ MPa}$$

$$S_{min} = \frac{150\,000}{100} = 1\,500 \text{ mm}^2$$

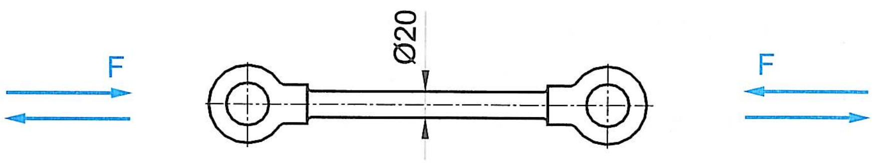
V strojníckych tabuľkách nájdeme najbližší vyšší prierez tyče $S = 1\,700$ mm², ktorý patrí profilu U120.

3.5.3 Výpočet únosnosti

Poznáme prierez a materiál (jeho dovolené napätie) a počítame akú maximálnu silu súčiastka unesie.

PRÍKLAD

Tiahlo na *obr. 3.11* z materiálu pôvodne podľa STN označeného 13 251.8 bude namáhané striedavým namáhaním. Zistite, akou veľkou silou je možné súčiastku zaťažiť, ak $d = 20$ mm.



Obr. 3.11

Rozbor:

Veľkosť sily zistíme z pevnostnej nerovnice. Problém je v tomto prípade v určení dovoleného napätia. Budeme pritom vychádzať z napätia na medzi pevnosti, ktoré vydelíme mierou bezpečnosti $k = 2{,}5 \div 4$. V strojníckych tabuľkách nájdeme pre napätie na medzi pevnosti daného materiálu hodnotu $R_m = (1\,300 \div 1\,500)$ MPa. Súčiniteľ zníženia dovoleného napätia pre striedavý spôsob zaťaženia volíme pre zliatinové ocele $c_{III} = 0{,}45$.

Výpočet:

$$\sigma_{Dt,III} = c_{III} \cdot \sigma_{Dt}$$

$$\sigma_{Dt} = \frac{1\,300}{4} = 325 \ \text{MPa}$$

$$\sigma_{Dt,III} = 0{,}45 \cdot 325 = 146{,}25 \ \text{MPa}$$

Z pevnostnej rovnice

$$\sigma_{Dt,III} \geq \frac{F}{S}$$

vyjadríme silu

$$F \leq S \cdot \sigma_{Dt,III}$$

$$F \leq \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sigma_{Dt,III}$$

$$F \leq \frac{\pi \cdot 20^2}{4} \cdot 146{,}25 = 45\,944 \ \text{N}$$

Pretože sme pri výpočte použili súčinitele, ktoré minimalizujú hodnotu dovoleného napätia, môžeme konštatovať, že maximálne zaťaženie by nemalo prekročiť hodnotu $F = 46$ kN.

Zhrnutie:

Pri výpočte sa stretávame s tromi prípadmi:
1. kontrola napätia,
2. návrhový výpočet,
3. výpočet únosnosti.
Pri výpočtoch vychádzame z pevnostnej nerovnice:

$$\sigma_{t(d)} = \frac{F}{S} \leq \sigma_{Dt(d)}$$

KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Vysvetlite pojem kritického prierezu.
2. Aký je tvar základnej pevnostnej nerovnice?
3. Uveďte tri spôsoby výpočtu súčiastok na ťah.

3.6 NAPÄTIE VZNIKAJÚCE PRI ZMENE TEPLOTY

Súčiastky sú často vystavené pôsobeniu tepla. Z fyziky je známe, že súčiastky sa teplom rozťahujú. Zvlášť, ak zabránime dilatácii súčiastok, musíme rátať s veľkou zmenou napätia vplyvom teplotných zmien. Pre dĺžkovú rozťažnosť platí:

$$\Delta l_t = l_0 \cdot \alpha_t \cdot \Delta T \quad [\mathrm{mm}]$$

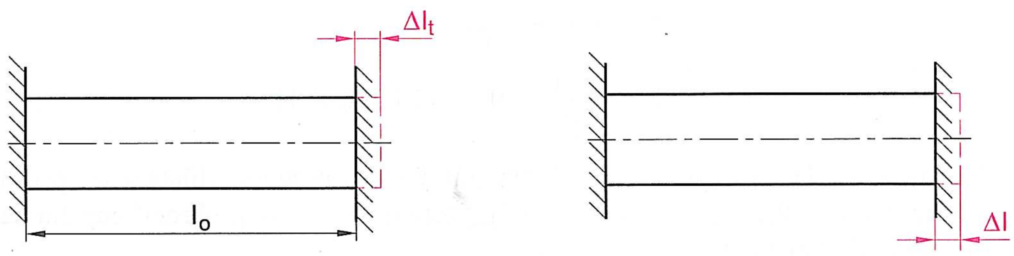
kde:

l_0 – je pôvodná dĺžka súčiastky [mm]
α_t – súčiniteľ dĺžkovej rozťažnosti [K^{-1}]
ΔT – rozdiel teplôt pred a po zmene [K]

Poznámka:

Rozdiel absolútnych teplôt ΔT je rovnaký ako rozdiel celziových stupňov Δt. Preto rozdiely teplôt môžeme rátať v oboch stupniciach, iba jednotky sa uvedú v [K].

Vezmime krátku pružnú tyč a vložme ju bez vôle medzi dve dokonale tuhé dosky. Ak začneme tyč zohrievať, pri určitom rozdiele teplôt by sa zmenila dĺžka tyče o Δl_t. Tuhé dosky však tomu zabránia a v tyči vznikne tlakové napätie, ktoré je rovnako veľké, ako keby sme roztiahnutú tyč stlačili na pôvodnú dĺžku.



Obr. 3.12

Porovnaním obidvoch vzťahov dostaneme:

$$\Delta l_t = \Delta l$$

$$l_0 \cdot \alpha_t \cdot \Delta t = \frac{\sigma \cdot l_0}{E}$$

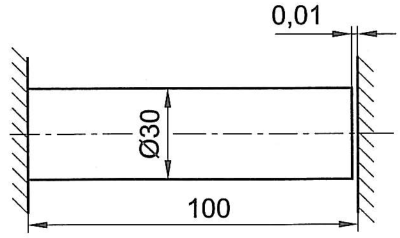
z toho vzniknuté napätie:

$$\sigma = \alpha_t \cdot E \cdot \Delta t$$

Vznikajúce napätie nezávisí od dĺžky súčiastky, ale je závislé od materiálových konštánt E, α_t a od teplotného rozdielu Δt.

PRÍKLAD

Tyč z húževnatej ocele s dĺžkou $l_0 = 100$ mm a priemerom $d_0 = 30$ mm je vložená medzi dve tuhé dosky s vôľou 0,01 mm. Vyrátajte napätie v tyči po jej zahriatí a silu, ktorou bude pôsobiť na dosky, ak ju zohrejeme o 50 °C. Pre výpočet rátajte s $\alpha_t = 1{,}2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$.



Obr. 3.13

Rozbor:

Najskôr sa tyč bude predlžovať o 0,01 mm voľne bez vzniku napätia. Po dotyku s plochami pri ďalšom zvyšovaní teploty vznikne napätie. Preto musíme najskôr zistiť teplotný rozdiel pri roztiahnutí o danú vôľu. Pri dohriatí tyče na požadovanú hodnotu, vznikne v tyči napätie, z ktorého vypočítame silu pôsobiacu v tyči na oporné plochy.

Výpočet:

Teplotný rozdiel $\Delta t'$ pri predĺžení tyče o $\Delta l = 0{,}01$ mm.

$$\Delta l = l_0 \cdot \alpha_t \cdot \Delta t'$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \alpha_t}$$

$$\Delta t' = \frac{0{,}01}{100 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}} = 8{,}3 \text{ °C}$$

Tyč treba ešte zohriať o:

$$\Delta t'' = \Delta t - \Delta t'$$

$$\Delta t'' = 50 - 8{,}3 = 41{,}7 \text{ °C}$$

Napätie, ktoré pri tom vznikne:

$$\sigma = \alpha_t \cdot E \cdot \Delta t$$

$$\sigma = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 41{,}7 = 105{,}1 \text{ MPa}$$

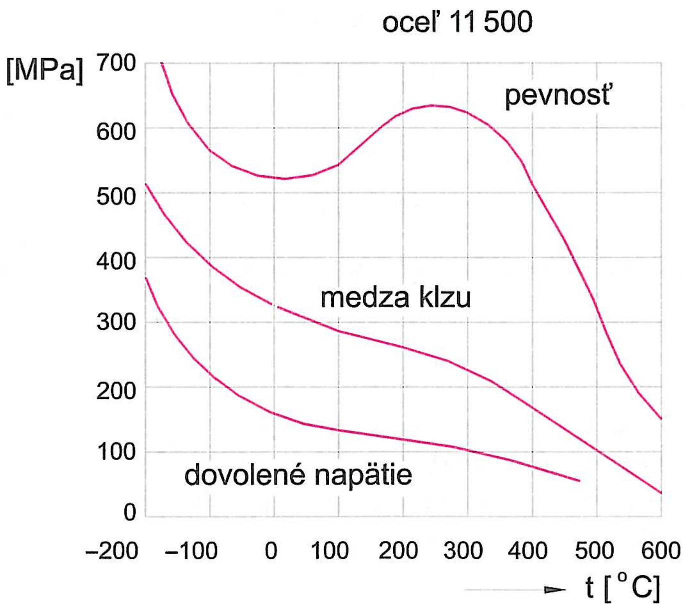
Sila vyvodená zohriatou tyčou:

$$F = S \cdot \sigma = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sigma$$

$$F = \frac{\pi \cdot 30^2}{4} \cdot 105{,}1 = 74\,290{,}8 \text{ N}$$

Aj keď z výpočtu sú výsledky jasné, treba pripomenúť, že ak zabránime dilatácii už pri malých teplotných rozdieloch vznikajú veľmi veľké napätia a tlakové sily, ktoré môžu ľahko prekročiť napätia na medzi klzu, čím dôjde k trvalým deformáciám súčiastky.

Skúškami sa zistilo, že vplyv teploty na mechanické vlastnosti materiálu je pomerne veľký. Ako sa s teplotou menia hodnoty R_m, R_e, σ_{Dt}, pre materiál 11 500 vidno na *obr. 3.14*.



Obr. 3.14

Zhrnutie:

Ak zabránime tepelnej dilatácii materiálu, vznikne v súčiastke pri zohriatí tlakové a pri ochladení ťahové napätie, ktorého veľkosť:

$$\sigma = \alpha_t \cdot E \cdot \Delta t$$

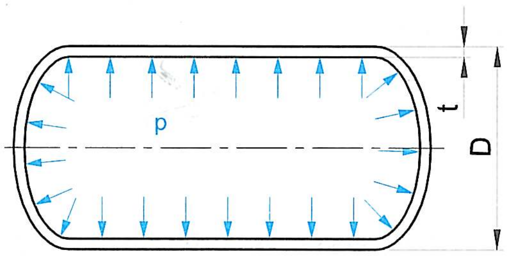
KONTROLNÉ OTÁZKY:

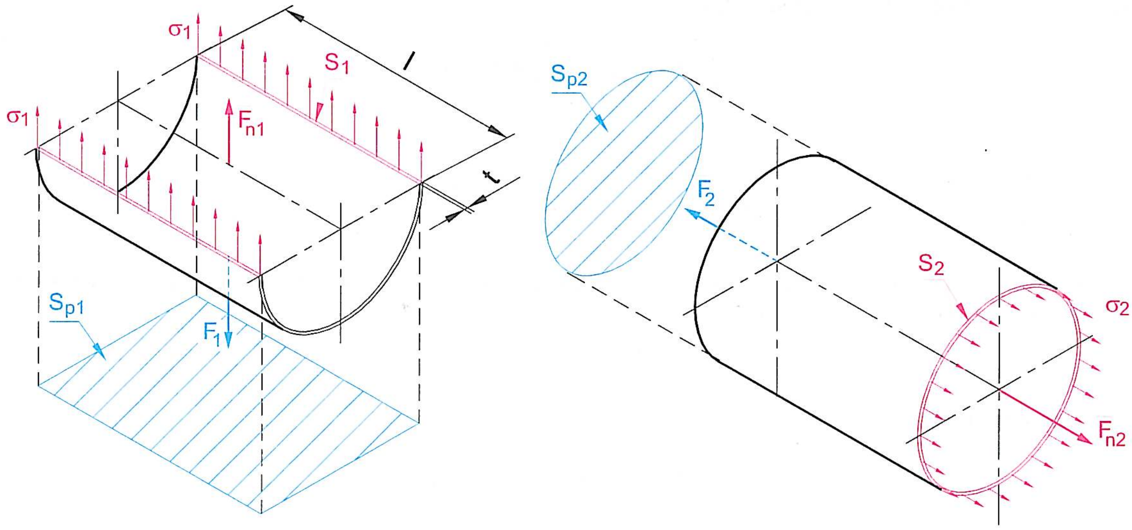
1. Ako vypočítame napätie v súčiastke pri zmene teploty, ak zabránime jej tepelnej dilatácii?
2. Od čoho závisí vznik napätia?
3. Ako v praxi zabraňujeme vzniku napätia z tepla?

3.7 TENKOSTENNÉ NÁDOBY S VNÚTORNÝM PRETLAKOM

Pod pojmom tenkostenné nádoby rozumieme valcové alebo guľové nádoby, ktorých hrúbka steny je vzhľadom na vonkajší priemer malá $\left(t \leq \dfrac{D}{30}\right)$ a pri ktorých môžeme predpokladať, že je napätie rozložené rovnomerne po celej hrúbke steny. V praxi ide o kotle, vzdušníky, potrubia, tlakové plynojemy a pod.

Vnútorný pretlak sa snaží roztrhnúť nádobu v dvoch na seba kolmých smeroch – v pozdĺžnom a priečnom reze.





a) pozdĺžny rez

b) priečny rez

Obr. 3.15

a) Napätie v pozdĺžnom reze

Tlak plynu pôsobí na celú plochu nádoby rovnomerne. Urobme v pozdĺžnom smere myslený rez. Zaveďme podmienky rovnováhy pre výslednicu vonkajších síl F_1 a pre výslednice vnútorných síl pôsobiace v stenách nádoby F_{n1}:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0; \quad F_{n1} - F_1 = 0$$

kde

$$F_1 = S_{p1} \cdot p = l \cdot D \cdot p$$

$$F_{n1} = 2 \cdot S_1 \cdot \sigma_1 = 2 \cdot t \cdot l \cdot \sigma_1$$

pričom:

S_1 – prierezová plocha v pozdĺžnom reze nádoby s dĺžkou l,
S_{p1} – priemet plochy nádoby s dĺžkou l.

Dosadením dostaneme:

$$2 \cdot t \cdot l \cdot \sigma_1 - l \cdot D \cdot p = 0$$

z toho

$$\sigma_1 = \frac{D \cdot p}{2 \cdot t}$$

Musí platiť:

$$\sigma_1 \leq \sigma_{Dt}$$

Potom hrúbka steny v pozdĺžnom reze:

$$t \geq \frac{p \cdot D}{2 \cdot \sigma_{Dt}}$$

b) Napätie v priečnom reze

Ak urobíme myslený rez v priečnom smere, zavedieme podmienky rovnováhy pre výslednicu vonkajších síl F_2 a výslednicu vnútorných síl F_{n2}, dostaneme:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0; \quad -F_2 + F_{n2} = 0$$

kde

$$F_2 = S_{p2} \cdot p$$

$$F_{n2} = S_2 \cdot \sigma_2$$

Plocha S_{p2} je priemet plochy, na ktorú pôsobí tlak p. Plocha S_2 je plocha medzikružia, ktorú môžeme vzhľadom na malú hrúbku steny nádoby vyrátať zo vzťahu:

$$S_2 = \pi \cdot D \cdot t$$

Dosadením dostaneme:

$$-\frac{\pi \cdot D^2}{4} + \pi \cdot D \cdot t \cdot \sigma_2 = 0$$

z toho

$$\sigma_2 = \frac{D \cdot p}{4 \cdot t}$$

V priečnom reze vzniká polovičné napätie oproti napätiu v pozdĺžnom reze. Preto hrúbku steny nádoby musíme počítať z napätia v pozdĺžnom reze. Dĺžka steny nádoby nemá žiadny vplyv na jej hrúbku. Vyrátanú hrúbku musíme o niečo zväčšiť, aby sme zahrnuli vplyv korózie zvarov a pod.

Pri guľových nádobách sú hodnoty napätia rovnaké ako v priečnom reze, a preto hrúbka steny guľovej nádoby je:

$$t \geq \frac{p \cdot D}{4 \cdot \sigma_{Dt}}$$

Preto sa niekedy tlakové nádoby vyrábajú v tvare gule, lebo hrúbka steny je polovičná.

PRÍKLAD

Vypočítajte hrúbku vodovodného potrubia s priemerom $D = 194$ mm z materiálu 11 523 s tlakom vody $p = 7{,}5$ MPa.

Rozbor:

Potrubie je tlaková nádoba s veľkou dĺžkou. Preto hrúbku steny budeme počítať zo vzťahu:

$$t \geq \frac{p \cdot D}{2 \cdot \sigma_{Dt}}$$

Výpočet:

Predpokladáme stály tlak a v tabuľkách nájdeme hodnotu:

$$\sigma_{Dt} = (140 \div 210)\ \text{MPa}$$

Hrúbka steny rúry:

$$t \geq \frac{p \cdot D}{2 \cdot \sigma_{Dt}}$$

$$t \geq \frac{7{,}5 \cdot 194}{2 \cdot 140} = 5{,}2\ \text{mm}$$

Skutočnú hrúbku potrubia navrhneme vzhľadom na možnú koróziu a zvary $t = 8$ mm.

Zhrnutie:

V tenkostenných nádobách vznikajú vplyvom pretlaku v stenách nádoby ťahové napätia v pozdĺžnom a priečnom smere. Pri valcových nádobách je v pozdĺžnom reze napätie dvojnásobné ako napätie v priečnom reze. Pri guľových nádobách odpovedá napätie v ktoromkoľvek reze napätiu v priečnom reze valcovej nádoby.

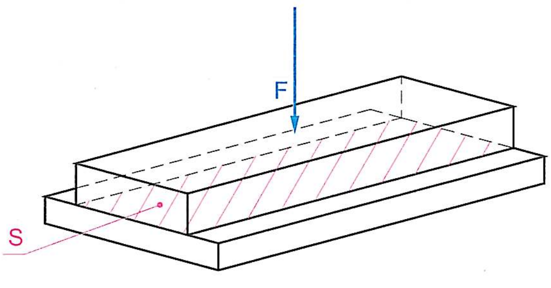
KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Akú nádobu môžeme považovať za tenkostennú?
2. Aké napätia vzniknú v pozdĺžnom a priečnom reze valcovej nádoby?
3. Prečo sa často ako tlaková nádoba volí nádoba guľového tvaru?
4. Ako vypočítame hrúbku steny potrubia?

4 TLAK NA STYKOVÝCH PLOCHÁCH

V praxi sa často stretávame s tým, že dve súčiastky, ktoré sú funkčne spojené, navzájom na seba pôsobia – tlačia. Pri svojom styku sa môžu alebo nemusia navzájom pohybovať. V týchto prípadoch treba zistiť, či tlak na stykových plochách nepresahuje dovolené hodnoty. Stykové plochy môžu byť pritom rovinné alebo zakrivené. Nebudeme sa zaoberať stykom priamkovým (napr. valec a rovina) alebo bodovým (napr. styk gule s rovinou), pretože tieto sú opísané príliš zložitými vzťahmi.

4.1 TLAK MEDZI ROVINNÝMI STYKOVÝMI PLOCHAMI



Obr. 4.1

4.1.1 Sila pôsobí kolmo na plochu

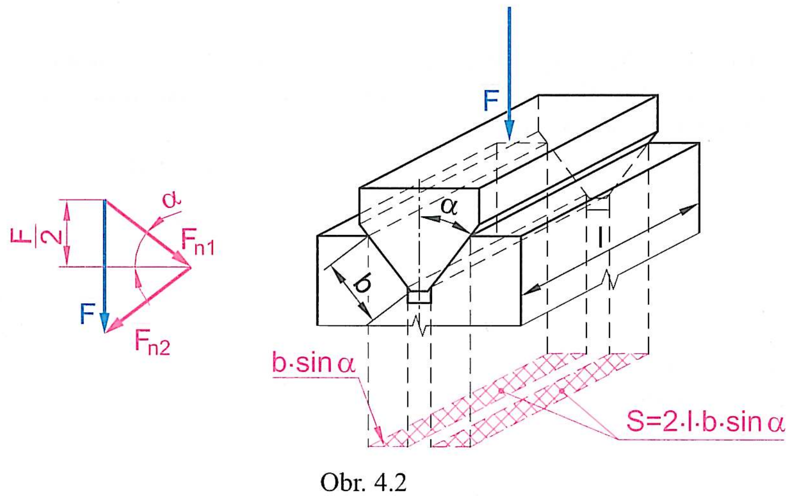
Na rovnej ploche, za predpokladu, že tlak je rozložený po celej ploche rovnomerne, platí vzťah:

$$p = \frac{F}{S} \text{ [MPa]}$$

kde F [N] je zaťažujúca sila a S [mm^2] je veľkosť skutočnej stykovej plochy.

4.1.2 Sila nepôsobí kolmo na plochu

Takýto prípad nastáva pri riešení tlaku v klinovej drážke. Silu F rozložíme na zložky kolmé na stykové plochy. Potom platí:



Obr. 4.2

$$F_{n1} = F_{n2} = \frac{F}{2 \cdot \sin\alpha}$$

Za predpokladu, že sa tlak rozloží rovnomerne po celej stykovej ploche platí vzťah:

$$p = \frac{F_{n1}}{S} = \frac{F_{n1}}{b \cdot l} = \frac{F}{2 \cdot b \cdot l \cdot \sin\alpha}$$

Výraz $b \cdot l \cdot \sin\alpha$ je kolmý priemet jednej stykovej plochy do kolmej roviny na smer sily. V týchto prípadoch môžeme definovať tlak na stykových plochách ako podiel zaťažujúcej sily a kolmého priemetu stykovej plochy na smer sily.

Tlak medzi plochami môžeme zvyšovať iba po určitú hranicu, ktorej hovoríme dovolený tlak a označujeme ho p_D. Musí platiť podmienka:

$$p_D \geq p$$

Voľba p_D závisí od:

1. materiálu súčiastok (do úvahy berieme materiál tej súčiastky, ktorá má nižšiu medzu pevnosti),
2. vzájomného pokoja alebo pohybu,
3. tvrdosti a kvality opracovania stykových plôch.

Pre súčiastky, ktoré sú vo vzájomnom pokoji sa obvykle volia hodnoty dovoleného tlaku

$$p_D = (0{,}7 \div 0{,}9) \cdot \sigma_{Dd}$$

PRÍKLAD

Vypočítajte, akou maximálnou silou môžeme zaťažiť nepohyblivý klin v klinovej drážke podľa *obr. 4.2*, ak poznáme materiál klinu E295 podľa EN 1027-1 (pôvodne 11 500), materiál drážky S235JRG1 označený podľa EN 1027-1 (pôvodne 11 373), $b = 30$ mm, $l = 80$ mm, $\alpha = 60°$.

Rozbor:

Na výpočet použijeme vzťah:

$$p = \frac{F}{2 \cdot b \cdot l \cdot \sin\alpha}$$

pre výpočet skutočného tlaku na stykových plochách drážky, z ktorého:

$$F = 2 \cdot b \cdot l \cdot p \cdot \sin\alpha$$

Za hodnotu tlaku p dosadíme maximálne možný tlak, ktorý plochy udržia, t.j. dovolený tlak p_D. Hodnotu p_D vypočítame zo vzťahu:

$$p_D = (0{,}7 \div 0{,}9) \cdot \sigma_{Dd}$$

Hodnotu σ_{Dd} nájdeme v strojníckych tabuľkách a berieme ju pre materiál nižšej pevnosti. V našom prípade pre materiál S235JRG1.

$$\sigma_{Dd} = (100 \div 150)\ \text{MPa}$$

Aby sme mali istotu, že materiál bezpečne prenesie dané zaťaženie, počítame s najnižšími hodnotami.

Výpočet:

$$p_D = (0{,}7 \div 0{,}9) \cdot \sigma_{Dd}$$
$$p_D = 0{,}7 \cdot 100 = 70\ \text{MPa}$$
$$F \leq 2 \cdot b \cdot l \cdot p_D \cdot \sin\alpha$$
$$F \leq 2 \cdot 30 \cdot 80 \cdot 70 \cdot \sin 60° = 290\,984\ \text{N}$$

Klin môžeme zaťažiť silou menšou alebo rovnajúcou sa $F = 290{,}9$ kN.

4.2 TLAK MEDZI ZAKRIVENÝMI STYKOVÝMI PLOCHAMI

Rozoberieme tieto tri prípady:

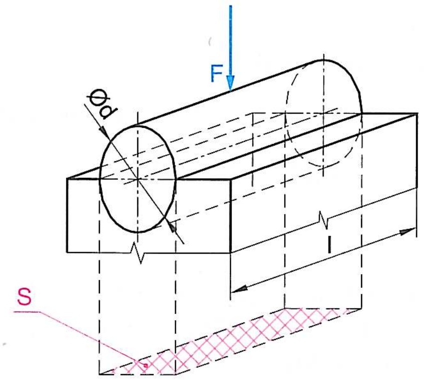
a) tlak medzi hriadeľom a ložiskom,
b) tlak pôsobiaci na lícovaný čap, priečny klin, pero, nit a pod.
c) tlak prenášaný axiálnymi čapmi.

V prvom prípade sa spolupôsobiace súčiastky navzájom pohybujú, v druhom nemenia svoju vzájomnú polohu a v treťom prípade sa súčiastky môžu a nemusia navzájom pohybovať.

4.2.1 Tlak medzi hriadeľom a ložiskom

Pretože medzi hriadeľom a ložiskom dochádza k vzájomnému pohybu, musí byť medzi nimi vôľa. Tlak z hriadeľa na ložisko sa prenáša cez vrstvu mazadla. Z týchto dôvodov nie je tlak rozložený rovnomerne po stykovej ploche. Preto počítame iba s približne stredným tlakom medzi stykovými plochami, ktorý je daný podielom tlakovej sily a priemetu stykovej plochy do roviny kolmej na smer sily.

$$p = \frac{F}{d \cdot l} \quad [\text{MPa}]$$



Obr. 4.3

Voľba dovoleného tlaku v tomto prípade kolíše v širokom rozmedzí od 1 do 20 MPa podľa druhu použitých materiálov, tvrdosti, akosti opracovania stykových plôch, obvodovej rýchlosti, použitého mazadla, výskytu rázov a pod.

4.2.2 Tlak pôsobiaci na lícovaný čap, priečny klin, pero, nit a pod.

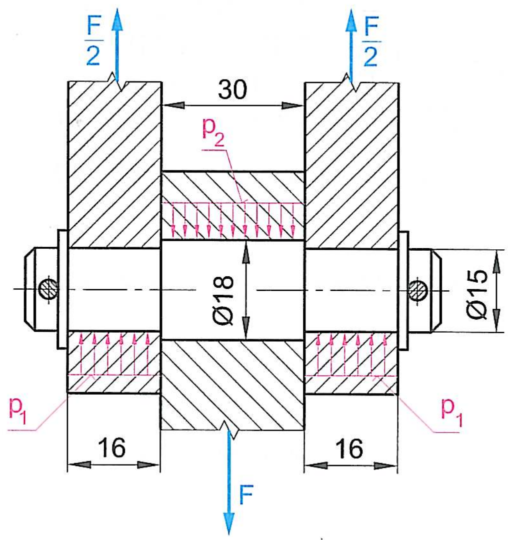
Relatívny pohyb súčiastok je vylúčený a styk je na celom povrchu. Ani tu nie je tlak rozložený rovnomerne po celej stykovej ploche. Rátame so stredným tlakom, ktorý je opäť daný podielom tlakovej sily a priemetu stykovej plochy do roviny kolmej na smer sily. Hodnotu dovoleného tlaku volíme v rozsahu:

$$p_D = (1{,}6 \div 2) \cdot \sigma_{Dd}$$

Hodnota dovoleného tlaku je relatívne vysoká preto, lebo spojenie vyvoláva pomerne vysoké sily trenia medzi plochami spájaných súčiastok, ktoré napomáhajú prenášať zaťaženie.

PRÍKLAD

Vyrátajte, či čap podľa *obr. 4.4* vyhovuje tlaku medzi stykovými plochami, ak dovolený tlak $p_D = 55$ MPa a $F = 20$ kN. Rozmery čapu sú $d_1 = 15$ mm, $l_1 = 16$ mm, $d_2 = 18$ mm a $l_2 = 30$ mm.



Obr. 4.4

Rozbor:

Tlak musíme vypočítať na dvoch miestach – na krajoch a v strede čapu a najvyššiu vypočítanú hodnotu musíme porovnať s dovoleným tlakom.

Výpočet:

Skutočný tlak na krajoch čapu:

$$p_1 = \frac{F}{2 \cdot d_1 \cdot l_1}$$

$$p_1 = \frac{20\,000}{2 \cdot 15 \cdot 16} = 41{,}7\,\text{MPa}$$

Skutočný tlak v strede čapu:

$$p_2 = \frac{F}{d_2 \cdot l_2}$$

$$p_2 = \frac{20\,000}{18 \cdot 30} = 37\,\text{MPa}$$

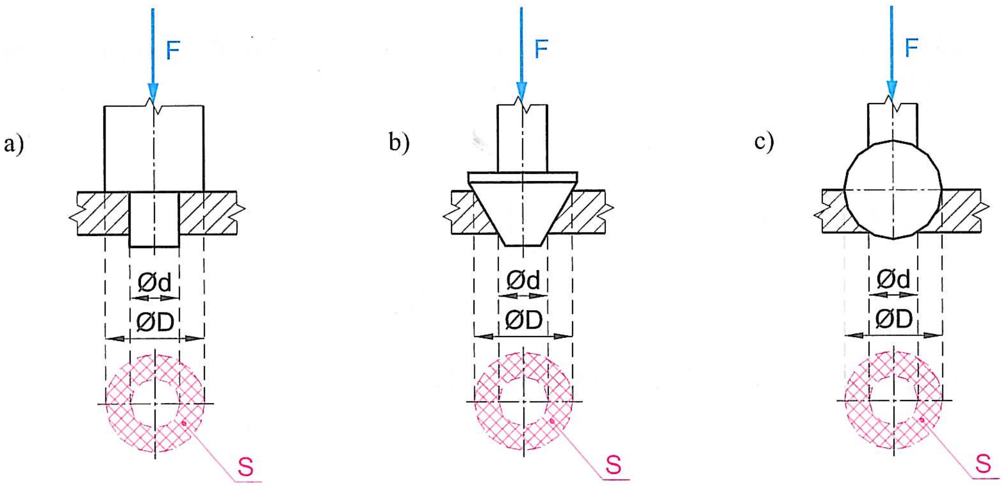
Najväčší tlak je na krajoch čapu $p_1 = 41{,}7$ MPa $\leq p_D = 55$ MPa – vyhovuje.

4.2.3 Tlak prenášaný axiálnymi čapmi

Pri axiálnych čapoch môže byť styková plocha rovinná, kužeľová, guľová a pod. Vo všetkých prípadoch platí všeobecný vzťah pre výpočet tlaku na stykovej ploche.

Vo všetkých prípadoch je priemet stykových plôch rovnaký, a preto bude pri rovnakej sile F rovnaká aj veľkosť tlaku:

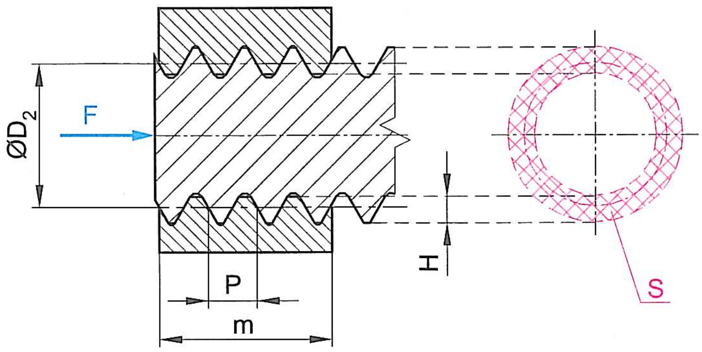
$$p = \frac{F}{S} \leq p_D$$



Obr. 4.5

4.3 VÝPOČET VÝŠKY MATICE NA POHYBLIVEJ SKRUTKE

Matica sa so skrutkou dotýka na rozmere H priemetu, ktorému hovoríme nosná hĺbka závitu.



Obr. 4.6

Veľkosť priemetu stykovej plochy vyrátame zo vzťahu:

$$S = \pi \cdot D_2 \cdot n \cdot H$$

kde D_2 – stredný priemer závitu,
n – počet závitov,
H – nosná hĺbka závitu.

Veľkosť tlaku na tejto ploche je:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi \cdot D_2 \cdot n \cdot H} \leq p_D$$

Z toho potrebný počet závitov:

$$n \geq \frac{F}{\pi \cdot D_2 \cdot p_D \cdot H}$$

Výška matice m sa vyráta:

$$m \geq n \cdot P = \frac{F \cdot P}{\pi \cdot D_2 \cdot p_D \cdot H}$$

kde P je rozstup závitu.

PRÍKLAD

Vypočítajte minimálnu výšku bronzovej matice pre pohyblivú skrutku Tr 36×6, ak sa má prenášať sila $F = 15$ kN a $p_D = 15$ MPa.

Rozbor:

Výpočet urobíme podľa vzťahu:

$$m \geq \frac{F \cdot P}{\pi \cdot D_2 \cdot p_D \cdot H}$$

pričom neznáme hodnoty nájdeme v strojníckych tabuľkách.

Výpočet:

Vyhľadané hodnoty:
$P = 6$ mm, $d = 36$ mm, $D_1 = 30$ mm, $D_2 = 33$ mm.
Hodnotu H vyrátame:

$$H = \frac{d - D_1}{2}$$

$$H = \frac{36 - 30}{2} = 3\,\text{mm}$$

Po dosadení:

$$m \geq \frac{15\,000 \cdot 6}{\pi \cdot 33 \cdot 15 \cdot 3} = 19{,}3\ \text{mm}$$

Minimálna činná výška matice (bez vnútorného zrazenia hrán) nesmie byť menšia ako 19,3 mm.

Zhrnutie:

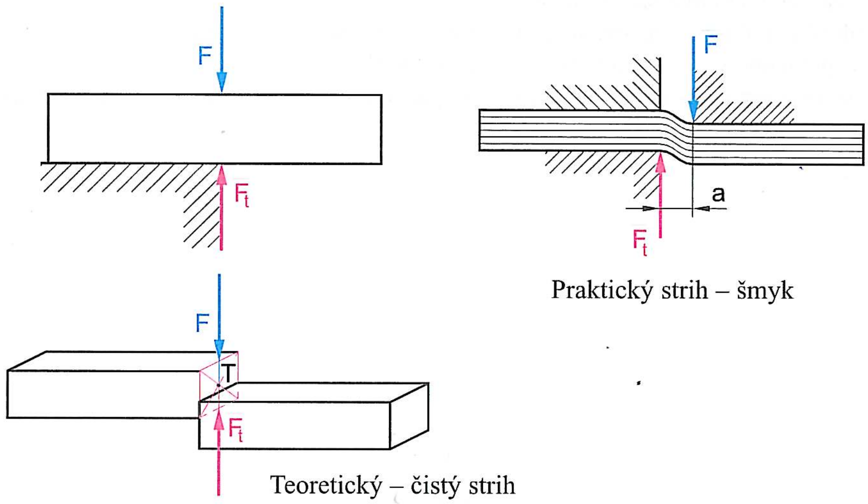
Tlak vzniká na rozhraní spolupôsobiacich súčiastok. Stredná – výpočtová veľkosť tlaku je daná podielom sily a priemetu plochy v smere kolmom na smer sily. Pri určovaní hodnoty dovoleného tlaku vychádzame z materiálových hodnôt pre materiál s nižšími parametrami.

Kontrolné otázky:

1. Aký je rozdiel medzi napätím a tlakom?
2. Aký je všeobecný vzťah pre určenie tlaku na stykovej ploche?
3. Od čoho závisí voľba veľkosti dovoleného tlaku?
4. Aké hodnoty dovoleného tlaku volíme pre súčiastky, ktoré sú v relatívnom pokoji?
5. Akým spôsobom vypočítame výšku matice pohybovej skrutky?

5 NAMÁHANIE STRIHOM

Namáhanie čistým strihom je viac-menej teoretický prípad namáhania. Vzniká vtedy, ak dve rovnako veľké sily opačného zmyslu pôsobia na jednej vektorovej priamke, ktorá prechádza ťažiskom prierezu a súčasne sily ležia v rovine namáhaného prierezu. Materiál sa bráni posunúť po sebe obidve časti vnútornou silou, ktorá sa prejavuje tangenciálnym napätím. Iba v tomto prípade je napätie rozložené rovnomerne po priereze.



Praktický strih – šmyk

Teoretický – čistý strih

Obr. 5.1

Čistý strih je iba teoretická kategória. Tomuto ideálnemu prípadu sa veľmi približujeme pri veľmi presnom strihaní, kedy je vôľa medzi priestrižníkom a priestrižnicou iba niekoľko stotín mm. Strižná plocha je v tomto prípade hladká a lesklá.

Vo všeobecnom prípade neležia sily na spoločnej vektorovej priamke. Medzi silami je nezanedbateľná vzdialenosť, čo spôsobuje, že strih je sprevádzaný ohybom. Takýto strih, s ktorým sa v praxi často stretávame nazývame aj šmyk. Strižná plocha je na začiatku vnikania nástroja do materiálu pomerne hladká, ale ostatná časť má vysokú hodnotu drsnosti spojenú často s otrepom.

Napriek tomu na šmyk rátame drieky lícovaných skrutiek, kolíky, čapy, nitované spoje a niektoré druhy zvarov, kde rameno dvojice síl je pomerne malé a spoj umožňuje zanedbateľný ohyb.

5.1 VÝPOČTOVÁ ROVNICA PRE STRIH

V prípade, ak predpokladáme rovnomerné rozloženie tangenciálneho napätia po celom priereze, platí výpočtová rovnica:

$$\tau_s = \frac{F}{S} \le \tau_{Ds} \text{ [MPa]}$$

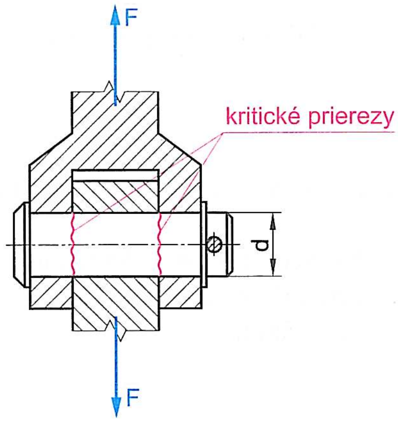
kde F [N] je zaťažujúca sila a S [mm^2] je plocha prierezu namáhaného šmykom. Existuje veľa prípadov, kedy jedna súčiastka má viac ako jeden prierez namáhaný šmykom (napr. lícovaný čap podľa *obr. 5.2*) alebo keď zaťažujúcu silu zachytáva niekoľko súčiastok (napr. nity v styčníkoch *obr. 5.6*). V takomto prípade musíme výpočtovú rovnicu doplniť:

$$\tau_s = \frac{F}{i \cdot n \cdot S} \le \tau_{Ds} \text{ [MPa]}$$

kde i – počet strižných prierezov na jednej súčiastke,
n – počet súčiastok v spoji,
S – veľkosť jednej strižnej plochy.

PRÍKLAD

Skontrolujte, či lícovaný čap z materiálu E295 podľa EN 1027-1 (pôvodne 11 500) vydrží zaťaženie podľa *obr. 5.2*, ak staticky pôsobiaca sila má veľkosť $F = 10$ kN a $d = 10$ mm.



Obr. 5.2

Riešenie:

Pretože ide o lícovaný čap, môžeme ho rátať zo šmyku.

$$\tau_s = \frac{F}{i \cdot n \cdot S} \leq \tau_{Ds}$$

veľkosť jednej strižnej plochy: $S = \dfrac{\pi \cdot d^2}{4}$

počet strižných prierezov: $i = 2$

počet súčiastok v spoji: $n = 1$.

Podľa strojníckych tabuliek je hodnota dovoleného napätia v šmyku pre daný materiál $\tau_{Ds} = 85$ až 125 MPa. Ak chceme mať istotu, že materiál namáhanie vydrží, berieme pri výpočte do úvahy vždy nižšiu hodnotu $\tau_{Ds} = 85$ MPa.

$$\tau_s = \frac{F}{i \cdot \dfrac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4 \cdot F}{i \cdot \pi \cdot d^2}$$

$$\tau_s = \frac{4 \cdot 10\,000}{2 \cdot \pi \cdot 10^2} = 63{,}7 \text{ MPa} < 85 \text{ MPa}$$

Z výsledku vyplýva, že materiál dané zaťaženie prenesie a že priemer čapu je navrhnutý správne.

5.2 HOOKOV ZÁKON PRE STRIH, DEFORMÁCIA TELESA NAMÁHANÉHO STRIHOM

Podobne ako pri ťahu môžeme urobiť skúšku namáhania strihom a výsledok skúšky zaznačiť do diagramu $\tau - \gamma$. Dostali by sme veľmi podobný tvar diagramu ako pri diagrame $\sigma - \varepsilon$.

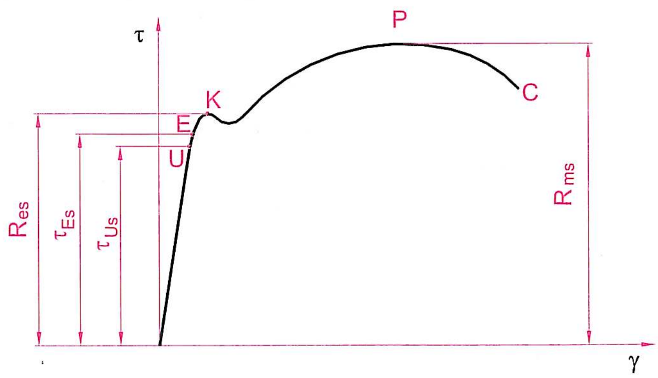
Pri porovnávaní hodnôt napätí dosiahnutých na rovnakom materiále zistíme, že približne platia vzťahy:

pre oceľ $R_{es} = 0{,}6 \cdot R_e$

Pri rovnakej bezpečnosti platí:

pre oceľ $\tau_{Ds} = 0{,}6\sigma_{Dt}$

pre liatinu $\tau_{Ds} = (0{,}8 \text{ až } 1)\sigma_{Dt}$



Obr. 5.3

To znamená, že liatina dobre odoláva tangenciálnym napätiam.

V prvej kapitole sme uviedli, že tangenciálne napätia vyvolávajú deformáciu, ktorú nazývame pomerné skosenie. Medzi pomerným skosením a tangenciálnym napätím platí po medzu úmernosti Hookov zákon:

$$\tau = \gamma \cdot G$$

kde G je modul pružnosti v šmyku.

Medzi modulom pružnosti v šmyku a modulom pružnosti v ťahu platí vzťah:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

kde μ je Poissonovo číslo. Pre kovy (s výnimkou liatiny) je jeho hodnota 0,3; pre liatinu $\mu = 0{,}25$;

Pre oceľ sa $G = 0{,}385 \cdot E$, to znamená, že pre ocele je táto hodnota v rozmedzí 7,0 až $8{,}5 \cdot 10^4$ MPa a pre sivú liatinu 3,0 až $5{,}5 \cdot 10^4$ MPa.

Zo vzťahu:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

vyplýva, že $\tau = G$ pre $\gamma = 1$, čo platí vtedy, ak je uhol $\gamma = 45°$. Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že modul pružnosti v šmyku je také tangenciálne napätie, ktoré by spôsobilo posunutie oboch vrstiev oproti sebe o 45°.

Ak do Hookovho zákona pre šmyk dosadíme za

$$\gamma = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{a za} \quad \tau = \frac{F}{S}$$

dostaneme pre deformáciu vzťah:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{F}{G \cdot S}$$

kde súčin $G \cdot S$ znamená tuhosť v šmyku. Zásadný rozdiel medzi deformáciou spôsobenou normálovým napätím a deformáciou od tangenciálneho napätia je v tom, že pri normálovom napätí sa nemení pravouhlosť hrán na kubickom elemente, zatiaľ čo pri deformácii spôsobenej tangenciálnym napätím sa tvar elementu mení.

5.3 STRIHANIE MATERIÁLU

Pri strihaní materiálu musíme materiál porušiť. To znamená, že nestačí dosiahnuť napätie na medzi pevnosti v šmyku, ale musíme ju prekonať. V tomto prípade platí vzťah:

$$\tau_s = \frac{F}{S} > R_{ms}$$

Pri strihaní plechu (materiál má stále rovnakú hrúbku) môžeme plochu S vyrátať ako súčin strihaného obvodu a hrúbky plechu:

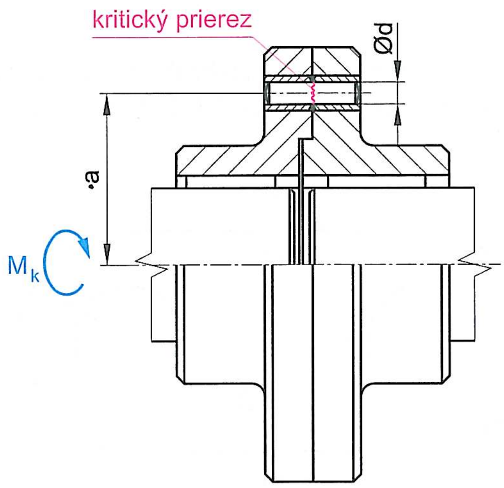
$$S = o \cdot t$$

Pretože chceme, aby sa materiál vždy prestrihol, musíme pri určovaní R_{ms} zvoliť hodnoty o niečo vyššie. Preto pri strihaní rátame s medzou pevnosti v šmyku:

$$R_{ms} = 0{,}8 \cdot R_m$$

PRÍKLAD

Na hriadeli podľa *obr. 5.4* je bezpečnostná spojka, ktorá má pomocou lícovaného strižného kolíka zabezpečiť, aby nebol prekročený krútiaci moment $M_k = 780$ Nm. Máme určiť priemer kolíka z materiálu E295 podľa EN 1027-1 (pôvodne 11 500), ak jeho vzdialenosť od osi otáčania je $a = 80$ mm.



Obr. 5.4

Riešenie:

Pretože ide o lícovaný kolík, môžeme počítať so šmykom.

1. Výpočet strižnej sily

Strižnú silu vypočítame z krútiaceho momentu:

$$M_k = F \cdot a$$
$$F = \frac{M_k}{a}$$
$$F = \frac{780 \cdot 10^3}{80} = 9\,750\ \mathrm{N}$$

2. Výpočet priemeru kolíka

$$\tau_s = \frac{F}{S} > R_{ms}$$

kde $S = \dfrac{\pi \cdot d^2}{4}$,

po dosadení a úprave dostaneme:

$$d \le \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot R_{ms}}}$$

V strojníckych tabuľkách hodnota R_{ms} nie je, preto za ňu dosadíme približnú hodnotu zo vzťahu:

$$R_{ms} = 0{,}8 \cdot R_m$$

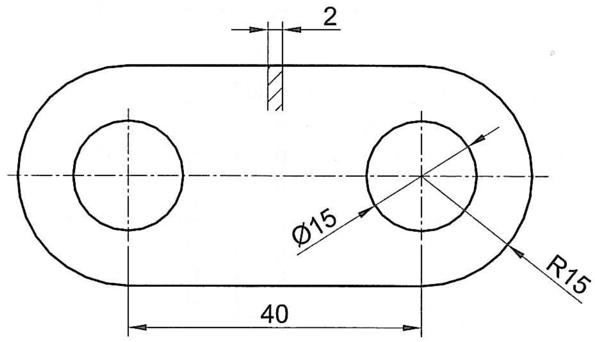
Pre pevnosť v ťahu R_m sú pre materiál E295 uvedené hodnoty 500 až 620 MPa. Ak chceme, aby sa strižný kolík pri preťažení prestrihol, musíme zobrať vyššiu hodnotu, teda:

$$R_{ms} = 0{,}8 \cdot 620 = 496\ \ \mathrm{MPa}$$
$$d \le \sqrt{\frac{4 \cdot 9\,750}{\pi \cdot 496}}$$
$$d \le 5{,}003\ \ \mathrm{mm}$$

Z uvedeného výpočtu vyplýva, že pri skutočnom priemere d_{sk} = 5 mm nám kolík z materiálu E295 zabezpečí ochranu proti preťaženiu.

PRÍKLAD

Zistite potrebnú silu F, ktorou musí pôsobiť lis na plech hrubý $t = 2$ mm z materiálu S235J0 podľa EN 1027-1 (pôvodne 11 378) pri prestrihovaní výstrižku podľa *obr. 5.5*. Celý tvar sa vystrihne súčasne.



Obr. 5.5

Riešenie:

Na výpočet použijeme vzťah na prestrihovanie materiálu:

$$\tau_s = \frac{F}{S} > R_{ms}$$

z ktorého vyjadríme potrebnú silu F:

$$F > S \cdot R_{ms}$$

Pri výpočte strižnej plochy použijeme vzťah:

$$S = o \cdot t$$

Za R_{ms} dosadíme:

$$R_{ms} = 0{,}8 \cdot R_m$$

kde $R_m = 365$ až 460 MPa. Pre výpočet berieme vyššiu hodnotu.
Z obrázku vyplýva obvod súčiastky:

$$o = (2 \cdot \pi \cdot 15 + \pi \cdot 30 + 2 \cdot 40) = 268{,}5 \text{ mm}$$

Veľkosť strižnej sily:

$$F > o \cdot t \cdot 0{,}8 \cdot R_m$$

$$F > 268{,}5 \cdot 2 \cdot 0{,}8 \cdot 460$$

$$F > 197\,616 \text{ N}$$

Na vystrihnutie daného výstrižku by postačoval lis, ktorý pôsobí minimálnou silou $F = 198$ kN.

5.4 VÝPOČET NEROZOBERATEĽNÝCH SPOJOV

K nerozoberateľným spojom, ktoré kontrolujeme na strih, patria hlavne nitované spoje a zo zváraných spojov kútové zvary.

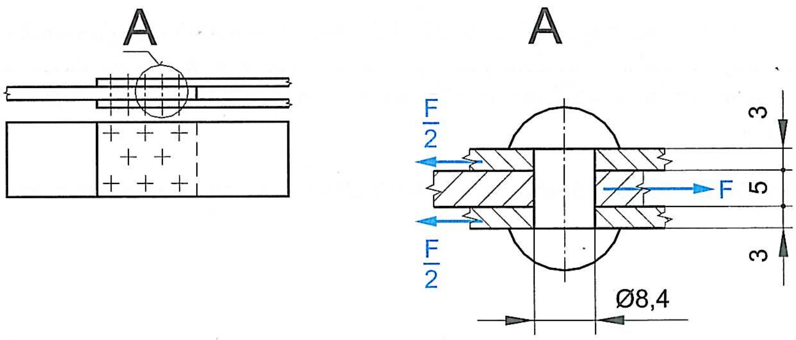
Nity rátame na šmyk a na otlačenie aj napriek tomu, že hlavy nitov pôsobia veľkou silou a na stykových plochách medzi súčiastkami vyvolávajú veľké trenie. Preto sú aj dovolené hodnoty pre τ_{Ds} a p_D vyššie ako obyčajne. Pretože v súčasnosti nie sú vypracované prevodové tabuľky medzi materiálom podľa EN a podľa STN, uvedieme hodnoty v tabuľke v pôvodnom označení podľa STN.

Tabuľka 5.1

KONŠTRUKCIA	MATERIÁL **10 341**	MATERIÁL **10 371**	MATERIÁL **10 451**
Statická	$R_{m\,s}$ = 120 MPa	145 MPa	170 MPa
	p_D = 300 MPa	365 MPa	435 MPa
Mobilná	$R_{m\,s}$ = 150 MPa	180 MPa	220 MPa
	p_D = 300 MPa	365 MPa	435 MPa

PRÍKLAD

Vyrátajte, koľko nitov je potrebných na prenesenie zaťaženia v statickom spoji podľa *obr. 5.6*, ak nity priemeru d = 8 mm sú z materiálu 10 371, pásy s hrúbkami t = 5 mm a t_1 = 3 mm sú z materiálu 11 420. Zaťažujúca sila F = 120 kN.



Obr. 5.6

Riešenie:

1. *Počet nitov z namáhania strihom*

Vychádzame zo základnej pevnostnej rovnice

$$\tau_s = \frac{F}{i \cdot n \cdot S} \le \tau_{Ds}$$

z ktorej počet strižných plôch

$$n \ge \frac{F}{i \cdot S \cdot \tau_{Ds}}$$

Za prierez S musíme dosadiť hodnotu priemeru, ktorý nit dosiahne po znitovaní, t.j. hodnotu vŕtaného otvoru. Pre nit d = 8 mm je podľa strojníckych tabuliek priemer otvoru d_2 = 8,4 mm. Hodnota τ_{Ds}=145 MPa.
Z obrázka vyplýva, že ide o dvojstrižný nit, t. j. jeden nit má dve strižné plochy i = 2.

$$n \ge \frac{F}{i \cdot S \cdot \tau_{Ds}}$$

$$n \ge \frac{4 \cdot 120\,000}{2 \cdot \pi \cdot 8{,}4^2 \cdot 145} = 7{,}47 \text{ nitov}$$

Z výpočtu vyplýva, že 8 nitov dané zaťaženie prenesie.

2. *Kontrola tlaku na stykových plochách*

Dva pásy s hrúbkou t_1 = 3 mm prenášajú rovnaké zaťaženie ako stredný pás s hrúbkou t = 5 mm. Najväčšia hodnota tlaku sa dosiahne v strednom páse, preto budeme kontrolovať otlačenie práve tu. Hodnotu skutočného tlaku v tomto mieste vyrátame:

$$p = \frac{F}{n \cdot S} < p_D$$

Plocha S je priemet plochy nitu v kontrolovanom otvore kolmej na smer sily:

$$S = d_2 \cdot t$$

$$p = \frac{F}{n \cdot d_2 \cdot t}$$

$$p = \frac{120\,000}{8 \cdot 8{,}4 \cdot 5}$$

$$p = 357{,}1 \text{ MPa} < 360 = p_D$$

Skutočný tlak na stykovej ploche je menší ako dovolený tlak – navrhnutý počet nitov vyhovuje.

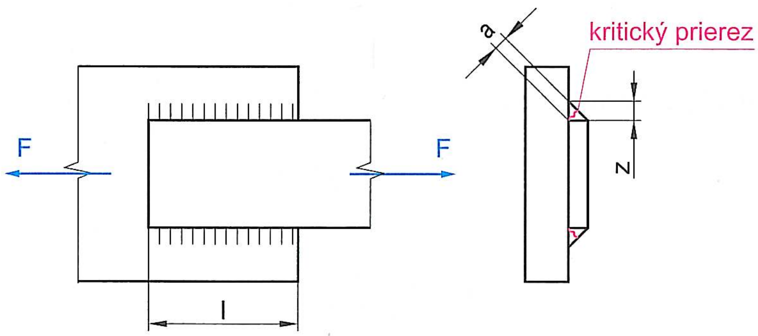
Namáhanie kútových zvarov počítame z namáhania v šmyku, pričom strižná plocha je súčinom výšky a dĺžky zvaru.

Poznámka:

Charakteristickým rozmerom zvaru môže byť výška najväčšieho rovnoramenného trojuholníka a, vpísaného do prierezu zvaru alebo odvesna tohto trojuholníka z, pričom platí $z = a \cdot \sqrt{2}$. Preto je potrebné dávať pozor na označenie zvaru. Charakteristický rozmer s označením a môžeme použiť priamo vo výpočte, ale pri rozmere s označením z musíme dosadzovať hodnotu $\frac{z}{\sqrt{2}} = 0{,}7 \cdot z$.

PRÍKLAD

Vypočítajte potrebnú dĺžku l bočných kútových zvarov na pásnici z materiálu, ktorého $\tau_{Ds} = 100$ MPa podľa *obr. 5.7*, ak $F = 100$ kN a $a = 8$ mm.



Obr. 5.7

Riešenie:

Pretože ide o kútové zvary, výpočet môžeme robiť pomocou pevnostnej rovnice na šmyk.

$$\tau_s = \frac{F}{S} \le \tau_{Ds}$$

Strižná plocha je v tomto prípade:

$$S = 2 \cdot l \cdot a$$

Po dosadení a úprave dostaneme:

$$l \ge \frac{F}{2 \cdot a \cdot \tau_{Ds}}$$

$$l \ge \frac{100\,000}{2 \cdot 8 \cdot 100} = 62{,}5 \text{ mm}$$

Ak zvolíme dĺžku zvarov $l_{sk} = 65$ mm, dosiahneme určitú bezpečnosť pri prenášaní daného zaťaženia.

Zhrnutie:

Pri výpočte lícovaných kolíkov, skrutiek, klinov, pier, nitov a kútových zvarov rátame pomocou pevnostnej rovnice jednoduchý šmyk. Platí pritom vzťah:

$$\tau_s = \frac{F}{i \cdot n \cdot S} \leq \tau_{Ds}$$

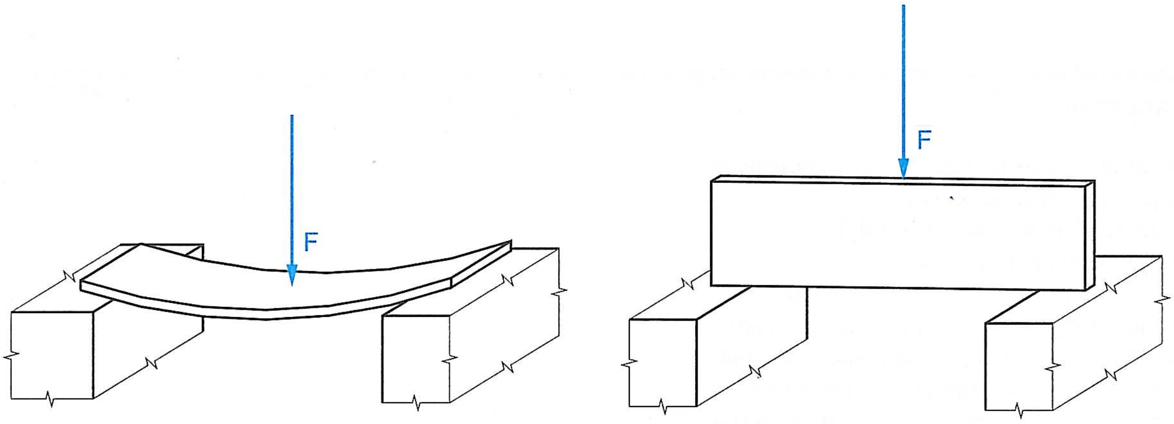
Dovolené hodnoty v šmyku môžeme vypočítať podľa vzťahov:
pre oceľ: $\tau_{Ds} = 0{,}6\sigma_{Dt}$
pre liatinu: $\tau_{Ds} = (0{,}8 \text{ až } 1)\sigma_{Dt}$
Pri strihaní materiálu počítame s napätím na medzi pevnosti v šmyku: $R_{ms} = 0{,}8 \cdot R_m$

KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Aké druhy súčiastok rátame na jednoduchý šmyk?
2. Čo je to pomerné skosenie?
3. Vyjadrite Hookov zákon pre šmyk.
4. Aký je vzťah medzi E a G?
5. Aké zvary rátame na jednoduchý šmyk?
6. Ako určujeme nebezpečný prierez pri zvaroch?
7. Ako vypočítame silu potrebnú na prestrihnutie?
8. Ako vypočítame strižný prierez pri strihaní materiálu?
9. Prečo dosadzujeme pri prestrihovaní materiálu R_{ms}?

6 KVADRATICKÉ A POLÁRNE MOMENTY PRIEREZU

Pri namáhaní v ťahu, tlaku a šmyku sme zistili, že charakteristickými veličinami, od ktorých závisela únosnosť súčiastky a jej deformácia bola veľkosť sily a plocha prierezu. Pri týchto druhoch namáhania nezáležalo na polohe, tvare alebo na rozložení prierezu podľa prierezovej osi.



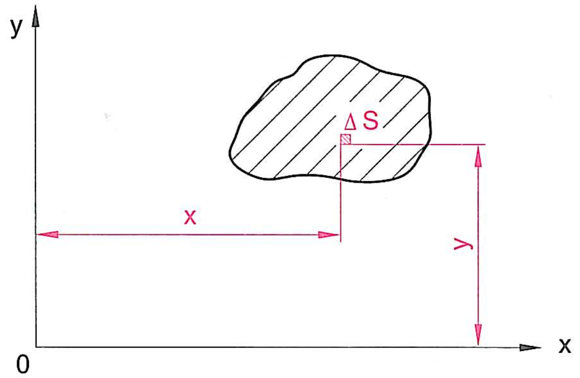
Obr. 6.1

Urobme jednoduchý pokus. Vezmime celuloidové pravítko a ohýbajme ho v rôznych smeroch, tak ako na *obr. 6.1*. Zistíme, že oveľa ľahšie sa ohne v polohe na ležato ako na stojato.

Pri ohybe je únosnosť a deformácia závislá nielen od zaťaženia a veľkosti prierezu, ale závisí aj od polohy, tvaru a rozloženia prierezu pozdĺž prierezovej osi. Táto vlastnosť prierezu je charakteristická pre namáhanie v ohybe a vzpere. Charakteristickou nie je veľkosť prierezu (jeho plocha), ale kvadratický moment prierezu.

6.1 KVADRATICKÝ MOMENT PRIEREZU

Kvadratický moment prierezu označujeme J_x, J_y alebo J_z podľa toho, ku ktorej osi hľadáme kvadratický moment.



Obr. 6.2

Kvadratický moment prierezu je geometrická veličina, ktorá sa matematicky vyjadruje takto:

$$J_x = \sum \Delta S \cdot y^2; \qquad J_y = \sum \Delta S \cdot x^2$$

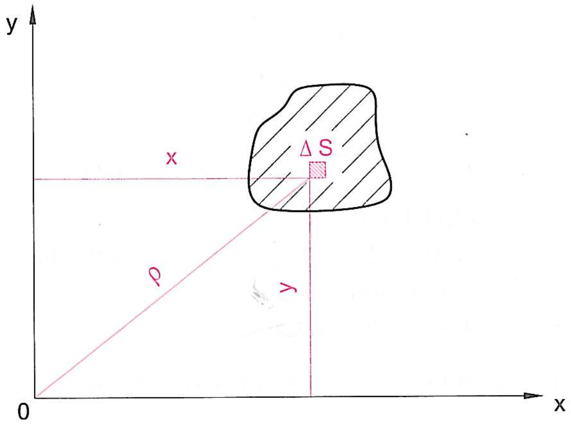
Uvedené vzťahy platia pre kvadratický moment prierezu k akejkoľvek osi ležiacej v rovine prierezu. Je to vlastne súčet súčinov nekonečne malých plôšok a druhých mocnín ich kolmých vzdialeností od tejto osi vzťahujúci sa na celú plochu prierezu.

Práve preto, že kvadratický moment prierezu rastie s druhou mocninou vzdialenosti elementov plôch od osi, celuloidové pravítko sa deformuje podstatne viac na ležato ako na stojato. Ako vidíme aj napätia a deformácie sú závislé od kvadratického momentu prierezu a rovnaký prierez má podľa polohy k osi rôznu veľkosť kvadratického momentu prierezu. Hodnota kvadratického momentu prierezu je vždy kladná, pretože aj druhé mocniny sú vždy kladné.

6.2 POLÁRNY MOMENT PRIEREZU, VZŤAH MEDZI POLÁRNYM A KVADRATICKÝM MOMENTOM PRIEREZU

Okrem kvadratického momentu prierezu, ktorý potrebujeme pri výpočte namáhania ohybom a vzperom, rozoznávame ešte polárny moment prierezu J_p, ktorý sa vzťahuje ku kolmej osi na rovinu prierezu a pre ktorý platí:

$$J_p = \sum \Delta S \cdot \rho^2$$



Obr. 6.3

Nech sa osi súradnicovej sústavy *x, y, z* pretínajú v bode *0*, ktorý nazveme *pól*. Platí:

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

Pre polárny moment prierezu platí vzťah:

$$J_p = \sum \Delta S \cdot \rho^2 = \sum \Delta S \cdot (x^2 + y^2) = \sum \Delta S \cdot x^2 + \sum \Delta S \cdot y^2 = J_y + J_x$$

Polárny moment prierezu sa rovná súčtu dvoch kvadratických momentov prierezu ku dvom vzájomne kolmým osiam, ktoré sa pretínajú v póle.

Zhrnutie:

Na určenie únosnosti a deformácie v ohybe, vzpere a krútení potrebujeme poznať kvadratický a polárny moment prierezu. Sú dané vzťahmi:

$$J_x = \sum \Delta S \cdot y^2; \quad J_y = \sum \Delta S \cdot x^2$$

$$J_p = \sum \Delta S \cdot \rho^2$$

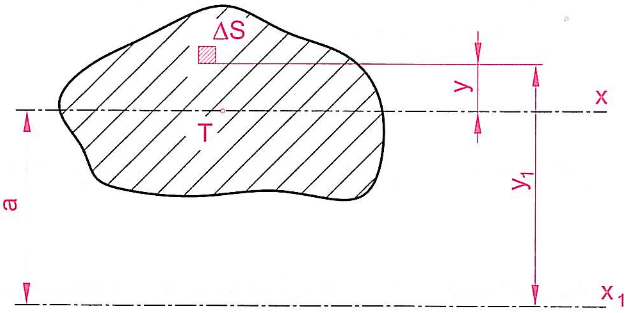
Pri kvadratickom momente prierezu leží os, ku ktorej sa moment počíta v rovine prierezu, pri polárnom momente je os kolmá na rovinu prierezu. Medzi kvadratickým a polárnym momentom prierezu platí vzťah:

$$J_p = J_x + J_y$$

pričom osi x a y sú na seba kolmé a polárny moment je počítaný k priesečníku týchto osí.

6.3 STEINEROVA VETA

Os prechádzajúca ťažiskom sa nazýva centrálna os a príslušný kvadratický moment prierezu centrálny kvadratický moment prierezu. Pri niektorých výpočtoch musíme vypočítať kvadratický moment prierezu aj k inej ako centrálnej osi, ktorá je s ňou rovnobežná.



Obr. 6.4

Na *obr. 6.4.* je os x centrálnou osou a našou úlohou je vypočítať kvadratický moment prierezu k osi x_1 rovnobežnej s osou x a vzdialenej od nej o vzdialenosť a. Podľa predchádzajúceho platí:

k osi x $$J_x = \sum \Delta S \cdot y^2$$

k osi x_1 $$J_{x1} = \sum \Delta S \cdot y_1^2$$

$$y_1 = a + y$$

$$J_{x1} = \sum \Delta S \cdot (y + a)^2 = \sum \Delta S \cdot y^2 + \sum \Delta S \cdot 2 \cdot a \cdot y + \sum \Delta S \cdot a^2$$

Prvý člen je kvadratický moment prierezu J_x k osi x.
Druhý člen môžeme ho napísať v tvare $2a \sum \Delta S \cdot y$, je lineárny moment prierezu k osi prechádzajúcej ťažiskom a jeho hodnota sa rovná nule.
Tretí člen môžeme upraviť na tvar $a^2 \sum \Delta S = a^2 \cdot S$.

Potom môžeme napísať kvadratický moment prierezu plochy S k osi x_1:

$$J_{x1} = J_x + a^2 \cdot S$$

Tomuto vzťahu sa hovorí Steinerova veta a platí iba vtedy, ak poznáme kvadratický moment prierezu k jednej osi (x) a počítame kvadratický moment prierezu k rovnobežnej osi (x_1) vzdialenej od pôvodnej osi o hodnotu a.

Definícia

Kvadratický moment prierezu k ľubovoľnej osi rovnobežnej s centrálnou osou sa rovná kvadratickému momentu prierezu k centrálnej osi zväčšenému o súčin veľkosti prierezu a druhej mocniny vzdialenosti obidvoch osí.

Z toho vyplýva, že kvadratický moment prierezu k centrálnej osi je najmenší zo všetkých kvadratických momentov prierezu k rovnobežným osiam s touto centrálnou osou.

Ak má plocha alebo prierez os súmernosti, hovoríme jej hlavná centrálna os. Hlavnými centrálnymi osami nazývame dve na seba kolmé osi pretínajúce sa v ťažisku prierezu, ku ktorým sú kvadratické momenty prierezu maximálne a minimálne.

Zhrnutie:

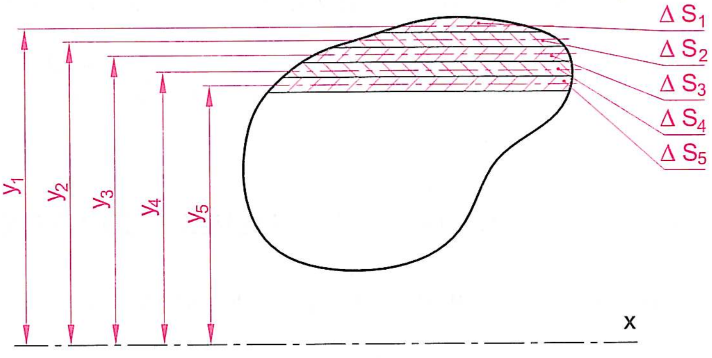
Steinerova veta vyjadruje závislosť kvadratických momentov prierezu plochy ku dvom osiam, z ktorých jedna prechádza ťažiskom plochy a druhá je s ňou rovnobežná. Platí vzťah:

$$J_{x1} = J_x + a^2 \cdot S$$

kde S je veľkosť plochy, a je vzdialenosť medzi osami.

6.4 KVADRATICKÝ MOMENT PRIEREZU ĽUBOVOĽNEJ PLOCHY

Presné určovanie kvadratického momentu prierezu je matematicky veľmi obtiažne a je možné iba vtedy, ak je obrysová čiara prierezu presne matematicky definovaná. Ak to tak nie je, potom je možné iba približné riešenie grafické alebo výpočtom. Graficko-výpočtové riešenie vyplýva z definície kvadratického momentu prierezu.



Obr. 6.5

Prierezovú plochu rozdelíme na elementárne plôšky, odmeriame vzdialenosti ich ťažísk od zvolenej osi a urobíme súčet:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cdot y_i^2 = \Delta S_1 \cdot y_1^2 + \Delta S_2 \cdot y_2^2 + \Delta S_3 \cdot y_3^2 + \ldots + \Delta S_n \cdot y_n^2$$

Výpočet je tým presnejší, čím menšie budú elementy plôch. Týmto spôsobom sa v minulosti riešili napr. kvadratické momenty prierezov lopatiek turbín a pod.

6.5 KVADRATICKÉ A POLÁRNE MOMENTY PRIEREZOV NIEKTORÝCH ZÁKLADNÝCH PLÔCH

Obmedzíme sa iba na určenie kvadratického momentu prierezu obdĺžnika, štvorca a kruhu. Ďalšie základné plochy majú kvadratické momenty prierezu uvedené v rôznej technickej literatúre (napr. strojníckych tabuľkách). Prierezy valcovaných profilov majú kvadratické momenty uvedené v príslušných rozmerových normách.

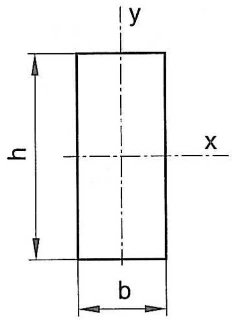
1. Obdĺžnik

Kvadratický moment prierezu k osi x bude:

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Kvadratický moment prierezu k osi y bude:

$$J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$



Obr. 6.6

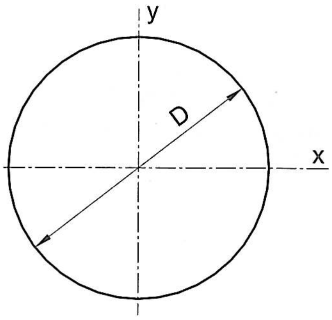
2. Štvorec

Pre štvorec platí

$$b = h = a$$

a teda

$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12}$$



Obr. 6.7

3. Kruhová plocha

Kvadratické momenty k osiam x a y sú rovnaké:

$$J_x = J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

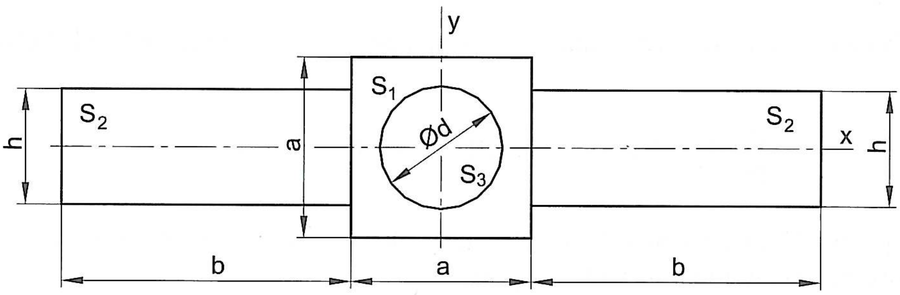
Polárny moment kruhovej plochy ak je pól v strede plochy:

$$J_p = J_x + J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

6.6 VÝPOČET KVADRATICKÝCH MOMENTOV PRIEREZU ZLOŽENÝCH PLÔCH

Kvadratické momenty prierezu sa dajú zrátať iba v tom prípade, ak sú vzťahované k spoločnej osi.

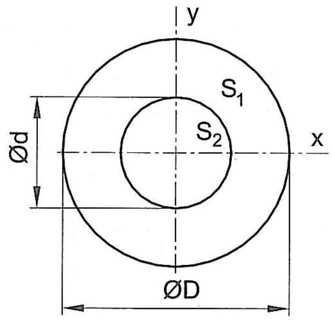
a) Čiastočné plochy majú spoločnú os súmernosti



Obr. 6.8

Kvadratický moment prierezu celej plochy k osi x je daný vzťahom:

$$J_x = J_{x1} + 2 \cdot J_{x2} - J_{x3}$$



Obr. 6.9

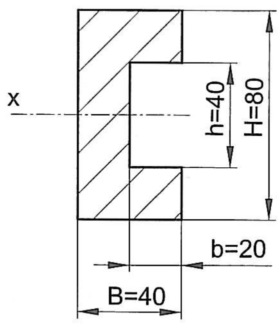
Rovnakým spôsobom sa dá vypočítať aj kvadratický moment prierezu pre medzikružie:

$$J_x = J_{x1} - J_{x2}$$

$$J_x = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)$$

Niekedy sa uvádza pomer $\frac{d}{D} = \alpha$. V tomto prípade bude mať vzťah tvar:

$$J_x = \frac{\pi \cdot D^4}{64}\left(1 - \alpha^4\right)$$



Obr. 6.10

PRÍKLAD

Vypočítajte kvadratický moment prierezu plochy podľa *obr. 6.10* k osi x.

Riešenie:

$$J_x = J_{x1} - J_{x2}$$

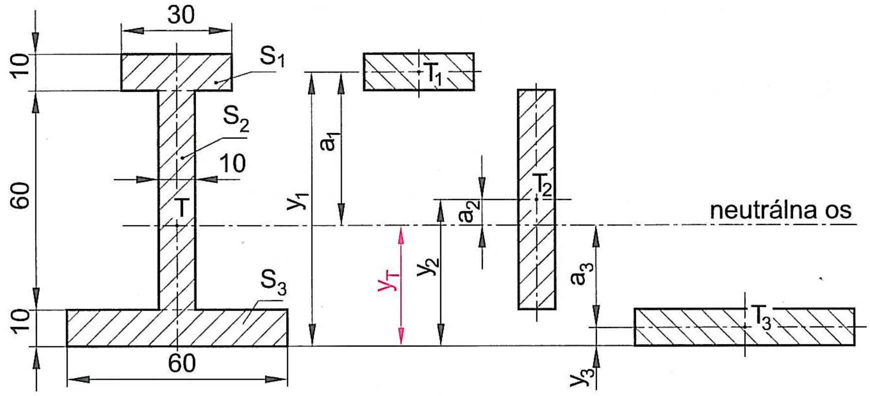
$$J_x = \frac{1}{12} \cdot \left(B \cdot H^3 - b \cdot h^3\right)$$

$$J_x = \frac{1}{12} \cdot \left(40 \cdot 80^3 - 20 \cdot 40^3\right) = 1\,600\,000 \text{ mm}^4$$

b) Čiastočné plochy nemajú spoločnú os súmernosti

PRÍKLAD

Vyrátajte kvadratický moment prierezu nosníka J_x k neutrálnej osi (os prechádza ťažiskom) podľa *obr. 6.11*.



Obr. 6.11

Postup:

1. Výpočtom alebo graficky určíme polohu ťažiska celej plochy.
2. Rozdelíme prierez na základné obrazce, pri ktorých vieme vyrátať kvadratické momenty k ich ťažiskovým osiam.
3. Určíme kvadratické momenty jednotlivých plôch.
4. Pomocou Steinerovej vety prepočítame jednotlivé kvadratické momenty k neutrálnej osi.
5. Výsledný kvadratický moment celej plochy je potom súčet jednotlivých kvadratických momentov prepočítaných k neutrálnej osi.

K bodu 1. Určenie polohy ťažiska

Na výpočet súradnice ťažiska použijeme vzťah:

$$y_T = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 + S_3 \cdot y_3}{S_1 + S_2 + S_3}$$

$$y_T = \frac{30 \cdot 10 \cdot 75 + 10 \cdot 60 \cdot 40 + 60 \cdot 10 \cdot 5}{30 \cdot 10 + 10 \cdot 60 + 60 \cdot 10} = 33 \text{ mm}$$

K bodu 2. Rozdelenie plôch na základné obrazce je zrejmé z *obr. 6.11.*

K bodu 3. Určenie kvadratických momentov jednotlivých plôch.

Pretože všetky základné plochy sú obdĺžniky, platí pre ne vzťah:

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$J_{x1} = \frac{30 \cdot 10^3}{12} = 2\,500 \text{ mm}^4$$

$$J_{x2} = \frac{10 \cdot 60^3}{12} = 180\,000 \text{ mm}^4$$

$$J_{x3} = \frac{60 \cdot 10^3}{12} = 5\,000 \text{ mm}^4$$

K bodu 4. Prepočítanie kvadratických momentov k neutrálnej osi:

$$J'_{x1} = J_{x1} + S_1 \cdot a_1^2$$

$$J'_{x1} = 2\,500 + 30 \cdot 10 \cdot 42^2 = 531\,700\,\text{mm}^4$$

$$J'_{x2} = J_{x2} + S_2 \cdot a_2^2$$

$$J'_{x2} = 180\,000 + 10 \cdot 60 \cdot 7^2 = 209\,400\,\text{mm}^4$$

$$J'_{x3} = J_{x3} + S_3 \cdot a_3^2$$

$$J'_{x3} = 5\,000 + 60 \cdot 10 \cdot 28^2 = 475\,400\,\text{mm}^4$$

K bodu 5. Výsledný kvadratický moment plochy J_x:

$$J_x = J'_{x1} + J'_{x2} + J'_{x2}$$

$$J_x = 531\,700 + 209\,400 + 475\,400$$

$$J_x = 1\,216\,500\ \text{mm}^4 = 121{,}65\ \text{cm}^4$$

Zhrnutie:

Kvadratické momenty zložených plôch sa môžu sčítavať iba vtedy, ak sú vzťahované k spoločnej osi. Potom platí:

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i$$

Ak plochy nemajú spoločnú os súmernosti, potom všetky kvadratické momenty prierezu k ťažiskovým osiam jednotlivých plôch sa musia najskôr prepočítať ku rovnobežnej neutrálnej osi a až potom sčítať. Teda platí:

$$J = \sum_{i=1}^{n} (J_i + S_i \cdot a_i^2)$$

KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Ktorá prierezová veličina je charakteristická pre krútenie, ohyb a vzper?
2. Ako je definovaný kvadratický moment prierezu?
3. Čo je to polárny moment prierezu?
4. Aký je vzťah medzi kvadratickým a polárnym momentom prierezu?
5. Aký rozmer majú kvadratický a polárny moment prierezu?
6. Ako znie Steinerova veta a kedy sa používa?
7. Čo je to centrálna os a hlavná centrálna os?
8. Ako sa určuje kvadratický moment prierezu zložených plôch?

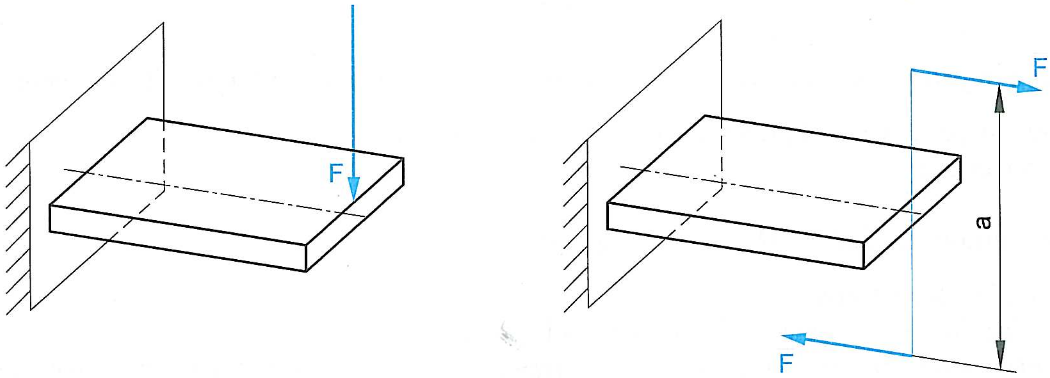
7 NAMÁHANIE OHYBOM

7.1 ZÁKLADNÉ POJMY

Najjednoduchší a najdôležitejší konštrukčný prvok, na ktorom si budeme vysvetľovať ohyb, je priamy nosník. Je to prút, ktorý má priečne rozmery omnoho menšie ako dĺžkové. Nosníky sú napr. hriadele, páky, čapy, traverzy a pod.

Nosník je namáhaný ohybom vtedy, ak je zaťažený silovou dvojicou alebo silou, pričom sa vytvárajú ohybové momenty v rovine kolmej na prierez nosníka.

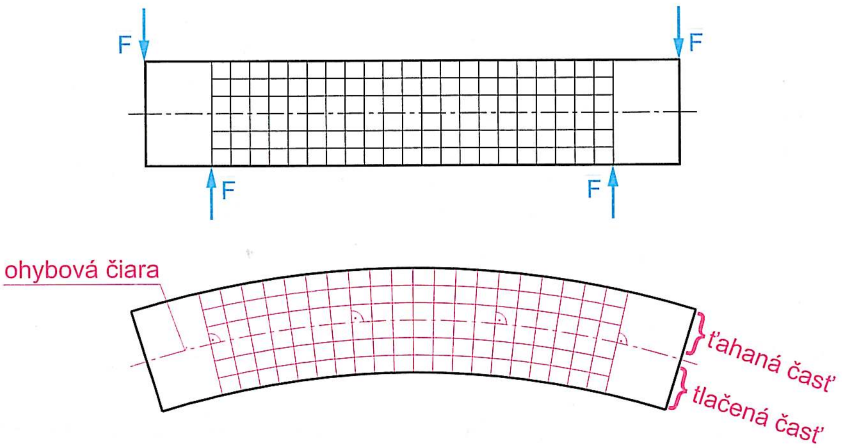
Namáhanie ohybom je obyčajne spojené s namáhaním šmykom (*obr. 7.1 a*). Pokiaľ to tak nie je, hovoríme o čistom ohybe (*obr. 7.1 b*). Pri čistom ohybe je ohybový moment vytváraný silovou dvojicou.



a) b)

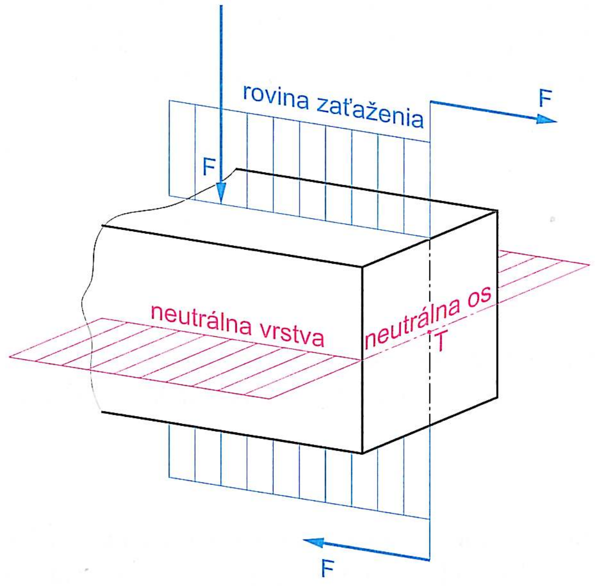
Obr. 7.1

Na teleso z pružného (elastického) materiálu obdĺžnikového prierezu, napr. gumy, vyznačíme sieť rovnobežných priamok a budeme ho zaťažovať podľa *obr. 7.2* silovými dvojicami.



Obr. 7.2

Pôsobením silových dvojíc sa pôvodne rovná os zohla – zakrivila. Deformovaná os sa nazýva ohybová čiara. Pozdĺžne čiary sa tiež zakrivili, ale zostali navzájom rovnobežné. Zvislé čiary zostali kolmé na zakrivenú os a navzájom sa k sebe natočili, nezostali rovnobežné. V hornej časti sa od seba vzdialili – vlákna sa predĺžili, v dolnej sa priblížili, vlákna sa skrátili. Medzi ťahanou a tlačenou časťou je vrstva, ktorá sa ani nepredĺžila ani neskrátila. Je to neutrálna vrstva. Priesečnica neutrálnej vrstvy s prierezom nosníka je neutrálna os. Neutrálna os prechádza ťažiskom prierezu. Natočené priečne roviny zostanú rovinami – neboria sa.



Obr. 7.3

Pri namáhaní ohybom je našou úlohou z daného zaťaženia a vyrátaných väzbových síl a momentov zistiť:

a) maximálne napätie, veľkosť prierezu alebo únosnosť nosníka,
b) tvar ohybovej čiary.

Vychádzame pritom zo zjednodušujúcich predpokladov a hypotéz:

1. Nosník je pôvodne priamy.
2. Všetky zaťažujúce sily a momenty ležia v jednej rovine.
3. V praxi pripúšťame iba veľmi malé priehyby a zakrivenia nosníkov a neuvažujeme zmenu vzájomnej polohy pôsobiacich síl vplyvom deformácie.
4. Pozdĺžne vlákna na seba navzájom nepôsobia.
5. Deformácia je daná tvarom ohybovej čiary.
6. Aj po deformácii zostávajú roviny prierezu rovinami a sú kolmé na ohybovú čiaru.

Zhrnutie:

Nosník je najdôležitejší konštrukčný prvok. Rozoznávame v zásade:
a) ohyb spôsobený silovou dvojicou – čistý ohyb,
b) ohyb spôsobený priečnymi silami – najčastejší prípad.
Pri ohybe riešime maximálne napätia, veľkosť prierezu alebo únosnosť nosníka a tvar ohybovej čiary.

7.2 ULOŽENIE NOSNÍKA, VÄZBOVÉ SILY ULOŽENIA

Nosníky sú uložené vo väzbách – podperách alebo pevne votknuté. Zaťaženia sa z nosníka prenášajú na väzby – podpery. Nosníky majú obmedzený pohyb, a preto v podperách – väzbách vznikajú sily, ktoré nazývame väzbovými silami uloženia. Pomocou týchto síl zostáva nosník v rovnováhe. Vopred ich nepoznáme, ale musíme ich počítať zo statických podmienok rovnováhy. Na riešenie nosníkov v rovine postačujú tri podmienky rovnováhy:

$$1.\ \sum_{i=0}^{n} F_{ix} = 0 \qquad 2.\ \sum_{i=0}^{n} F_{iy} = 0 \qquad 3.\ \sum_{i=0}^{n} M_i = 0$$

Počet a druhy podpier musia byť zvolené tak, aby sa v uvedených podmienkach nevyskytovali viac než tri neznáme zložky väzbových síl a momentov.

Pre priestorovú sústavu síl máme k dispozícii šesť podmienok rovnováhy:

$$1.\ \sum_{i=0}^{n} F_{ix} = 0 \qquad 2.\ \sum_{i=0}^{n} F_{iy} = 0 \qquad 3.\ \sum_{i=0}^{n} F_{iz} = 0$$

$$4.\ \sum_{i=0}^{n} M_{ix} = 0 \qquad 5.\ \sum_{i=0}^{n} M_{iy} = 0 \qquad 6.\ \sum_{i=0}^{n} M_{iz} = 0$$

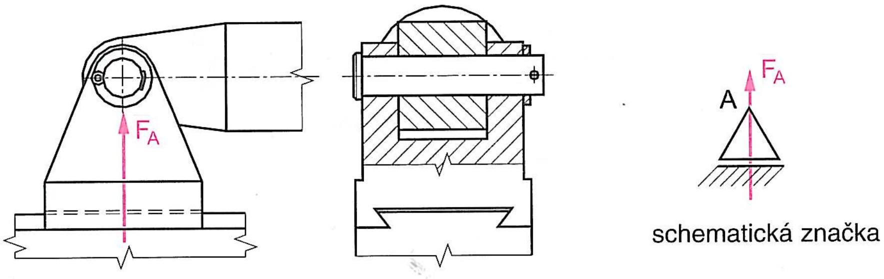
V tomto prípade nesmie byť viac ako šesť neznámych zložiek väzbových síl.

Pre rovinnú sústavu síl rozdeľujeme podpery na tri hlavné druhy:

1. posuvné vedenie (kĺbová pohyblivá podpera),
2. kĺbová pevná podpera (kĺb),
3. votknutie.

1. Posuvné vedenie (kĺbová pohyblivá podpera)

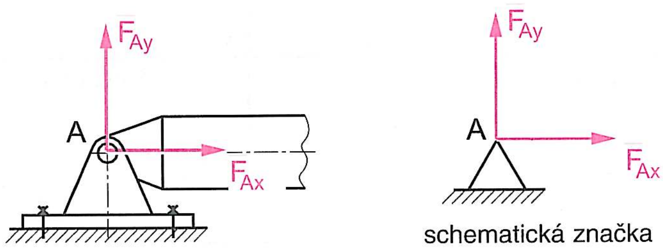
Toto uloženie umožňuje okrem otáčania okolo kĺbu aj posuv nosníka pozdĺž jeho osi po rovine uloženia. Väzbová sila nám predstavuje *jedinú neznámu – svoju veľkosť*. Smer väzbovej sily je kolmý na rovinu uloženia. Toto uloženie umožňuje tepelnú dilatáciu.



Obr. 7.4

2. Kĺbová pevná podpera (kĺb)

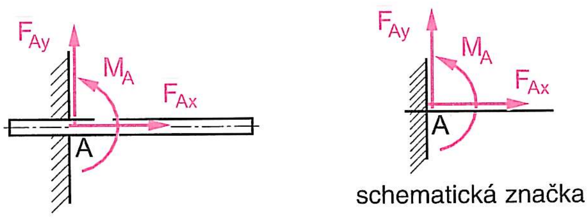
Táto podpera umožňuje nosníku otáčať sa okolo stredu kĺbu, ale znemožňuje akýkoľvek pohyb. Väzbová sila predstavuje dve neznáme zložky.



Obr. 7.5

3. Votknutie

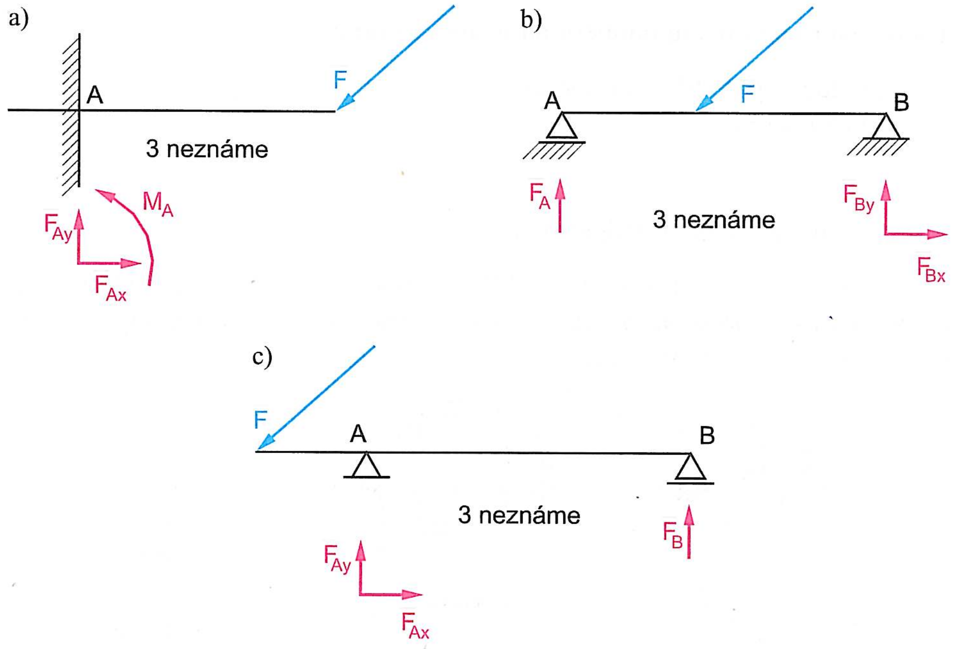
Toto uloženie neumožňuje žiadny pohyb alebo otáčanie konca nosníka. V mieste väzby vzniká väzbová sila neznámej veľkosti a smeru a väzbový moment, ktorý bráni otáčaniu. Neznámu silu nahrádzame dvoma na seba kolmými zložkami F_{Ax} a F_{Ay} a neznámy moment momentom vo votknutí M_A.



Obr. 7.6

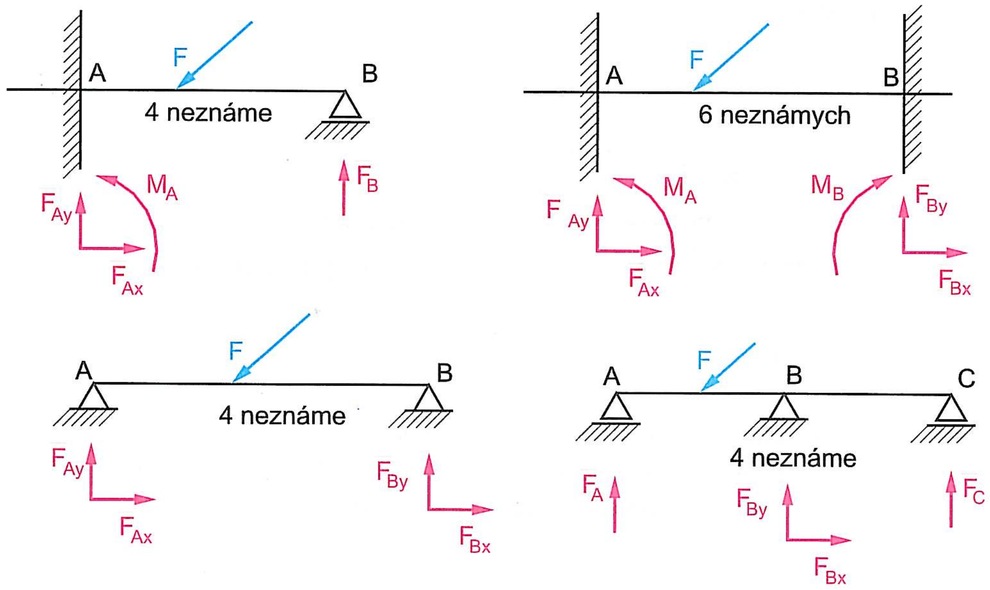
Spôsob uloženia nosníka určuje, či pri uvedených 3 podmienkach statickej rovnováhy môžeme určiť neznáme zložky väzbových síl a momentov. Podľa toho delíme nosníky na staticky určité a staticky neurčité. Pri rovinnom usporiadaní nesmie mať staticky určitý nosník viac neznámych zložiek väzbových síl a momentov než tri. Možné sú takéto spôsoby uloženia:

a) nosník votknutý na jednom konci,
b) nosník na dvoch podperách s kĺbovou a posuvnou podperou,
c) nosník s jedným alebo dvoma previsnutými koncami.



Obr. 7.7

Na *obr. 7.8* sú uvedené príklady staticky neurčitých nosníkov. Z obrázka vidno, že neznámych zložiek síl a momentov je viac ako statických podmienok rovnováhy.

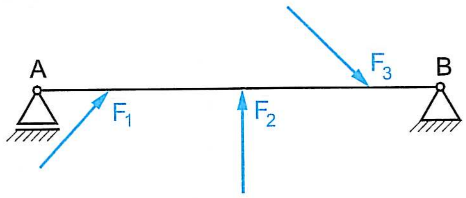


Obr. 7.8

7.3 DRUHY ZAŤAŽENIA SPÔSOBUJÚCE OHYB

Nosník prenáša zaťaženia od kolies, remeníc, tlaku vetra, vody a pod. Pri riešení nahrádzame skutočné súčiastky silami, spojitým bremenom alebo momentmi.

a) Zaťaženie osamelými silami



Obr. 7.9

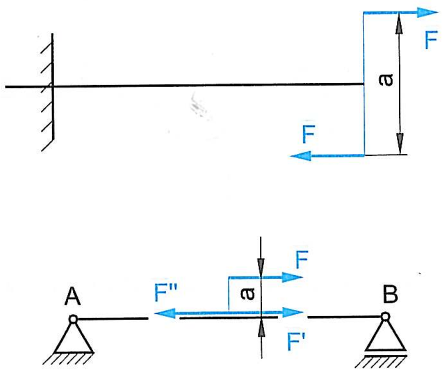
Sily F_1, F_2, F_3 sú osamelé sily, ktoré spôsobujú napr. ťah remeňa, ozubené kolesá, krátke bremená, väzbové sily a pod. Osamelá sila je v skutočnosti idealizáciou, pretože nahrádza jej pôsobenie na ploche podobne ako plošne rozloženú väzbovú silu v podpere alebo v ložiskovej panve.

b) Zaťaženie silovou dvojicou

Je to prípad špirálovej pružiny, kde dvojicu síl vyvoláva otáčanie kľúčom *obr. 7.10 a* alebo prípad závitovky na hriadeli zaťaženej silou rovnobežnou s osou hriadeľa *obr. 7.10 b*. V prvom prípade dvojica síl vytvára moment, ktorý ohýba nosník a v druhom prípade je navyše osová sila:

a)

b)



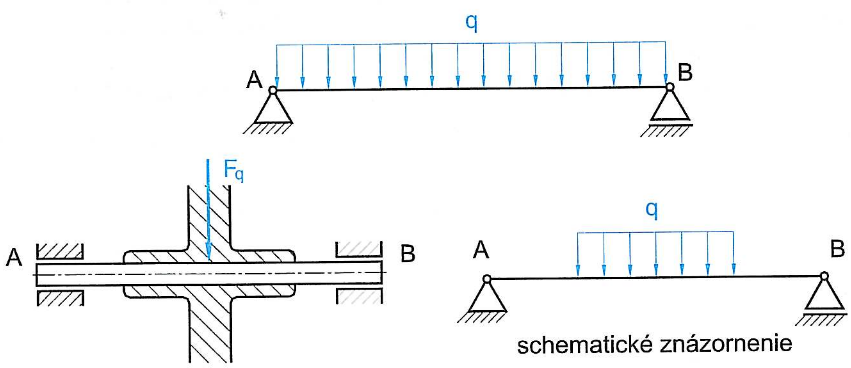
Obr. 7.10

c) Rovnomerne rozložené spojité bremeno

V tomto prípade ide hlavne o vlastnú tiaž, tiaž snehu, muriva, tlak vetra a pod.

a)

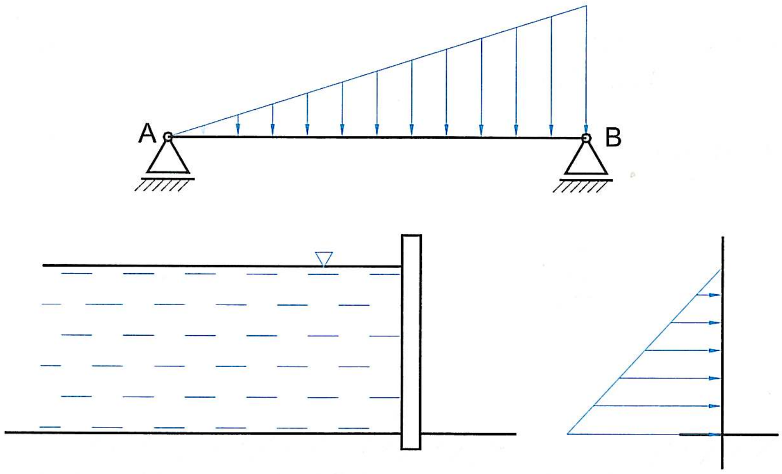
b)



Obr. 7.11

Zaraďujeme sem aj rozloženie sily prenášanej dlhým nábojom.

d) Rovnomerne narastajúce spojité bremeno

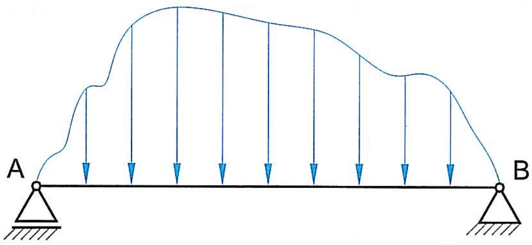


Obr. 7.12

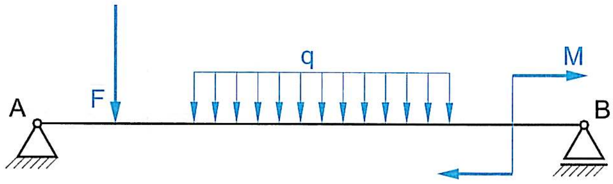
Tento spôsob zaťaženia sa vyskytuje hlavne pri tlaku vody na dosku stavidla.

e) Všeobecné zaťaženie spojitým bremenom

Vzniká pri ukladaní sypkých hmôt:



Obr. 7.13



Obr. 7.14

f) Kombinované zaťaženie

Pri tomto spôsobe zaťaženia sa vyskytuje niekoľko druhov zaťaženia súčasne. V praxi sa vyskytuje veľmi často pozri *obr. 7.14*.

Zhrnutie:

Pri riešení nosníka z hľadiska pružnosti musíme nosník riešiť najskôr zo statického hľadiska – uvolniť nosník t.j. nahradiť podpery väzbovými silami a vyriešiť ich.

Podpery môžu byť vytvorené kĺbovou podperou a posuvným kĺbom alebo votknutím. Posuvný kĺb predstavuje jednu neznámu zložku, pevný kĺb predstavuje dve neznáme a votknutie tri neznáme zložky. Ak na uvoľnený nosník pôsobí toľko neznámych zložiek, koľko je statických podmienok rovnováhy, hovoríme, že nosník je staticky určitý. Ak na nosník pôsobí viac neznámych väzbových zložiek – nosník je staticky neurčitý.

Zaťaženie nosníka môžu spôsobovať osamelé sily, silové dvojice, spojité bremená alebo kombinácia týchto zaťažení.

Kontrolné otázky:

1. Uveďte tri hlavné druhy uloženia nosníka.
2. Aký účel plnia podpery?
3. Koľko neznámych predstavujú jednotlivé druhy podpier?
4. Koľko statických podmienok rovnováhy poznáme pre rovinnú sústavu?
5. Kedy je nosník staticky určitý a kedy staticky neurčitý?
6. Akými spôsobmi môže byť zaťažený nosník?

7.4 SPÔSOBY ZISŤOVANIA VNÚTORNÝCH STATICKÝCH ÚČINKOV A ICH GRAFICKÉ ZNÁZORNENIE

Určením väzbových síl a momentov zo zaťaženia nosníka sme určili všetky vonkajšie sily pôsobiace na nosník. Vplyvom pôsobenia vonkajších síl dochádza k deformácii nosníka. Vnútorné sily a momenty, ktoré sa snažia deformácii zabrániť, sú v rovnováhe s vonkajšími silami a momentmi. Ak je táto rovnováha porušená, dochádza k poruche. Na zisťovanie vnútorných síl a momentov používame rovnaký spôsob ako v predchádzajúcich prípadoch – metódu mysleného rezu.

Postup je takýto:

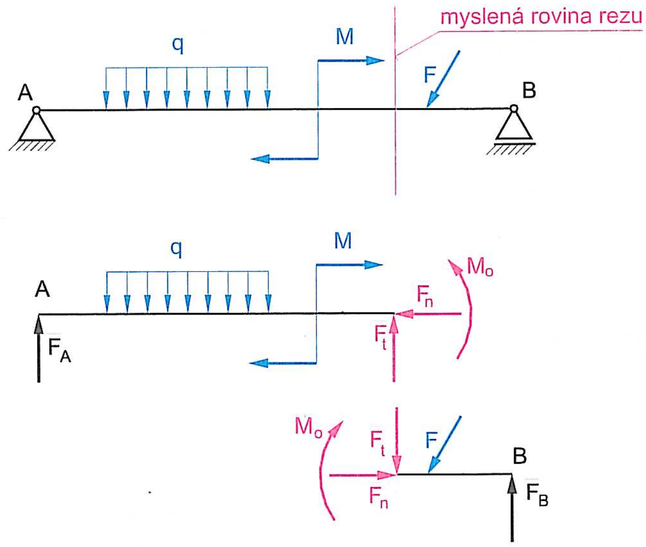
a) nosník uvoľníme a vyrátame väzbové sily a momenty,

b) vedieme myslený rez v mieste, kde chceme zistiť veľkosti vnútorných síl a momentov,

c) zložitejšiu časť nosníka odstránime,

d) odstránenú časť nahradíme vnútornými silami a momentmi, ktoré ju budú udržovať v rovnováhe,

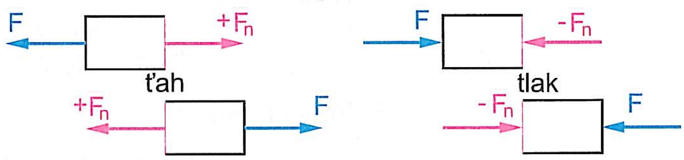
e) tieto sily vyriešime zo statických podmienok rovnováhy.



Obr. 7.15

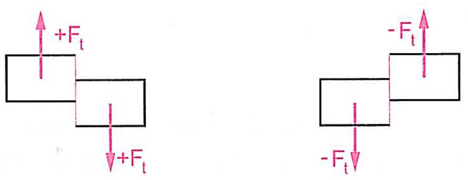
Zo statických podmienok rovnováhy vyriešime:

a) silu kolmú na myslený rez – normálovú silu F_n. Ak smeruje z prierezu von je kladná, ak do prierezu je záporná.



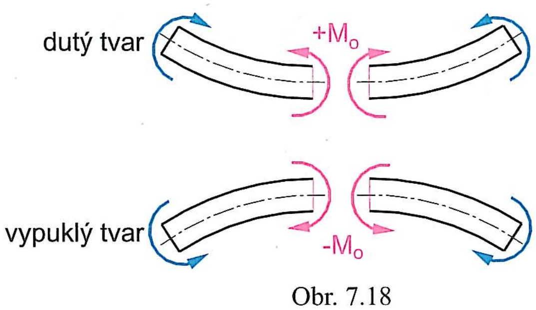
Obr. 7.16

b) silu pôsobiacu v rovine mysleného rezu – priečnu silu F_t. Je to sila prechádzajúca ťažiskom prierezu. Za kladnú považujeme tú priečnu silu, ktorá naľavo od roviny rezu pôsobí hore a napravo smerom dolu.



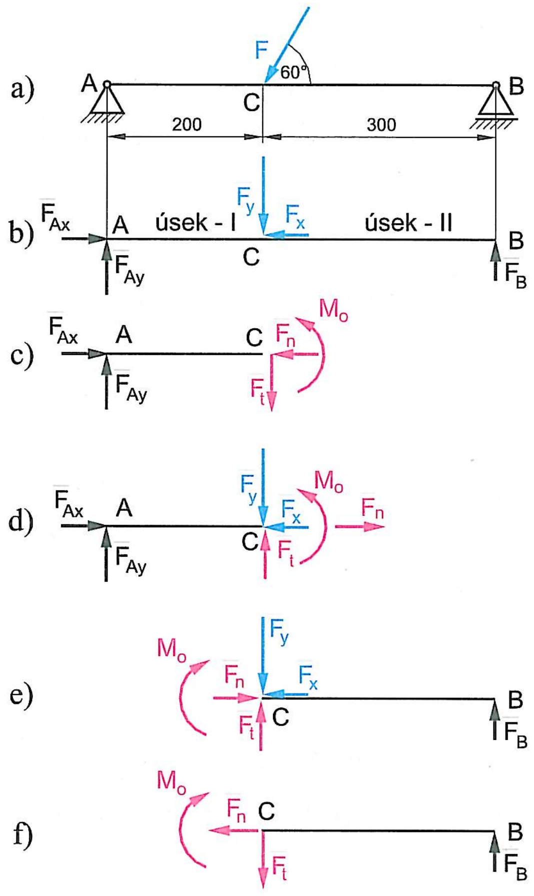
Obr. 7.17

c) moment pôsobiaci v rovine rezu – ohybový moment M_o. Je to algebrický súčet všetkých momentov vonkajších síl pôsobiacich na jednej strane rezu vzhľadom na ťažisko rezu.



Obr. 7.18

Výpočet normálových síl, priečnych síl a ohybových momentov ukážeme na nosníku zaťaženom silou $F = 1\,000$ N podľa *obr. 7.19 a*.



Obr. 7.19

Riešenie:

1. Zaťažujúcu silu rozložíme na zložky F_x a F_y (*obr. 7.19 b*).

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_x = 1000 \cdot \cos 60° = 500 \text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

$$F_y = 1000 \cdot \sin 60° = 866 \text{ N}$$

2. Nosník uvoľníme a zavedieme väzbové sily F_{Ax} a F_{Ay} v pevnom kĺbe a F_B v posuvnom kĺbe (*obr. 7.19 b*).

3. Zo statických podmienok rovnováhy určíme veľkosť väzbových síl:

$$\Sigma F_x = 0; \quad F_{Ax} - F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad F_{Ay} - F_y + F_B = 0$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad -200 \cdot F_y + 500\, F_B = 0$$

Z prvej rovnice vyplýva:

$$F_{Ax} = F_x = 500 \text{ N}$$

Z tretej rovnice:

$$F_B = \frac{200 \cdot F_y}{500} = 346{,}4 \text{N}$$

Z druhej rovnice:

$$F_{Ay} = F_y - F_B = 866 - 346{,}4 = 519{,}6 \text{ N}$$

4. Rozdelíme nosník na úseky podľa pôsobiacich síl.

úsek I – medzi bodmi *AC*

úsek II – medzi bodmi *CB*

Riešime vnútorné sily a momenty v bode *C*.

Najskôr vedieme rez bezprostredne vľavo od sily *F* a ponecháme si ľavú časť (*obr. 7.19 c*). Určíme statické podmienky rovnováhy, pričom pôsobenie odstránenej časti nahradíme vnútornými silami a momentmi:

$$\Sigma F_x = 0; \quad F_{Ax} - F_n = 0$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad F_{Ay} - F_t = 0$$

$$\Sigma M_C = 0; \quad -200 \cdot F_{Ay} + M_0 = 0$$

Z prvej podmienky vyplýva $F_n = F_{Ax} = 500$ N.

Z druhej podmienky zasa $F_{Ay} = F_t = 519{,}6$ N.

Z momentovej podmienky dostaneme: $M_0 = 200\, F_{Ay} = 103\,920$ Nmm.

Teraz veďme rez tesne vpravo od bodu C a ponecháme si ľavú časť nosníka (*obr. 7.19 d*). Potom statické podmienky rovnováhy:

$$\sum F_x = 0; \quad F_{Ax} - F_x + F_n = 0$$

$$\sum F_y = 0; \quad F_{Ay} - F_y + F_t = 0$$

$$\sum M_C = 0; \quad -200 \cdot F_{Ay} + M_0 = 0$$

Z prvej podmienky: $F_n = -F_{Ax} + F_x = -500 + 500 = 0\ \text{N}$

Z druhej podmienky: $F_t = F_y - F_{Ay} = 866 - 519{,}6 = 346{,}4\ \text{N}$

Z momentovej podmienky: $M_0 = 200 \cdot F_{Ay} = 103\,920\ \text{Nmm}$

Veďme rez bezprostredne vľavo od bodu C a ponecháme si pravú časť nosníka (*obr. 7.19 e*). Statické podmienky rovnováhy:

$$\sum F_x = 0; \quad F_n - F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0; \quad -F_y + F_t + F_B = 0$$

$$\sum M_C = 0; \quad -M_0 + 300 \cdot F_B = 0$$

Z prvej podmienky: $F_n = F_x = 500\ \text{N}$

Z druhej podmienky: $F_t = F_y - F_B = 866 - 346{,}4 = 519{,}6\ \text{N}$

Z momentovej podmienky: $M_0 = 300 \cdot F_B = 103\,920\ \text{Nmm}$

Veďme rez bezprostredne vpravo od bodu C a ponecháme si pravú časť nosníka (*obr. 7.19 f*). Statické podmienky rovnováhy:

$$\sum F_x = 0; \quad F_n = 0$$

$$\sum F_y = 0; \quad -F_t + F_B = 0$$

$$\sum M_C = 0; \quad -M_0 + 300 \cdot F_B = 0$$

Z prvej podmienky: $F_n = 0$

Z druhej podmienky: $F_t = F_B = 346{,}4\ \text{N}$

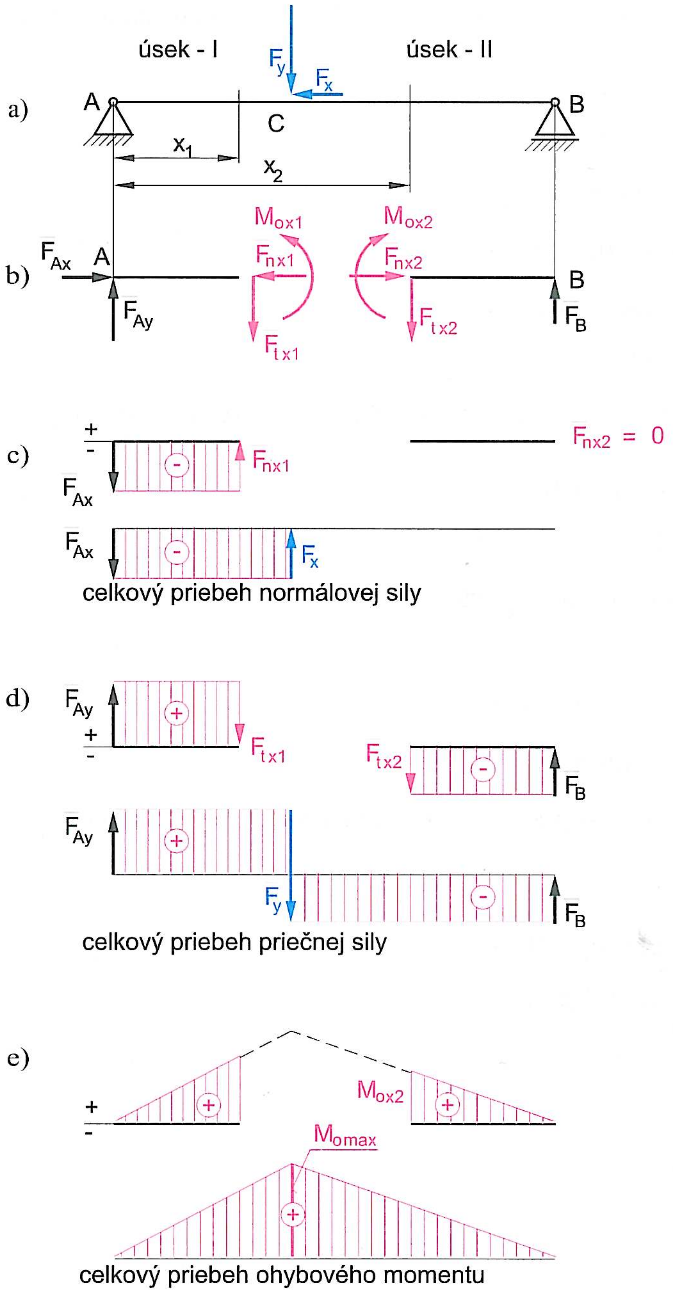
Z momentovej podmienky: $M_0 = 300 \cdot F_B = 103\,920\ \text{N}$

Z uvedeného príkladu vyplývajú takéto závery:

1. Normálová sila F_n v danom reze sa rovná algebrickému súčtu všetkých osových síl na jednej strane rezu. V mieste pôsobenia osovej sily mení svoju veľkosť skokom.
2. Veľkosť priečnej sily F_t v danom reze sa rovná algebrickému súčtu všetkých priečnych síl pôsobiacich na danej strane od mysleného rezu. V mieste pôsobenia priečnej sily mení svoju hodnotu skokom.
3. Ohybový moment M_0 sa rovná algebrickému súčtu všetkých momentov a silových dvojíc na riešenej strane od mysleného rezu. V mieste pôsobenia zaťažujúcej sily sa jeho veľkosť nemení.

Pri zisťovaní namáhania v ľubovoľnom mieste nosníka potrebujeme poznať priebehy týchto síl a momentov pozdĺž celej jeho osi. Preto vyrátané hodnoty síl a momentov graficky znázorňujeme tak, ako je to na *obr. 7.20*. Z obrázka vyplýva:

- Normálová sila je záporná (sily F_{Ax} a F_{nx1} vyvolávajú namáhanie tlakom) a nachádza sa iba v úseku I. V úseku II sa rovná 0.
- Priečna sila v úseku I je kladná a jej veľkosť sa rovná väzbovej sile v bode A. V úseku II je záporná a jej veľkosť sa rovná veľkosti väzbovej sily v bode B. V bode C sa mení skokom o hodnotu zaťažujúcej sily v tomto mieste.
- Veľkosť ohybového momentu sa pozdĺž nosníka mení a jeho maximálna veľkosť je v bode C.



Obr. 7.20

7.5 ZÁVISLOSŤ MEDZI PRIEČNOU SILOU A OHYBOVÝM MOMENTOM

Ak si všimneme obraz priečnych síl na *obr. 7.20* vidíme, že plocha, ktorú zaberajú po myslený rez je priamoúmerná veľkosti ohybového momentu v tomto reze. To platí pre každý prierez nosníka.

1. Plocha obrazca priečnych síl po riešený prierez určuje veľkosť ohybového momentu v tomto priereze.

Ak sa pozrieme na *obr. 7.20 e* vidíme, že maximálny ohybový moment je v mieste, kde priečna sila zmenila svoje znamienko.

2. Maximálny ohybový moment je v tom priereze, kde sa priečna sila rovná nule alebo kde mení svoje znamienko – Schwedlerova veta.

V praxi sa normálové sily vyskytujú menej často, a preto ďalej budeme riešiť iba nosníky zaťažené silami kolmými na os nosníka.

Zhrnutie:

1. Maximálny ohybový moment sa nachádza v mieste, kde sa priečna sila rovná nule alebo kde mení svoje znamienko.
2. Ohybový moment v danom priereze je daný veľkosťou plochy obrazca priečnej sily po daný prierez.
3. V úseku, kde sa priečna sila rovná nule, je ohybový moment konštantný.

7.5.1 Priebeh priečnych síl a ohybových momentov pozdĺž nosníka na dvoch podperách

a) Nosník zaťažený osamelými silami

Grafický priebeh síl sa kreslí po vyrátaní veľkosti väzbových síl F_{Ay} a F_B tak, ako je to na *obr. 7.21*. Je zvykom začínať zľava doprava, pričom nosník (vodorovná čiara) predstavuje nulovú hodnotu priečnej sily. Ak na nosník pôsobia iba osamelé sily, potom postupujeme takto. Prvú silu zľava umiestnime pôsobiskom na nosník.

Pretože medzi silami nie je žiadne silové pôsobenie, veľkosť priečnej sily sa nemení, môžeme viesť vodorovnú čiaru až po miesto pôsobenia druhej sily. Druhú silu umiestníme pôsobiskom na vodorovnú čiaru, pričom dodržíme jej orientáciu. Podobne postupujeme aj pri ostatných silách. Ak postupujeme správne a máme správne vyrátané hodnoty väzbových síl, potom musí posledná sila končiť na nosníku, lebo v opačnom prípade by neboli dodržané podmienky statickej rovnováhy nosníka.

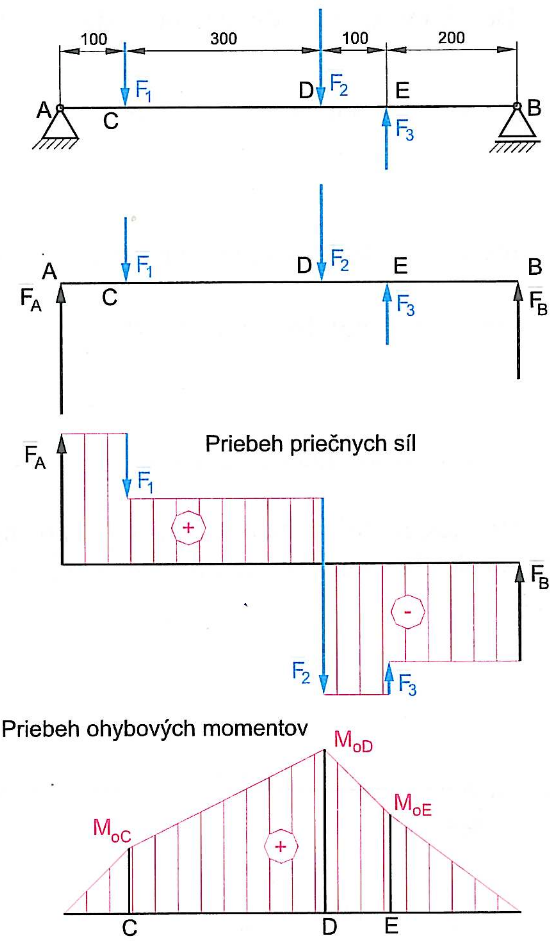
Zadané:

$F_1 = 100\,N$
$F_2 = 300\,N$
$F_3 = 50\,N$

Vyrátané:

$F_A = 200\,N$

$F_B = 150\,N$



Veľkosť momentov:

počítané zľava:

$M_{oC} = 100.F_A = 100.200 = 20\,000$ Nmm
$M_{oD} = 400.F_A - 300.F_1 = 400.200 - 300.100 = 50\,000$ N mm

počítané zprava:

$M_{oE} = 200.F_B = 200.150 = 30\,000$ Nmm
$M_{oD} = 300.F_B + 100.F_3 = 300.150 + 100.50 = 50\,000$ Nmm

Obr. 7.21

b) Nosník zaťažený spojitým bremenom

Ukážeme si teraz spôsob určovania priečnej sily a priebehu ohybových momentov v prípade, že sa na nosníku nachádza spojité bremeno.

Postup riešenia:

Spojité bremeno nahradíme osamelou silou pôsobiacou v ťažisku a nosník uvoľníme.

$$F_q = q \cdot l$$

Vyrátame väzbové sily, ktoré v tomto prípade budú mať veľkosť

$$F_A = F_B = \frac{F_q}{2}$$

V ľubovoľnom bode X určíme veľkosť priečnej sily a ohybového momentu

$$\sum F_x = 0;\ F_{nX} = 0$$

$$\sum F_y = 0;\ F_A - F_{qx} - F_{tX} = 0$$

$$\sum M_X = 0;\ -x \cdot F_A + \frac{x}{2}.F_{qx} + M_{oX} = 0$$

Z druhej rovnice vypočítame veľkosť priečnej sily v bode X

$$F_{tX} = F_A - F_{qx} = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x$$

$$F_{tX} = q \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right)$$

Bod X môže byť vzdialený od bodu A vo vzdialenosti x, ktorej hodnoty sú z intervalu:

$$0 \leq x \leq l$$

pre $x = 0$ – poloha v podpere A

$$F_{tX} = q \cdot \frac{l}{2}$$

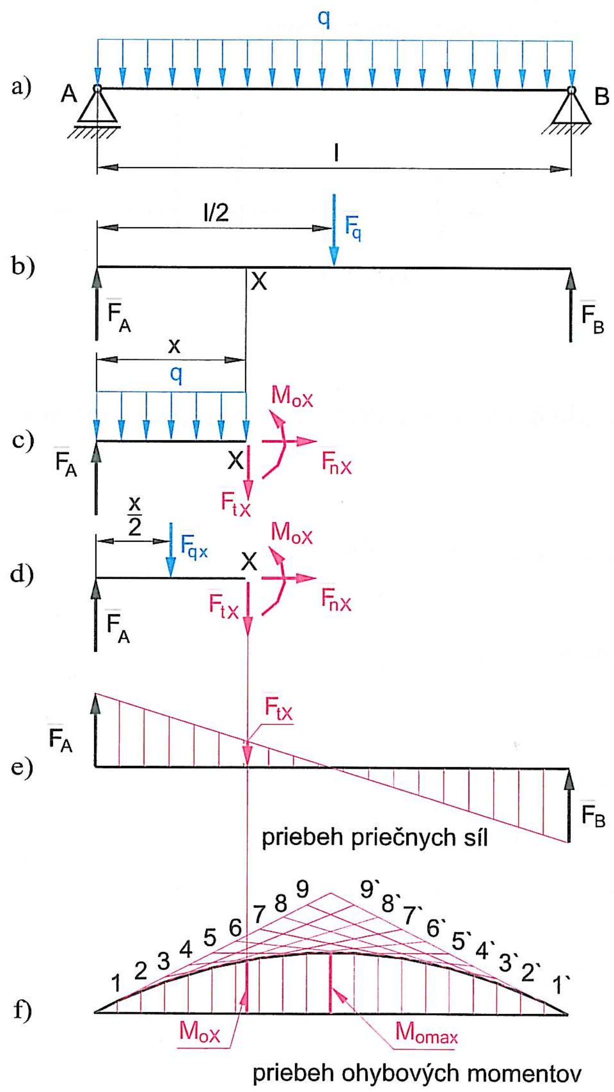
pre $x = \frac{l}{2}$ – poloha v strede nosníka $F_{tX} = 0$

pre $x = l$ – poloha v podpere B

$$F_{tX} = -q \cdot \frac{l}{2}$$

Z uvedeného vidieť, že priečna sila sa mení lineárne.

Pri kreslení priebehu priečnej sily je postup rovnaký ako v predchádzajúcom prípade okrem toho, že v mieste pôsobenia spojitého bremena sa sila $F_q = q \cdot l$ nemení skokom, ale plynulo po dĺžke pôsobenia spojitého bremena.



Obr. 7.22

Priebeh ohybového momentu je vidieť na *obr. 7.22 f.* Ohybový moment v mieste pôsobenia spojitého bremena sa mení kvadraticky a jeho hodnotu v ľubovoľnom bode X môžeme vyrátať takto:

$$\Sigma M_X = 0; \ -x \cdot F_A + \frac{x}{2} \cdot F_{qx} + M_{oX} = 0$$

z toho

$$M_{oX} = x \cdot \frac{q.l}{2} - \frac{x}{2} \cdot q \cdot x$$

$$M_{oX} = \frac{q}{2} \cdot \left(l \cdot x - x^2\right) \ \text{– rovnica paraboly}$$

Pre $x = 0$ sa $M_{oX} = 0$

Pre $x = \frac{l}{2}$ sa $M_{oX} = M_{o\max} = \frac{q \cdot l^2}{8}$

Pre $x = l$ sa $M_{oX} = \frac{q}{2} \cdot \left(l \cdot x - x^2\right) = \frac{q}{2} \cdot \left(l^2 - l^2\right) = 0$

Priebeh ohybového momentu môžeme nakresliť aj pomocou konštrukcie približnej paraboly, ktorá je zrejmá z *obr. 7.22 f.* Vznikne ako obalová krivka k úsečkám.

Teraz si vyriešime nosník zaťažený kombinovane osamotenou silou $F = 600$ N a spojitým bremenom $q = 5$ Nmm^{-1} podľa *obr. 7.23.*

Z *obr. 7.23* b určíme podmienky rovnováhy:

$$\Sigma F_y = 0; \quad F_A - F - F_q + F_B = 0$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad 50 \cdot F + 250 \cdot F_q - 400 \cdot F_B = 0$$

pričom $F_q = q \cdot l = 5 \cdot 200 = 1\,000$ N

$$F_B = \frac{50 \cdot F + 250 \cdot F_q}{400}$$

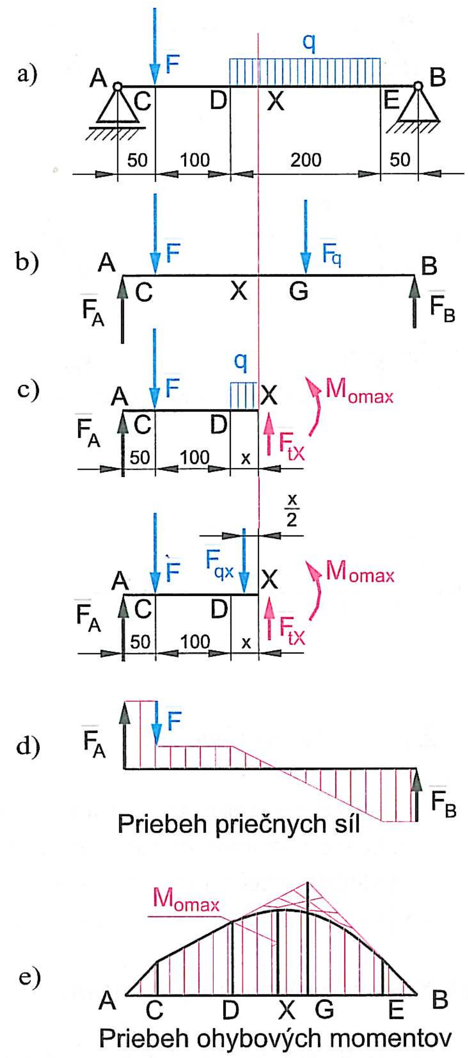
$$F_B = \frac{50 \cdot 600 + 250 \cdot 1000}{400}$$

$$F_B = 700 \text{ N}$$

$$F_A = F + F_q - F_B$$

$$F_A = 600 + 1000 - 700$$

$$F_A = 900 \text{ N}$$



Obr. 7.23

Priebeh priečnych síl vidno na *obr. 7.23 d*. Miesto pôsobenia najväčšieho momentu môžeme zistiť graficky, odmeraním z diagramu priebehu priečnej sily alebo výpočtom. Pri použití výpočtovej metódy vychádzame z podmienky, že v mieste pôsobenia maximálneho momentu $M_{o\,max}$ sa priečna sila rovná nule. V našom prípade bude toto miesto vzdialené od podpery A v intervale $150 \leq l \leq 350$ mm. V tomto mieste urobme myslený rez tak, aby dĺžka spojitého bremena bola x (*obr. 7.23 c*).

Pre výpočet maximálneho momentu určíme z *obr. 7.23 c* podmienky rovnováhy:

$$\sum F_Y = 0; \quad F_A - F - F_{qx} + F_{tX} = 0$$

$$\sum M_X = 0; \quad -(150 + x) \cdot F_A + (100 + x) \cdot F + \frac{x}{2} \cdot F_{qx} + M_{oX} = 0$$

Platí:

$$F_{tX} = 0$$

$$F_{qx} = q \cdot x$$

Výpočet miesta pôsobenia maximálneho momentu dostaneme po dosadení a úprave:

$$x = \frac{F_A - F}{q}$$

$$x = \frac{900 - 600}{5}$$

$$x = 60 \text{ mm}$$

Maximálny moment bude teda vo vzdialenosti 60 mm od bodu D. Jeho veľkosť vypočítame z momentovej podmienky rovnováhy k bodu X, ak do momentovej podmienky dosadíme za $x = 60$ mm.

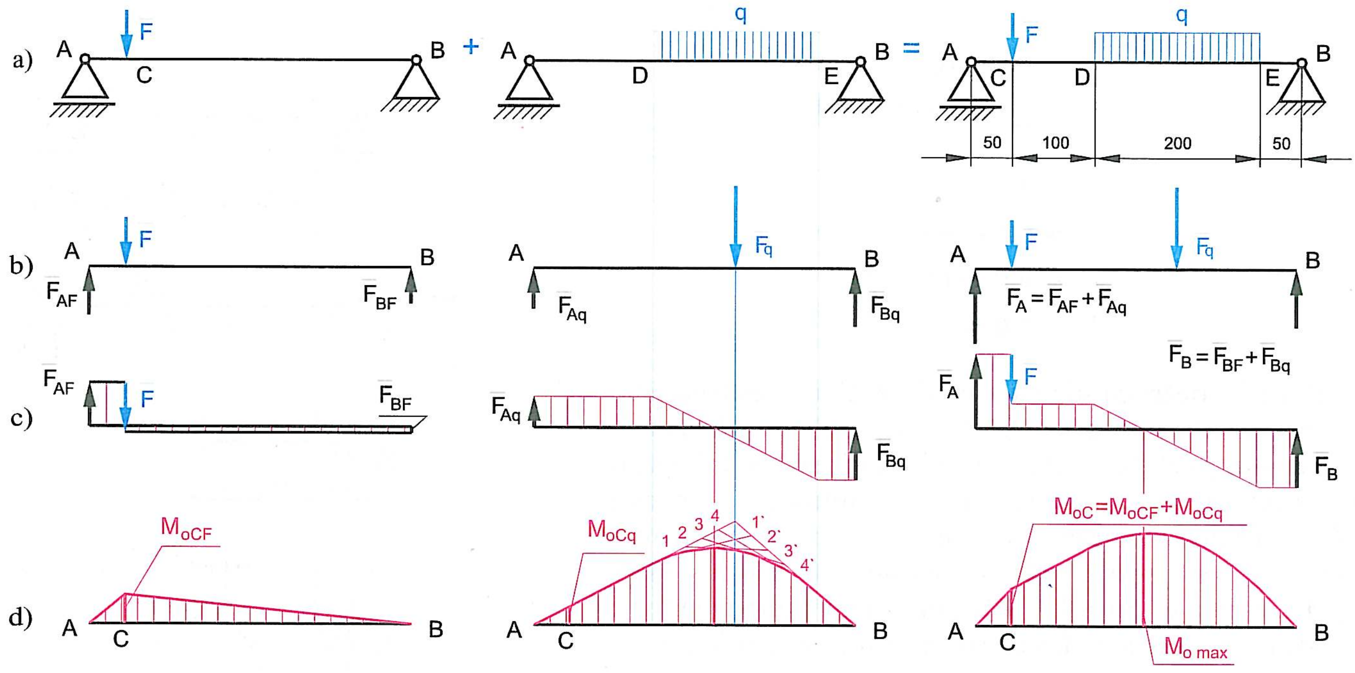
$$M_{oX} = (150 + x) \cdot F_A - (100 + x) \cdot F - \frac{x}{2} \cdot F_{qx}$$

kde $F_{qx} = q \cdot x$

$$M_{oX} = (150 + 60) \cdot 900 - (100 + 60) \cdot 600 - \frac{60}{2} \cdot 5 \cdot 60$$

$$M_{oX} = 84\,000 \text{ Nmm}$$

Riešenie predchádzajúcej úlohy je možné vykonať metódou skladania účinkov (superpozície). Princíp metódy je v tom, že celkové zaťaženie nosníka rozdelíme na jednotlivé zaťaženia a nosník riešime samostatne pre každé čiastkové zaťaženie. Výsledný účinok dostaneme algebrickým súčtom čiastkových účinkov.



Obr. 7.24

Z obr. 7.24 vyplýva, že:

– celkové zaťaženie je súčtom čiastočných zaťažení nosníka,
– celkové väzbové sily sú súčtom väzbových síl jednotlivých zaťažení,
– výsledný priebeh priečnych síl je súčtom priebehu priečnych síl jednotlivých zaťažení,
– výsledný priebeh momentov je súčtom priebehu momentov jednotlivých zaťažení.

c) Nosník zaťažený momentom

Tento prípad nastáva vtedy, ak je napr. na hriadeli uložené ozubené koleso so šikmými zubami, kužeľové koleso, závitovkové koleso alebo závitovka. Okrem sily kolmej na hriadeľ, o ktorej v uvedenom príklade neuvažujeme, tu vzniká sila rovnobežná s osou hriadeľa, ktorá v určitej vzdialenosti od osi nosníka vytvára zaťažujúci moment. Tento moment dostaneme, ak v osi nosníka zavedieme dvojicu síl, ktoré sú rovnako veľké ako zaťažujúca sila, ale majú navzájom opačnú orientáciu. Sila F' spolu so zaťažujúcou silou F vytvára moment silovej dvojice $M = c \cdot F$. Sila F'' pôsobí v osi nosníka a vytvára normálové zaťaženie.

Postup pri riešení uvedeného nosníka je rovnaký ako v predchádzajúcich prípadoch:

a) nosník uvoľníme a zavedieme väzbové sily,

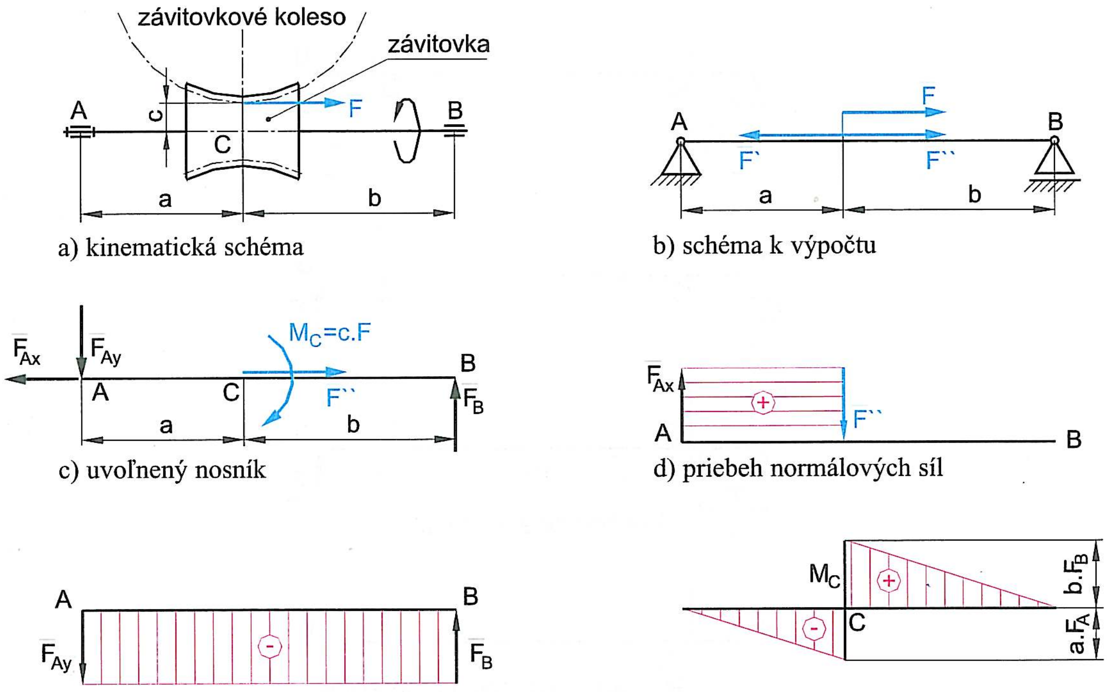
b) vyrátame veľkosť väzbových síl:

$$\sum F_x = 0; \; -F_{Ax} + F'' = 0$$
$$\sum F_y = 0; \; -F_{Ay} + F_B = 0$$
$$\sum M_A = 0; \; -M_C + (a+b) \cdot F_B = 0$$
$$F_B = \frac{M_C}{a+b}$$
$$F_{Ay} = F_B$$

c) vyrátame veľkosť ohybového momentu v bode C.

Veľkosť ohybového momentu riešime tesne pred bodom C. Jeho hodnota je v zmysle orientácie podľa *obr. 7.25 c* záporná a platí:

$$M_{oC-} = -a \cdot F_{Ay}$$



a) kinematická schéma

b) schéma k výpočtu

c) uvoľnený nosník

d) priebeh normálových síl

d) priebeh priečnych síl

f) priebeh ohybových momentov

Obr. 7.25

Teraz riešime veľkosť ohybového momentu tesne za bodom *C*. Urobíme algebrický súčet všetkých momentov na riešenej strane:

$$M_{oC+} = -a \cdot F_{Ay} + M_C$$

Ak za M_C dosadíme výraz

$$M_C = (a + b) \cdot F_{Ay}$$

dostaneme:

$$M_{oC+} = -a \cdot F_{Ay} + (a + b) \cdot F_{Ay}$$

$$M_{oC+} = b \cdot F_{Ay}$$

d) nakreslíme priebeh priečnej sily a ohybového momentu. V mieste pôsobenia momentu silovej dvojice sa priebeh momentu mení skokom o hodnotu zodpovedajúcu momentu silovej dvojice (*obr. 7.25. f, g*).

Špeciálny prípad nastáva, ak je nosník zaťažený rovnakými silami pôsobiacimi v rovnakej vzdialenosti od podpier. Sily spolu s väzbovými silami vytvárajú silové dvojice (*obr. 7.26*).

Väzbové sily:

$$F_A = F_B = F$$

Medzi bodmi *A – C* je veľkosť momentu:

$$M_{oM} = m \cdot F_A$$

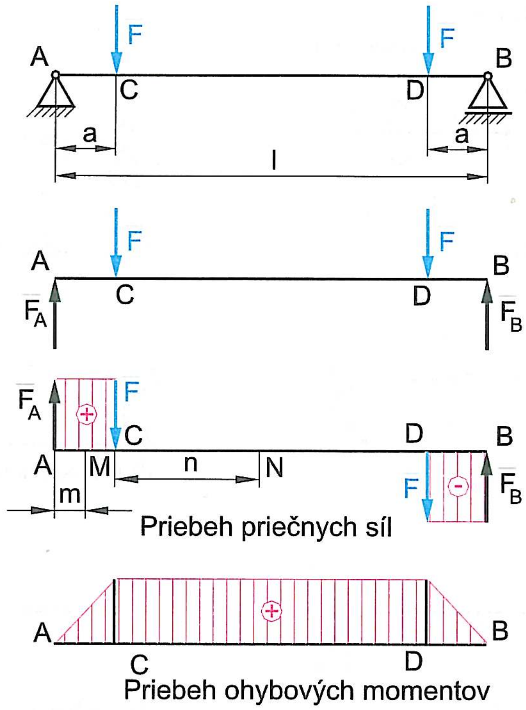
Medzi bodmi *C – D* je moment:

$$M_{oN} = (a + n) \cdot F_A - n \cdot F$$

$$M_{oN} = a \cdot F_A + n \cdot F - n \cdot F$$

$$M_{oN} = a \cdot F_A = a \cdot F$$

Z toho vyplýva, že medzi bodmi *C – D* je ohybový moment konštantný. V tomto úseku je nosník namáhaný čistým ohybom. Veľmi podobne sú namáhané nápravy železničných vagónov.



Obr. 7.26

Zhrnutie:

Aj keď nepoznáme zaťaženie nosníka, z priebehu priečnych síl a ohybových momentov môžeme určiť typ zaťaženia v jednotlivých úsekoch:

a) Nosníku, ktorý je zaťažený osamelými silami, odpovedá stupňovitý obrazec priečnych síl a momentový obrazec je vytvorený lomenou čiarou. V mieste pôsobenia osamelej sily je zlom v obrazci priečnej sily aj v momentovom obrazci.

b) V úsekoch nosníka so spojitým bremenom sa obrazec priečnych síl mení postupne, priamočiaro a obrazec ohybových momentov sa mení podľa paraboly.

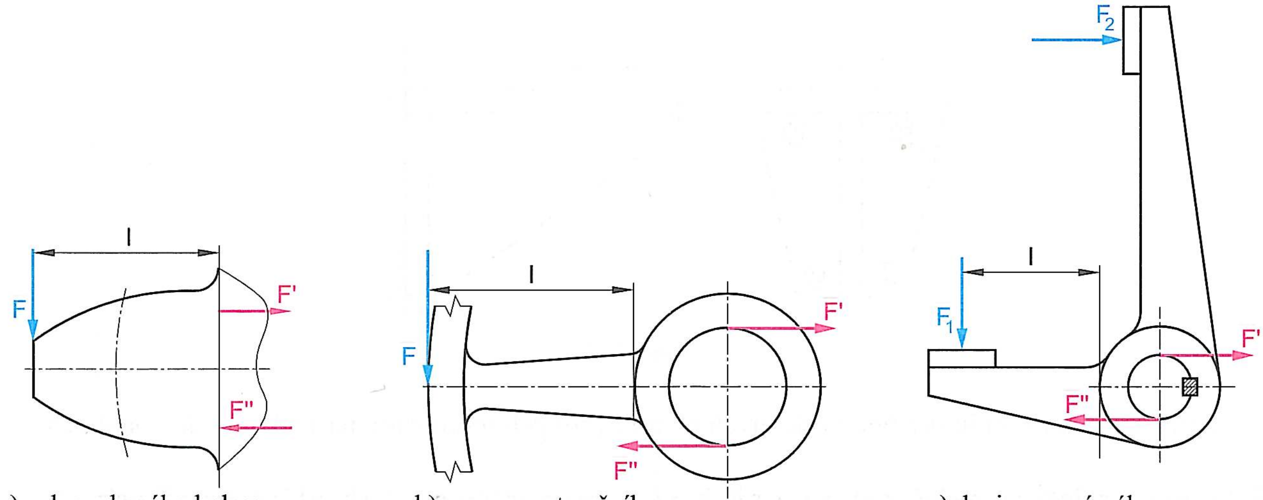
c) Ak je nosník zaťažený momentom, obrazec priečnych síl je v tomto úseku rovnaký, ohybový moment sa však v mieste pôsobenia zaťažujúceho momentu mení skokom.

d) V koncovej kĺbovej podpere sa priečna sila rovná väzbovej sile a ohybový moment sa tu rovná nule.

7.5.2 Spôsoby vytvorenia votknutých nosníkov

Votknuté nosníky zabraňujú akémukoľvek posuvu alebo otáčaniu sa konca nosníka. V mieste votknutia vznikne väzbová sila F_A neznámej veľkosti a smeru a väzbový moment M_A, ktorý má rovnakú veľkosť ako súčet všetkých momentov vznikajúcich zaťažením nosníka, ale má opačný zmysel. Zaoberajme sa teraz otázkou ako vzniká moment – teda dvojica síl vo votknutí. Votknutie môže byť urobené niekoľkými spôsobmi, a preto je aj vytváranie väzbového momentu rôzne:

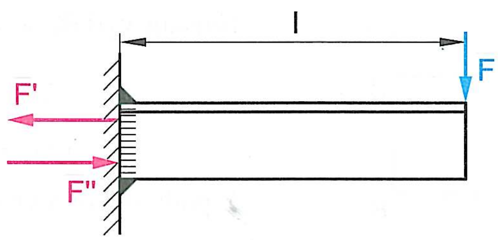
a) Votknutý nosník tvorí s ostatným materiálom jeden celok



a) zub ozubeného kolesa b) rameno zotrvačníka c) dvojramenná páka

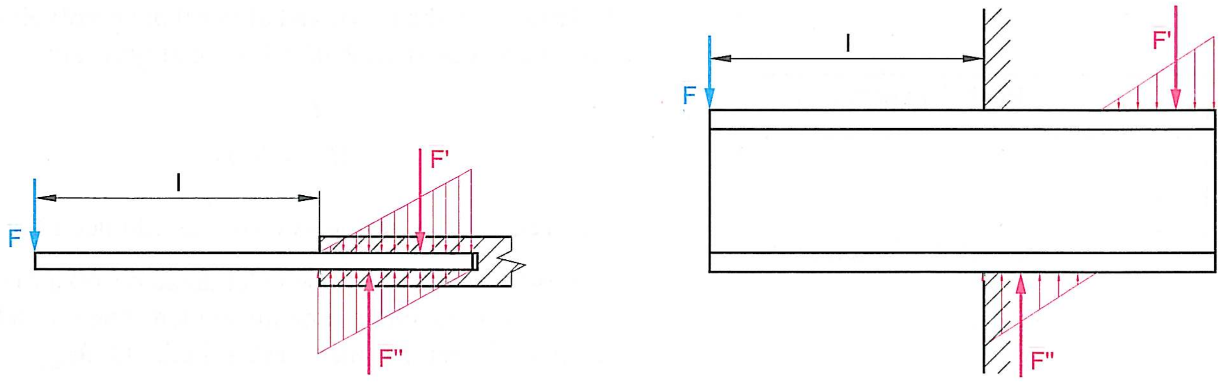
Obr. 7.27

b) Nosník je privarený



Obr. 7.28

c) Votknutie je vytvorené zverným spojením, upnutím v upínacom zariadení, zabetónovaním alebo zamurovaním

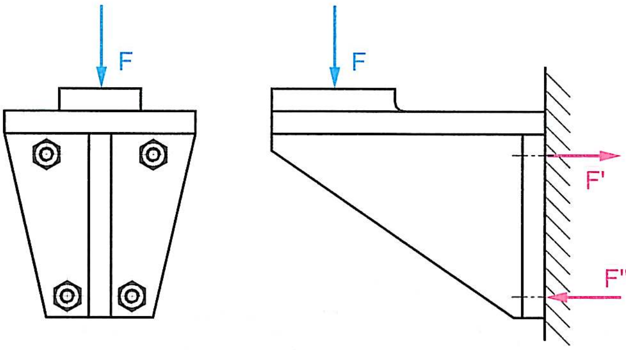


a) lícované uloženie nosníka b) votknutý nosník uložený v murive

Obr. 7.29

Najjednoduchší prípad nastane vtedy, ak votknutie vznikne zvarovým spojom alebo zalícovaním. Vtedy môžeme predpokladať, že tlak bude narastať rovnomerne od nuly po maximum po celej dĺžke uloženia. Za tohto predpokladu pôsobia sily vytvárajúce moment v ťažiskách zaťažujúcich plôch (trojuholníkov). V prípade, že votknutie je vytvorené v murive, môže nastať nepatrné posunutie vplyvom nedokonalého votknutia. Pri určitom zjednodušení môžeme predpokladať, že tlak sa rozloží podobne ako je to na *obr. 7.29 b*.

d) Skrutkovým spojom



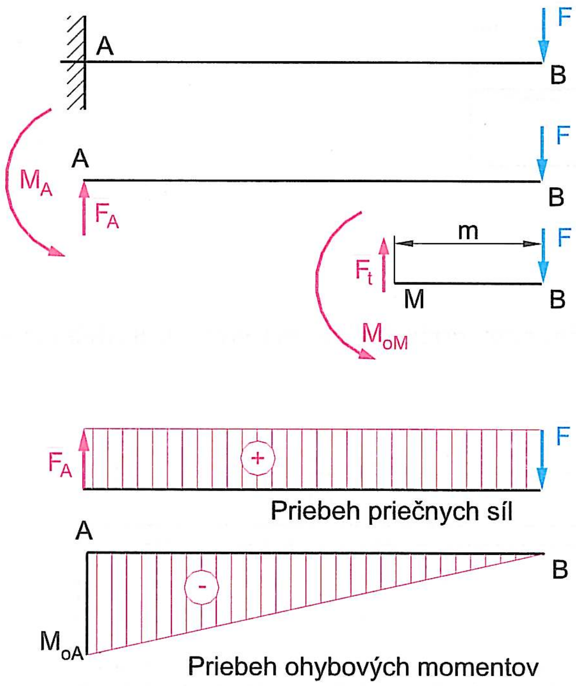
Obr. 7.30

Teraz pristúpme k riešeniu priebehu priečnych síl a ohybových momentov na votknutých nosníkoch.

7.5.3 Riešenie priebehu priečnych síl a ohybových momentov na votknutých nosníkoch

a) Votknutý nosník zaťažený osamelými silami

Najskôr preriešime votknutý nosník zaťažený osamelou silou na konci.



Obr. 7.31

Najskôr vyriešime veľkosť väzbovej sily a momentu.

$$\Sigma F_y = 0; \quad F_A - F = 0$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad M_A - F \cdot l = 0$$

Z podmienok rovnováhy vyplýva:

$$F_A = F$$

$$M_A = F \cdot l$$

Teraz vyriešime veľkosti priečnych síl a ohybových momentov. Použijeme na to metódu mysleného rezu. Myslený rez vedieme vo vzdialenosti m od voľného konca nosníka bodom M. Z *obr. 7.31* je zrejmé, že:

$$F_t = F$$

$$M_{oM} = F \cdot m$$

Z uvedeného môžeme vyvodiť nasledujúce závery:

- veľkosť priečnej sily je po celej dĺžke nosníka rovnaká,
- veľkosť ohybového momentu sa mení lineárne od 0 na voľnom konci po maximálnu hodnotu $M_{omax} = F \cdot l$ v mieste votknutia.

Riešme priebeh priečnych síl a priebeh ohybových momentov na nosníku podľa *obr. 7.32*, ak $F_1 = 200$ N, $F_2 = 300$ N, $F_3 = 500$ N.

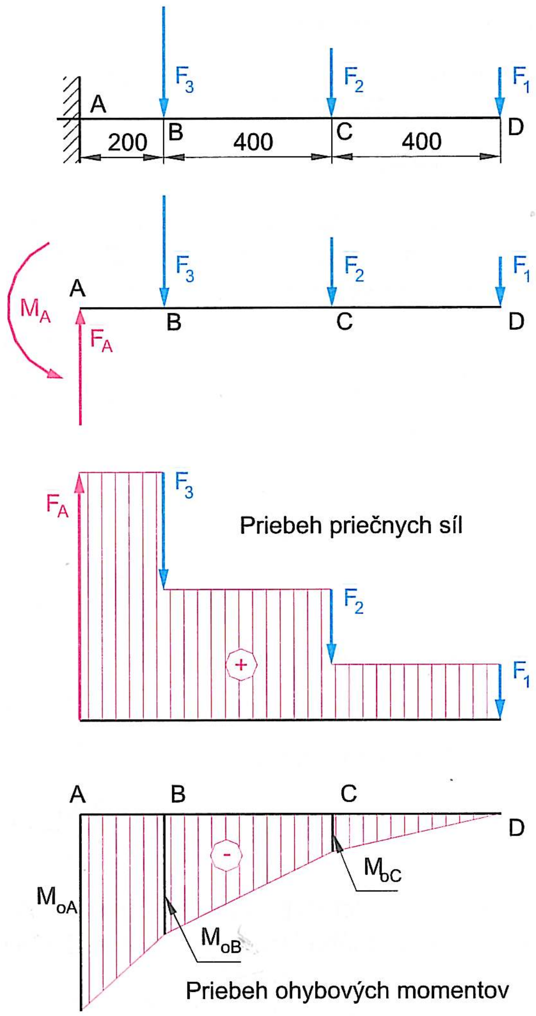
Ohybové momenty vo významných bodoch:

$$M_{oC} = -400 \cdot F_1 = -80\,000 \text{ Nmm}$$

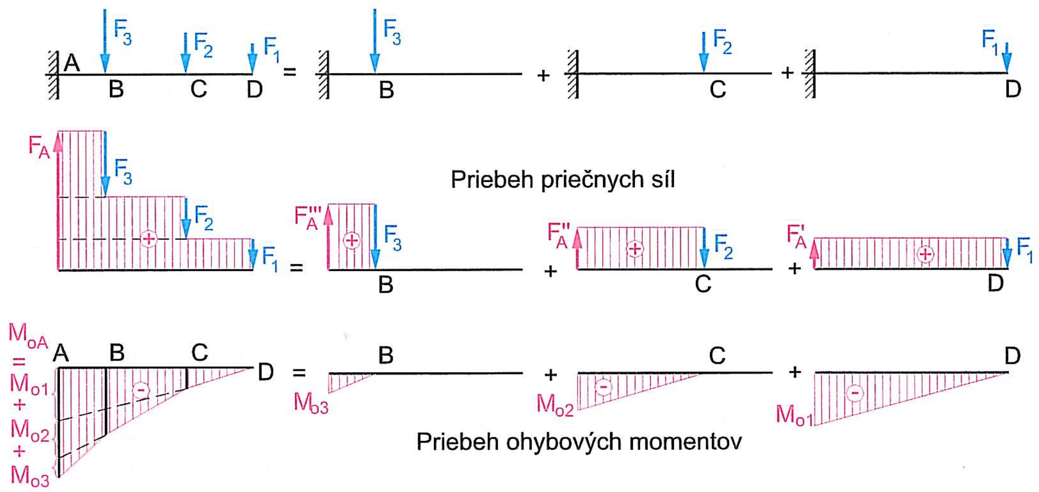
$$M_{oB} = -800 \cdot F_1 - 400 \cdot F_2 = -280\,000 \text{ Nmm}$$

$$M_{oA} = -1\,000 \cdot F_1 - 600 \cdot F_2 - 200 \cdot F_3 = -480\,000 \text{ Nmm}$$

Riešme tento príklad metódou skladania účinkov (superpozície).



Obr. 7.32



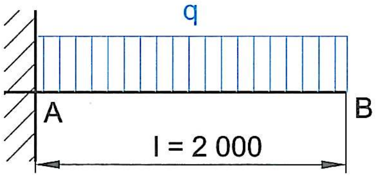
Obr. 7.33

Poznámka:

Tento spôsob sa často používa pri riešení nosníkov s kombinovaným zaťažením, kde by normálne riešenie viedlo k zložitým vzťahom.

b) Votknutý nosník zaťažený spojitým bremenom

Riešme priebeh priečnych síl a ohybových momentov na votknutom nosníku zaťaženom vlastnou hmotnosťou. Nosník je vytvorený z profilu I 180 STN 42 5550.



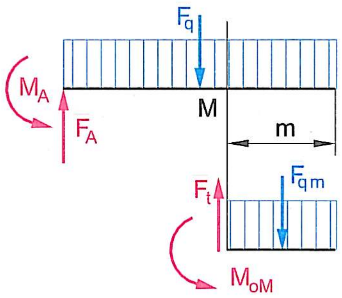
Obr. 7.34

Riešenie:

Najskôr musíme zistiť veľkosť bremena. Podľa strojníckych tabuliek je pre daný profil hmotnosť jedného metra jeho dĺžky 22 kgm^{-1}. Z toho vyplýva, že veľkosť bremena q = 0,22 Nmm^{-1}.

$$F_q = l \cdot q = 0{,}22 \cdot 2\,000 = 440 \text{ N}$$

Napíšeme podmienky rovnováhy, z ktorých vyrátame väzbovú silu a moment



Obr. 7.35

$$\sum_{i=0}^{n} F_{iy} = 0; \qquad F_A - F_q = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} M_{iA} = 0; \qquad M_A - \frac{l}{2} \cdot F_q = 0$$

Z prvej podmienky vyplýva:

$$F_A = F_q = 440 \text{ N}$$

Z druhej podmienky:

$$M_A = \frac{l}{2} \cdot F_q = \frac{2\,000}{2} \cdot 440 = 440\,000 \text{ Nmm}$$

V ľubovoľnom bode nosníka M vedieme myslený rez a pre časť nosníka, ktorú budeme riešiť, napíšeme podmienky rovnováhy. Vzdialenosť bodu M od voľného konca nosníka môže byť v rozsahu $0 \leq m \leq l$.

$$\sum_{i=0}^{n} F_{iy} = 0; \qquad F_t - F_{qm} = 0$$

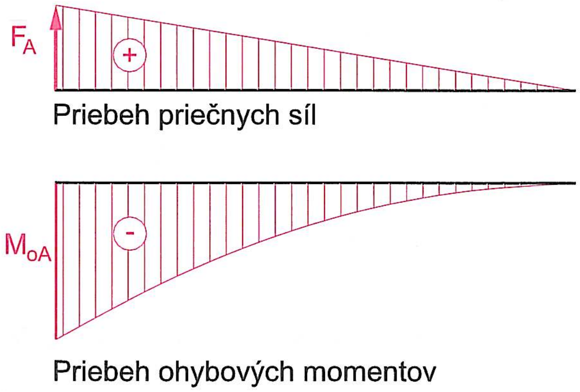
$$\sum_{i=0}^{n} M_{iM} = 0; \qquad M_{oM} - \frac{m}{2} \cdot F_{qm} = 0$$

Priečna sila v bode M:

$$F_t = F_{qm} = m \cdot q$$

Ohybový moment M_{oM} je v tomto mieste:

$$M_{oM} = -\frac{m}{2} \cdot F_{qm} = -\frac{m}{2} \cdot q \cdot m = -\frac{m^2 \cdot q}{2}$$



Obr. 7.36

Z odvodených vzťahov vyplýva, že priečna sila sa mení lineárne od nuly v bode B po maximum v bode A. Ohybový moment sa mení kvadraticky tak, že v bode B je jeho hodnota nulová a maximálna je v mieste votknutia (v bode A).

$$M_{oM} = -\frac{l^2 \cdot q}{2} = -\frac{2\,000^2 \cdot 0{,}22}{2} = -440\,000 \text{ Nmm}$$

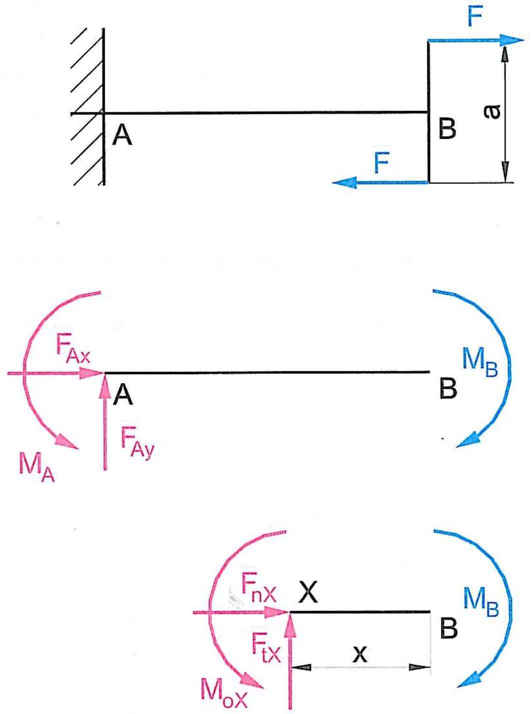
Priebeh priečnych síl a ohybových momentov vidieť na *obr. 7.36*.

Zhrnutie:

Jednou z najdôležitejších metód pružnosti a pevnosti je metóda skladania účinkov alebo superpozície. Táto metóda umožňuje rozloženie zložitých úloh na jednoduché a sčítaním jednotlivých účinkov dostaneme výsledný účinok.

c) Votknuté nosníky zaťažené momentom

Tento spôsob zaťaženia vzniká napríklad pri priťahovaní skrutiek pomocou kľúča na dvojramennej páke.



Obr. 7.37

Z podmienok rovnováhy vyriešime väzbové sily a momenty:

$$\Sigma F_x = 0; \quad F_{Ax} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad F_{Ay} = 0$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad M_A - M_B = 0$$

Z podmienok rovnováhy vyplýva, že pri tomto spôsobe zaťaženia nevznikajú väzbové sily

$$F_{Ax} = 0; \quad F_{Ay} = 0$$

a väzbový moment je rovnako veľký, ale opačne orientovaný ako zaťažujúci moment

$$|M_A| = |-M_B|$$

Veďme v bode X vo vzdialenosti x od bodu B myslený rez a riešme vnútorné sily a momenty, ktoré tu pôsobia.

$$\Sigma F_x = 0; \quad F_{nX} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad F_{tX} = 0$$

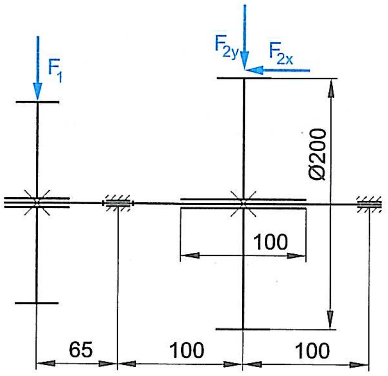
$$\Sigma M_X = 0; \quad M_{oX} - M_B = 0$$

Z podmienok rovnováhy vyplýva, že vo votknutom nosníku zaťaženom momentom

- nevznikajú normálové ani priečne sily,
- ohybový moment je medzi zaťažujúcim a väzbovým momentom rovnaký.

7.5.4 Riešenie priebehu priečnych síl a ohybových momentov nosníkov zaťažených kombinovaným zaťažením

Riešenie na všetkých druhoch nosníkov je veľmi podobné. Ukážeme si spôsob riešenia na nosníku s previsnutým koncom.



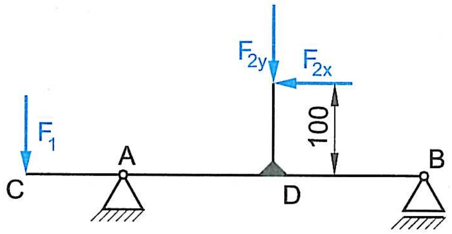
Obr. 7.38

PRÍKLAD

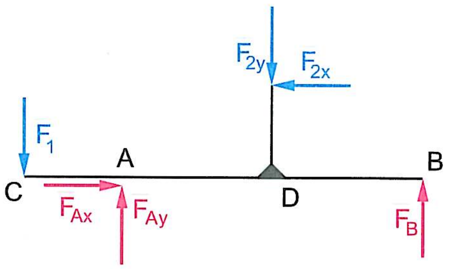
Nosník – hriadeľ uložený vo dvoch ložiskách, má na previsnutom konci upevnenú remenicu, ktorá je zaťažená silou $F_1 = 1\,000$ N. V strede hriadeľa je závitovkové koleso s priemerom $d = 200$ mm, na ktoré pôsobí radiálna sila $F_{2y} = 3\,000$ N a axiálna sila $F_{2X} = 2\,000$ N. Náboj kolesa má dĺžku $l = 100$ mm. Vyriešte priebeh normálových a priečnych síl, priebeh ohybových momentov, zistite miesto pôsobenia maximálneho ohybového momentu a jeho veľkosť.

Riešenie:

1. Najskôr si obrázok prekreslíme na schému nosníka. Jednotlivé súčiastky nahradíme silovým pôsobením.



a) schéma nosníka



b) uvoľnený nosník

Obr. 7.39

2. Vyriešime veľkosti väzbových síl:

$$\sum F_x = 0; \quad F_{Ax} - F_{2x} = 0$$

$$\sum F_y = 0; \quad -F_1 + F_{Ay} - F_{2y} + F_B = 0$$

$$\sum M_A = 0; \quad 65 \cdot F_1 - 100 \cdot F_{2y} + 100 \cdot F_{2x} + 200 \cdot F_B = 0$$

Z prvej rovnice:

$$F_{Ax} = F_{2x} = 2\,000 \text{ N}$$

Z tretej rovnice:

$$F_B = \frac{-65 \cdot F_1 + 100 \cdot F_{2y} - 100 \cdot F_{2x}}{200}$$

$$F_B = \frac{-65 \cdot 1000 + 100 \cdot 3000 - 100 \cdot 2\,000}{200} = 175 \text{ N}$$

Z druhej rovnice:

$$F_{Ay} = F_1 + F_{2y} - F_B$$

$$F_{Ay} = 1\,000 + 3\,000 - 175 = 3\,825 \text{ N}$$

3. Nakreslíme priebeh normálových a priečnych síl a zistíme miesto pôsobenia maximálneho momentu. Pretože náboj na závitovkovom kolese je veľký, môžeme jeho pôsobenie považovať za spojité bremeno, ktorého veľkosť bude:

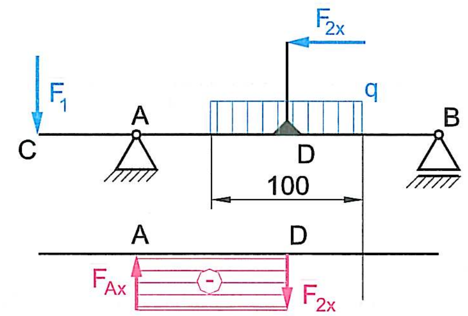
$$q = \frac{F_{2y}}{l} = \frac{3000}{100} = 30 \text{ Nmm}^{-1}$$

Pri riešení priebehu ohybového momentu si musíme uvedomiť, že v bode D pôsobí ohybový moment od sily F_{2x}. Preto maximálny ohybový moment môže byť v bode D alebo v bodoch A, resp. X, kde priečna sila mení svoje znamienko. V bode A bude v zmysle orientácie podľa *obr. 7.40* záporný a jeho veľkosť:

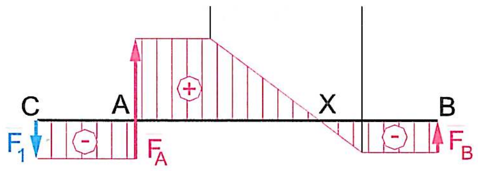
$$M_{oA} = -65 \cdot F_1 = -65 \cdot 1\,000 = -65\,000 \text{ Nmm}$$

Polohu bodu X zistíme z podmienky, že v tomto mieste sa $F_t = 0$. Urobíme myslený rez a vzdialenosť x vyrátame zo silovej podmienky rovnováhy. Z momentovej podmienky rovnováhy vypočítame veľkosť ohybového momentu v tomto mieste.

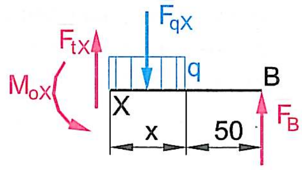
$$\sum F_y = 0; \quad F_{tX} - q \cdot x + F_B = 0$$



Priebeh normálových (osových) síl



Priebeh priečnych síl



Obr. 7.40

Z podmienky rovnováhy dostaneme:

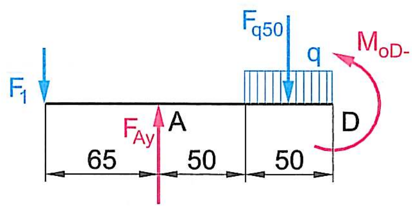
$$x = \frac{F_B}{q} = \frac{175}{30} = 5{,}8\overline{3} \text{ mm}$$

Ohybový moment v bode X vyjadríme:

$$M_{oX} = -\frac{x^2}{2} \cdot q + (50 + x) \cdot F_B$$

$$M_{oX} = -\frac{5{,}83^2}{2} \cdot 30 + (50 + 5{,}83) \cdot 175 = 9\,260 \text{ Nmm}$$

Veľkosť ohybového momentu v bode D budeme riešiť v mieste tesne pred bodom D zľava a označíme ho M_{oD-} a v mieste tesne za bodom D sprava a označíme ho M_{oD+}.



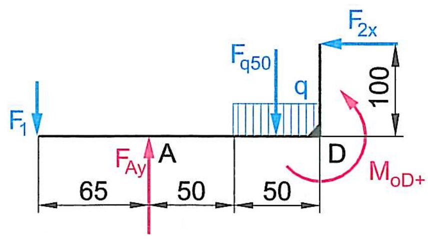
Obr. 7.41

Pre oba prípady zostavíme k bodu D momentové podmienky rovnováhy:

$$M_{oD-} = -F_1 \cdot 165 + F_{Ay} \cdot 100 - F_{q50} \cdot \frac{50}{2}$$

kde $F_{q50} = q \cdot 50$

$$M_{oD-} = -1000 \cdot 165 + 3825 \cdot 100 - 30 \cdot 50 \cdot \frac{50}{2} = 180\,000 \text{ Nmm}$$

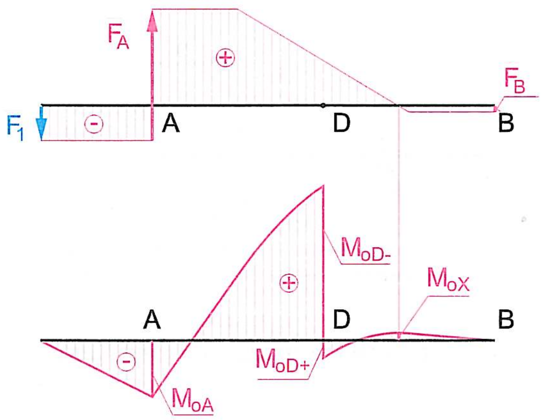


Obr. 7.42

$$M_{oD+} = -F_1 \cdot 165 + F_A \cdot 100 - q \cdot 50 \cdot \frac{50}{2} - F_{2x} \cdot 100$$

$$M_{oD+} = -1000 \cdot 165 + 3825 \cdot 100 - 30 \cdot 50 \cdot \frac{50}{2} - 2000 \cdot 100 = -20\,000 \text{ Nmm}$$

Z uvedeného rozboru vyplýva, že v mieste pôsobenia ohybového momentu sa jeho priebeh mení skokom, tak ako to vidieť na *obr. 7.43*.



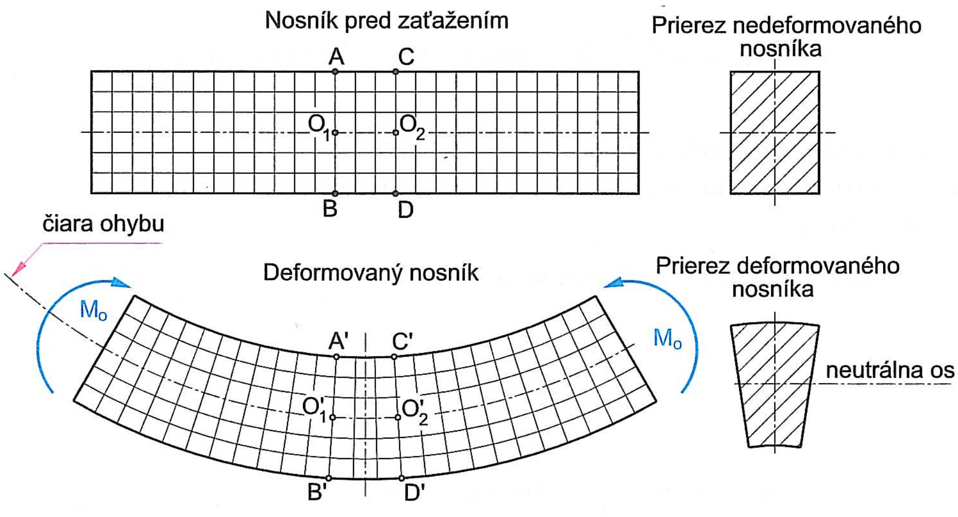
Obr. 7.43

Kontrolné otázky:

1. Kde sa nachádza, vzhľadom na priebeh priečnej sily, maximálny ohybový moment?
2. Aká je priečna sila v úseku, kde je ohybový moment konštantný?
3. Aký je priebeh ohybových momentov na nosníku zaťaženom osamelými silami, spojitým bremenom a momentom?
4. Čo je to metóda superpozície, kedy a ako sa používa?

7.6 NORMÁLOVÉ NAPÄTIE V OHYBE

Pri odvodzovaní normálového napätia v ohybe budeme zaťažovať nosník čistým ohybom, to znamená, že ohyb bude vyvolaný zaťažujúcimi momentmi. V praxi sa tento prípad vyskytuje pomerne zriedka napr. pri špirálových pružinách alebo železničných nápravách. V týchto prípadoch sa priečna sila rovná nule. Nech je nosník podľa *obr. 7.44* zaťažený silovými dvojicami.



Obr. 7.44

Na deformovanej tyči s nanesenou sieťou môžeme pozorovať, že:

a) rezy pôvodne rovnobežné *A–B*, *C–D* a kolmé na os nosníka sa oproti sebe natočili, zostali rovinné a kolmé na deformovanú os nosníka,
b) úsečky nad osou sa skrátili $\overline{A'C'}$ a pod osou predĺžili $\overline{B'D'}$, ale dĺžky $\overline{O_1O_2} = \overline{O'_1O'_2}$ na nedeformovanom aj deformovanom nosníku zostali rovnaké.

Z toho môžeme odvodiť nasledujúce závery:

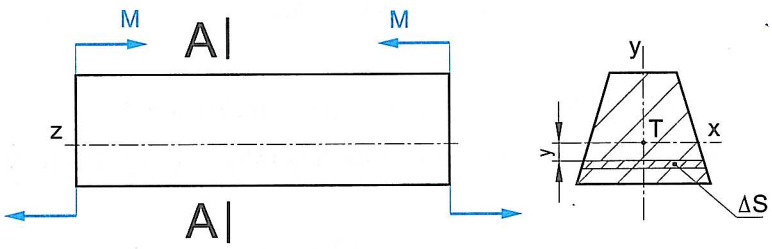
1. Medzi tlačenými a ťahanými vláknami je neutrálna vrstva. Je kolmá na rovinu súmernosti prierezu a ich priesečnica sa nazýva čiara ohybu.
2. Priesečnica neutrálnej vrstvy s rovinou prierezu nosníka sa nazýva neutrálna os
3. Čiara ohybu je rovinná krivka.

Tieto závery platia za nasledujúcich predpokladov:

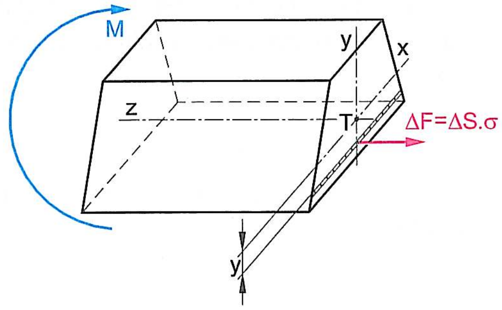
1. Nosník má aspoň jednu rovinu súmernosti, v ktorej ležia všetky zaťaženia.
2. Materiál sa riadi Hookovým zákonom – modul pružnosti v ťahu aj tlaku je rovnaký.
3. Rozmery prierezu sú v porovnaní k dĺžke malé.

7.6.1 Výpočet normálového napätia

Našou úlohou je zistiť, aké veľké napätie je v ľubovoľnom bode prierezu nosníka.



Obr. 7.45



Obr. 7.46

Veďme myslený rez A–A nosníkom.

V prierezе pôsobia osové sily, ktoré majú v rôznej vzdialenosti od neutrálnej osi rôznu veľkosť. Ich celková veľkosť je daná súčtom elementárnych síl:

$$\sum \Delta F = \sum \Delta S \cdot \sigma$$

Tieto sily vytvárajú vzhľadom na neutrálnu os elementárne momenty, ktorých celkový súčet:

$$\sum \Delta M = \sum y \cdot \Delta F = \sum y \cdot \Delta S \cdot \sigma$$

Ponechajme si jednu časť a napíšme podmienky rovnováhy:

1. $\sum F_z = 0;\quad \sum \Delta S \cdot \sigma = 0$
2. $\sum F_y = 0;$ pri čistom ohybe v tomto smere nepôsobia žiadne sily
3. $\sum M = 0;\quad M - \sum y \cdot \Delta S \cdot \sigma = 0$

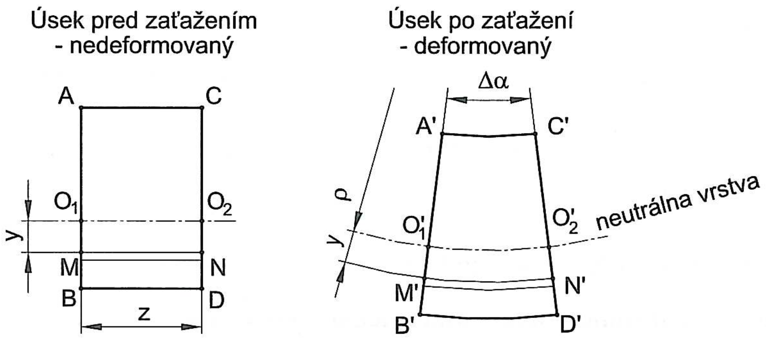
Pretože nepoznáme polohu neutrálnej osi, nepoznáme ani vzdialenosť y. Preto si pomôžeme riešením deformácie. Vyberme si elementárny úsek na nosníku s dĺžkou z (*obr. 7.45*).

Na nezaťaženom elemente sa dĺžky úsečiek rovnajú:

$$\overline{AC} = \overline{O_1O_2} = \overline{BD} = \overline{MN} = z$$

Po zaťažení sa elementárny úsek deformuje. Rezy A–B a C–D zostanú kolmé na neutrálnu os a natočia sa o uhol $\Delta\alpha$. Úsečka $\overline{AC}$ zmenila svoju dĺžku na dĺžku $\overline{A'C'}$, $\overline{BD}$ na $\overline{B'D'}$, $\overline{MN}$ na $\overline{M'N'}$. Úsečka $\overline{O_1O_2}$ sa síce deformovala, ale jej dĺžka zostala rovnaká ako pred deformáciou. Platí:

$$\overline{O_1O_2} = \overline{O'_1O'_2}$$



Obr. 7.47

Určíme predĺženie úsečky $\overline{MN}$. Jej pôvodná dĺžka:

$$\overline{MN} = \overline{O'_1O'_2} = \rho \cdot \Delta\alpha$$

Po predĺžení

$$\overline{M'N'} = (\rho + y) \cdot \Delta\alpha$$

Predĺženie vlákna $\overline{MN}$ je:

$$\Delta l = \overline{M'N'} - \overline{MN} = (\rho + y) \cdot \Delta\alpha - \rho \cdot \Delta\alpha = y \cdot \Delta\alpha$$

Vidíme, že predĺženie je priamoúmerné vzdialenosti od neutrálnej vrstvy. Pomerné predĺženie skúmaného vlákna:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{\overline{O_1O_2}} = \frac{y \cdot \Delta\alpha}{\rho \cdot \Delta\alpha} = \frac{y}{\rho}$$

Teraz vyjadríme závislosť medzi napätím a deformáciou. Za predpokladu, že sa vlákna na seba netlačia a že vlákna sú iba tlačené alebo ťahané, môžeme na výpočet použiť Hookov zákon:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E \cdot y}{\rho}$$

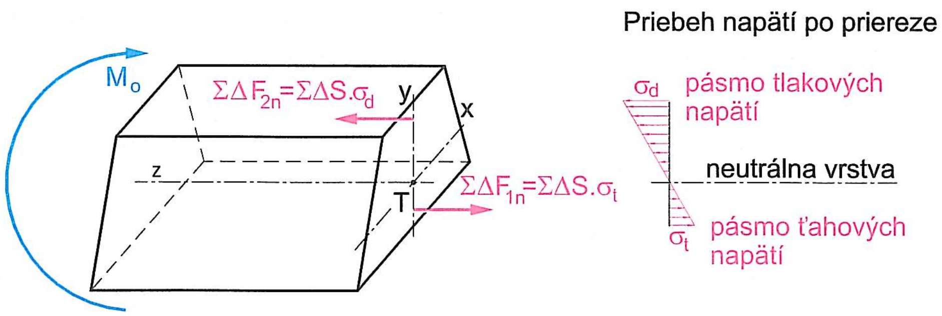
Pretože E a ρ sú konštanty, potom veľkosť napätia σ je priamoúmerná vzdialenosti od neutrálnej osi. Výraz:

$$\Delta F = \Delta S \cdot \sigma$$

znamená elementárnu vnútornú silu. V uvedenom prípade dostávame pod neutrálnou osou sústavu rovnobežných ťahových síl a nad neutrálnou osou zasa sústavu rovnobežných tlakových síl. Pretože podľa prvej statickej podmienky rovnováhy súčet týchto síl sa rovná nule, musia sa potom výslednice týchto síl rovnať, a teda platí:

$$\sum \Delta F_{1n} = \sum \Delta F_{2n}$$
$$\sum \Delta S \cdot \sigma_t = \sum \Delta S \cdot \sigma_d$$

Tieto vnútorné sily vytvárajú moment, ktorý je v rovnováhe s momentom vonkajších síl.



Obr. 7.48

Dosaďme do prvej statickej podmienky rovnováhy:

$$\sigma = \frac{E \cdot y}{\rho}$$

$$\sum \Delta S \cdot \sigma_t = \sum \Delta S \cdot \frac{E \cdot y}{\rho} = \frac{E}{\rho} \sum y \cdot \Delta S = 0$$

Pretože E aj ρ sú konštanty, potom výraz $\sum y \cdot \Delta S$ – lineárny moment plochy sa rovná 0 vtedy, ak neutrálna os prechádza ťažiskom prierezu nosníka.

Riešme tretiu podmienku rovnováhy:

$$\sum M = 0; \quad M - \sum y \cdot \Delta S \cdot \sigma = 0$$

$$M = \sum y \cdot \Delta S \cdot \sigma = \sum y \cdot \Delta S \cdot \frac{E \cdot y}{\rho}$$

$$M = \frac{E}{\rho} \sum y^2 \cdot \Delta S$$

Výraz $\sum y^2 \cdot \Delta S$ je kvadratický moment prierezu k osi x. Potom platí:

$$M = \frac{E}{\rho} \cdot J_x$$

a z toho

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M}{J_x}$$

Ak za výraz $\frac{E}{\rho}$ dosadíme $\frac{\sigma}{y}$, dostaneme:

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{M}{J_x}$$

a úpravou

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{J_x}$$

Z uvedeného vzťahu vyplýva, že napätie je priamoúmerné veľkosti ohybového momentu a vzdialenosti od neutrálnej osi a nepriamoúmerné kvadratickému momentu prierezu.

Vieme vyjadriť aj polomer zakrivenia nosníka:

$$\rho = \frac{E \cdot J_x}{M} \quad [\text{mm}]$$

Súčin $E \cdot J_x$ sa nazýva aj *tuhosť v ohybe* a je tým väčšia, čím menej sa nosník skriví vplyvom pôsobenia ohybového momentu.

Zhrnutie:

1. Normálové napätie v ľubovoľnom mieste prierezu nosníka vypočítame zo vzťahu: $\sigma = \frac{M \cdot y}{J_x}$

Tento vzťah platí za predpokladu, že:

- *je zachovaná rovinnosť prierezov,*
- *platí Hookov zákon,*
- *nosník je zaťažovaný iba čistým ohybom (nevyskytujú sa priečne sily),*
- *zaťaženie leží v rovine prechádzajúcej osou súmernosti prierezu nosníka.*

2. Polomer zakrivenia ohybovej čiary vypočítame: $\rho = \frac{E \cdot J_x}{M}$

7.6.2 Výpočtové a kontrolné vzťahy pre ohyb

Pri odvodzovaní vzťahu pre normálové napätie v ohybe sme vychádzali z predpokladu, že v danom mieste nepôsobia priečne sily a nosník je namáhaný čistým ohybom. V prípade nenulovej priečnej sily sa prierezy okrem natočenia aj posunú vplyvom šmykových napätí. Tento posun je však taký malý, že nemá prakticky žiadny význam, a teda nemení sa ani odvodený vzťah. Výpočet namáhania ohybom sa môže robiť z niekoľkých dôvodov:

1. V danom mieste nosníka namáhaného ohybom chceme vypočítať minimálny prierez (dimenzovanie prierezu).
2. Chceme skontrolovať, či navrhnutý prierez vyhovuje pre zaťažený nosník.
3. Chceme zistiť únosnosť daného nosníka.

Ak chceme zistiť maximálne napätie, ktoré sa na nosníku vyskytuje, musíme nájsť M_{omax} a tiež najvzdialenejšie vlákna od neutrálnej osi. Hovoríme im krajné vlákna. Ich vzdialenosť od neutrálnej osi označujeme e_1 a e_2. Potom maximálne napätie:

$$\sigma_{o\,max} = \frac{M_{o\,max} \cdot e_{1;2}}{J_x} = \frac{M_{o\,max}}{\dfrac{J_x}{e_{1;2}}}$$

Výraz

$$\frac{J_x}{e_{1;2}} = W_{o1;2}$$

sa nazýva prierezový modul v ohybe. Výpočtové vzťahy pre prierezové moduly v ohybe nájdeme, podobne ako vzťahy pre kvadratické momenty prierezov v tabuľkách.

Pretože maximálne možné napätie musí byť menšie alebo sa nanajvýš rovnať dovolenému napätiu, vzťah pre σ_{omax} bude mať tvar:

$$\sigma_{o\,max} = \frac{M_{o\,max}}{W_{o1;2}} \leq \sigma_{Do}$$

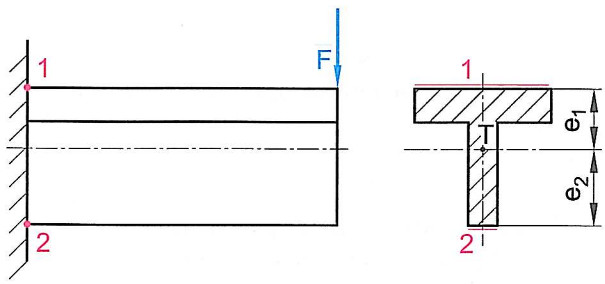
Pre symetrické profily podľa neutrálnej osi, kde $e_1 = e_2$ budú napätia v okrajových vláknach rovnaké. Takéto prierezy volíme vtedy, keď má materiál rovnakú pevnosť v ťahu aj tlaku.

Nesymetrické profily, ktorých $e_1 \neq e_2$ volíme z konštrukčného hľadiska vtedy, ak má materiál inú pevnosť v ťahu a inú v tlaku. Toto platí pre liatinu, kde hodnoty v tlaku sú až 3-krát vyššie ako v ťahu. V tomto prípade dostávame dve podmienky pre výpočet:

$$\sigma_{t\,max} = \frac{M_{o\,max}}{W_{o1}} \leq \sigma_{Dt}$$

$$\sigma_{d\,max} = \frac{M_{o\,max}}{W_{o2}} \leq \sigma_{Dd}$$

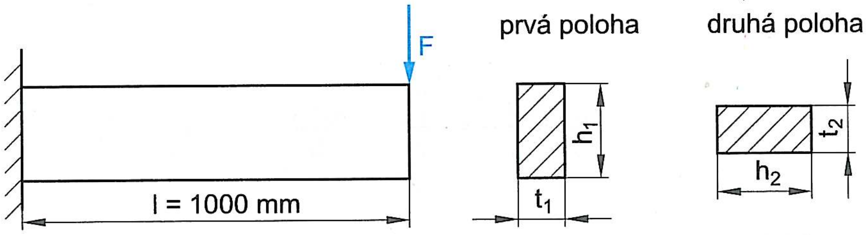
Pre liatinu je teda výhodný taký profil, ktorý má vzdialenosti okrajových vlákien v pomere $e_1 : e_2 = 1 : 3$.



Obr. 7.49

PRÍKLAD

Vypočítajte prierezové rozmery nosníka z materiálu E295 (podľa starej STN 11 500) podľa *obr. 7.50*, ktorý je zaťažený statickou silou $F = 2\,000$ N a pomer $h : t = 2$.



Obr. 7.50

Riešenie:

Najskôr vypočítame maximálny ohybový moment. Ten sa bude nachádzať v mieste votknutia a jeho hodnota:

$$M_{o\,max} = l \cdot F$$

$$M_{o\,max} = 1\,000 \cdot 2\,000 = 2\,000\,000 \text{ Nmm}$$

Zo vzťahu pre maximálne napätie určíme prierezové rozmery:

$$\sigma_{o\,max1} = \frac{M_{o\,max}}{W_{o1}} \leq \sigma_{Do}$$

Prierezové rozmery nosníka sa nachádzajú v prierezovom module v ohybe:

$$W_{o1} = \frac{J_{x1}}{e_1}$$

Pretože náš profil je súmerný, platí:

$$e_1 = \frac{h_1}{2}$$

Prierezový modul pre prvú polohu je:

$$W_{o1} = \frac{J_{x1}}{e_1} = \frac{\frac{t_1 \cdot h_1^3}{12}}{\frac{h_1}{2}} = \frac{t_1 \cdot h_1^2}{6}$$

Ak dosadíme do vzťahu prierezový modul, pre napätie v prvej polohe, dostaneme:

$$\sigma_{o\,max1} = \frac{M_{o\,max}}{\frac{t_1 \cdot h_1^2}{6}} \leq \sigma_{Do}$$

po dosadení $h_1 = 2t_1$ a úprave máme:

$$\sigma_{o\,max1} = \frac{3 \cdot M_{o\,max}}{2 \cdot h_1^3} \leq \sigma_{Do}$$

Maximálna hodnota napätia, ktorá sa môže na nosníku vyskytnúť je hodnota dovoleného napätia, ktorú pre daný materiál zistíme zo strojníckych tabuliek. Pre materiál E295 (11 500) a statické zaťaženie sa $\sigma_{Do} = 150 \div 220$ MPa. Na výpočet použijeme nižšiu hodnotu. Po úprave dostaneme vzťah:

$$t_1 \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot M_{o\,max}}{2 \cdot \sigma_{Do}}}$$

$$t_1 \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2\,000\,000}{2 \cdot 150}} = 27{,}1 \text{ mm}$$

Ploché tyče sa vyrábajú podľa STN 42 5522. Skutočné rozmery podľa uvedenej normy navrhujeme $t_{1sk} = 30$ mm a $h_{1sk} = 60$ mm.

Pre prierez v druhej polohe bude:

$$e_2 = \frac{t_2}{2}$$

a prierezový modul v ohybe:

$$W_o = \frac{J_{x2}}{e_2} = \frac{\dfrac{h_2 \cdot t_2^3}{12}}{\dfrac{t_2}{2}} = \frac{h_2 \cdot t_2^2}{6}$$

Pre maximálne napätie platí:

$$\sigma_{o\max 2} = \frac{M_{o\max}}{\dfrac{h_2 \cdot t_2^2}{6}} \le \sigma_{Do}$$

po dosadení $h_2 = 2t_2$ a úprave dostaneme:

$$\sigma_{o\max 2} = \frac{3 \cdot M_{o\max}}{t_2^3} \le \sigma_{Do}$$

$$t_2 \ge \sqrt[3]{\frac{3 \cdot M_{o\max}}{\sigma_{Do}}}$$

$$t_2 \ge \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2\,000\,000}{150}} = 34{,}2 \text{ mm}$$

Skutočnú hodnotu rozmeru podľa STN 42 5522 navrhujeme $t_{2sk} = 40$ mm a $h_{2sk} = 80$ mm.

Zhrnutie:

Výpočtová rovnica pri namáhaní ohybom má tvar:

$$\sigma_{o\max} = \frac{M_{o\max}}{W_{o\min}} \le \sigma_{Do}$$

Prierezový modul v ohybe má tvar:

$$W_{o\min} = \frac{J}{e_{\max}},$$

kde e_{max} je vzdialenosť okrajového vlákna od neutrálnej osi a J je kvadratický moment prierezu k neutrálnej osi.

KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Aká je výpočtová rovnica pre ohyb?
2. Ktoré tri základné výpočty môžeme robiť pri namáhaní nosníkov ohybom?
3. Ako počítame nosníky z liatiny a ako sa odlišuje ich výpočet oproti oceľovým nosníkom?
4. Aké sú vhodné profily pre ohyb, zdôvodnite prečo.
5. Ako je rozložené ohybové napätie po priereze?
6. Prečo sú pre ocele vhodnejšie symetrické prierezy podľa neutrálnej osi a pre liatiny nesymetrické prierezy?

7.7 POROVNANIE VYUŽITIA MATERIÁLU PRI PLNÝCH A DUTÝCH PRIEREZOCH A PROFILOCH

Ak sa pozrieme na rozloženie napätí po priereze zistíme, že najlepšie využitie materiálových vlastností je na povrchu prierezu. Preto je vhodné, ak je materiál rozložený po priereze čo možno najďalej od neutrálnej osi, aby sme jeho mechanické vlastnosti čo najlepšie využili. Ako sa prejavia materiálové úspory si ukážeme na nasledujúcom príklade.

PRÍKLAD

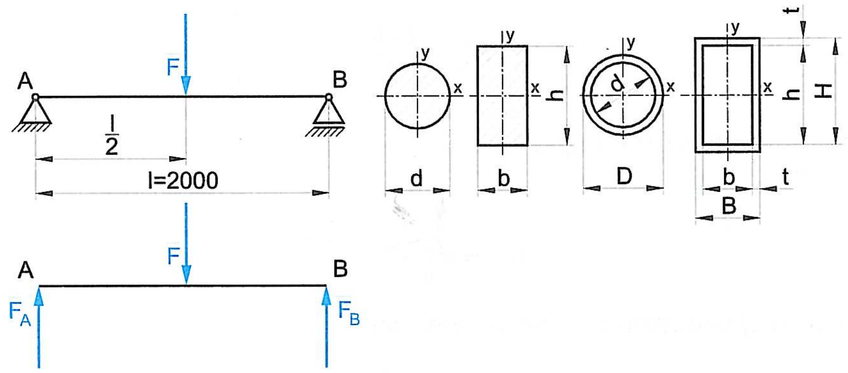
Porovnajte hmotnosti nosníkov z materiálu podľa EN 1027-1 S235JRG1 (podľa STN 11 373), ktoré majú preniesť rovnaké statické zaťaženie $F = 500$ kN podľa *obr. 7.51*, ak nosníky budú mať:

a) kruhový prierez s priemerom d,

b) obdĺžnikový prierez s pomerom strán $\frac{h}{b} = 2$,

c) prierez je medzikružie s vonkajším priemerom D a pomerom $\alpha = \frac{d}{D} = 0{,}9$,

d) prierez je dutý obdĺžnikový profil s pomerom strán $\frac{H}{B} = 2$ a hrúbkou steny $t = 0{,}1\,H$.



Obr. 7.51

Riešenie:

Najskôr vyrátame maximálny ohybový moment, ktorý musia všetky prierezy preniesť.

Z uvoľneného nosníka je zrejmé, že

$$F_A = F_B = \frac{F}{2}$$

a z toho vyplýva

$$M_{o\max} = F_A \cdot \frac{l}{2} = \frac{F \cdot l}{4} = \frac{500\,000 \cdot 2000}{4} = 250\,000\,000 \ \text{Nmm}$$

a) Kruhový prierez

Najskôr vyrátame veľkosť priemeru d kruhového prierezu, ktorého iba dve vlákna prenášajú maximálne napätie. Vychádzame z pevnostnej rovnice:

$$\sigma_o = \frac{M_{ox}}{W_{ox}} \le \sigma_{Do}$$

Pre kruhový prierez platí:

$$W_{ox} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

Po dosadení a úprave dostaneme:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_o}{\pi \cdot \sigma_{Do}}}$$

Pre materiál podľa EN 1027-1 S235JRG1 (11 373) je $\sigma_{Do} = 110 \div 165$ MPa. Zvolíme $\sigma_{Do} = 110$ MPa.

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 250\,000\,000}{\pi \cdot 110}} = 285 \text{ mm}$$

Hmotnosť nosníka

$$m_d = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot l \cdot \rho_{oceľ}$$

Pre oceľ sa $\sigma_{oceľ} = 7{,}85 \cdot 10^{-6}$ kgmm^{-3}.

$$m_d = \frac{\pi \cdot 285^2}{4} \cdot 2\,000 \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-6} = 1\,002 \text{ kg}$$

b) Obdĺžnikový prierez

Pre obdĺžnikový prierez platí:

$$W_{ox} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Ak dosadíme za $b = \frac{h}{2}$, dostaneme po úprave:

$$W_{ox} = \frac{\frac{h}{2} \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{12}$$

Po dosadení do pevnostnej podmienky a úprave dostaneme:

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{12 \cdot M_o}{\sigma_{Do}}}$$

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 250\,000\,000}{110}} = 301 \text{ mm}$$

$$b = \frac{h}{2} = \frac{301}{2} = 150{,}5 \text{ mm}$$

Hmotnosť nosníka

$$m_h = b \cdot h \cdot l \cdot \rho_{oceľ}$$

$$m_h = 150{,}5 \cdot 301 \cdot 2\,000 \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-6} = 711{,}2 \text{ kg}$$

c) Prierez je medzikružie

Aj v tomto prípade iba jedno vlákno prenáša maximálne napätie, ale materiál je zo stredu prierezu presunutý po obvode.

Pre medzikružie platí:

$$W_{ox} = \frac{J_x}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi \cdot D^4}{64} - \frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}$$

Ak dosadíme za $d = 0{,}9 \cdot D$, po úprave dostaneme:

$$W_{ox} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - \alpha^4)$$

Po dosadení a úprave dostaneme:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_o}{\pi \cdot \sigma_{Do} \cdot (1 - \alpha^4)}}$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 250\,000\,000}{\pi \cdot 110 \cdot (1 - 0{,}9^4)}} = 406{,}8 \text{ mm}$$

Vnútorný priemer medzikružia

$$d = 0{,}9 \cdot D = 0{,}9 \cdot 407 = 366 \text{ mm}$$

Hmotnosť nosníka

$$m_D = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} \cdot l \cdot \rho_{oceľ}$$

$$m_D = \frac{\pi \cdot (407^2 - 366^2)}{4} \cdot l \cdot \rho_{oceľ} = 390 \text{ kg}$$

d) Dutý obdĺžnikový profil

Pre dutý obdĺžnikový profil platí:

$$W_{ox} = \frac{J_x}{\frac{H}{2}} \cdot \frac{2 \cdot J_x}{H}$$

Ak dosadíme za

$$B = \frac{H}{2} = 0{,}5 \cdot H$$

$$t = 0{,}1 \cdot H$$

$$b = B - t = B - 0{,}1 \cdot H = 0{,}5 \cdot H - 0{,}1 \cdot H = 0{,}4 \cdot H$$

$$h = H - t = H - 0{,}1 \cdot H = 0{,}9 \cdot H$$

Potom

$$J_x = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$J_x = \frac{1}{12} \cdot \left(B \cdot H^3 - b \cdot h^3\right)$$

$$J_x = \frac{1}{12} \cdot \left[0{,}5 \cdot H \cdot H^3 - 0{,}4 \cdot H \cdot (0{,}9 \cdot H)^3\right]$$

$$J_x = \frac{0{,}2084 \cdot H^4}{12}$$

$$W_{ox} = \frac{2 \cdot 0{,}2084 \cdot H^4}{12 \cdot H} = \frac{0{,}2084 \cdot H^3}{6}$$

Po dosadení do pevnostnej podmienky a úprave dostaneme:

$$H \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot M_o}{0{,}2084 \cdot \sigma_{Do}}}$$

$$H \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 250\,000\,000}{0{,}2084 \cdot 110}} = 403 \text{ mm}$$

$$B = \frac{H}{2} = \frac{403}{2} = 201{,}5 \text{ mm}$$

$$t = 40{,}3 \text{ mm}$$
$$h = H - t = 403 - 40{,}3 = 362{,}7 \text{ mm}$$
$$b = B - t = 201{,}5 - 40{,}3 = 161{,}2 \text{ mm}$$

Hmotnosť nosníka

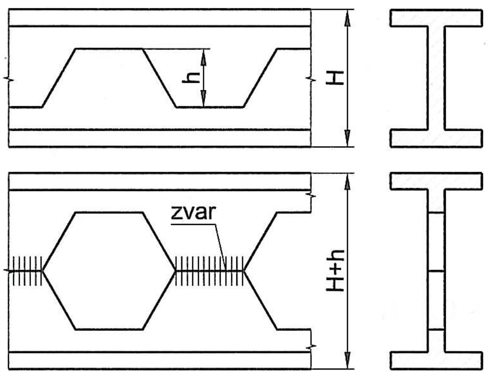
$$m_H = (B \cdot H - b \cdot h) \cdot l \cdot \rho_{\text{oceľ}}$$
$$m_H = (201{,}5 \cdot 403 - 161{,}2 \cdot 362{,}7) \cdot 2\,000 \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-6} = 357 \text{ kg}$$

e) Porovnanie výsledkov

Ak za základ vezmeme kruhový prierez, zistíme, že pri použití obdĺžnikového prierezu s daným pomerom strán ušetríme 290,8 kg, čo je 29 %, pri medzikruží 612 kg, čo je 61 % a pri dutom obdĺžnikovom profile s daným pomerom strán a hrúbkou ušetríme 645 kg, čo je 64,4 % úspory materiálu. Vyrátané hodnoty potvrdili náš počiatočný predpoklad, že najlepšie využitie materiálu je pri prierezoch, ktoré majú sústredený materiál čo najďalej od neutrálnej osi.

Poznámka:

V predchádzajúcom príklade nie sú rozmery upravované vzhľadom na normalizované hodnoty z toho dôvodu, aby sme mohli urobiť presnejšie porovnanie úspory materiálu.



Obr. 7.52

V niektorých prípadoch dosiahneme zväčšenie únosnosti nosníka jeho rozdelením a opätovným zvarením podľa schémy na *obr. 7.52.*

Zhrnutie:

Pre ohyb sú výhodné také profily, ktoré sú vysoké, pretože kvadratický moment prierezu rastie s druhou mocninou vzdialenosti plochy od neutrálnej osi a majú najväčšiu časť plochy prierezu rozloženú čo najďalej od neutrálnej osi. Najvýhodnejšie sú profily odľahčené okolo neutrálnej osi ako je napríklad I profil.

7.8 NOSNÍKY ROVNAKÉHO NAPÄTIA

Doteraz riešené nosníky mali konštantný prierez. Plné využitie nosníka s konštantným prierezom je iba vtedy, ak je nosník zaťažený na koncoch silovými dvojicami. V ostatných prípadoch nie je ohybový moment rovnaký a mení sa aj skutočné napätie. A tak k úplnému využitiu materiálových vlastností dôjde iba v mieste pôsobenia maximálneho ohybového momentu M_{omax}. Aby sme docielili čo najlepšie využitie pevnosti materiálu, snažíme sa prierez nosníka upraviť tak, aby pokiaľ je to možné, bola splnená podmienka $\sigma_{\text{omax}} = \sigma_{\text{Do}}$ po celej dĺžke nosníka. Nosníkom, ktoré vyhovujú tejto podmienke, hovoríme nosníky rovnakého napätia. Je zrejmé, že na nosníku musí byť skutočné napätie nižšie alebo sa dovolenému napätiu rovná. Preto na nosníkoch rovnakého napätia musí v každom mieste pozdĺž nosníka platiť:

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} = \text{konšt.}$$

Túto podmienku je možné dosiahnuť zmenou prierezu. Zmena prierezu nosníka má byť plynulá a musíme dbať na to, aby výrobné alebo montážne náklady nepresiahli materiálové úspory. Na docielenie tohto stavu používame nasledujúce tvary prierezov nosníkov:

a) obdĺžnikový prierez
 – konštantnej šírky b,
 – konštantnej hrúbky h;

b) kruhový prierez.

7.8.1 Votknutý nosník obdĺžnikového prierezu s konštantnou šírkou *b* zaťažený osamelou silou na voľnom konci

Ohybový moment vo vzdialenosti x od voľného konca:

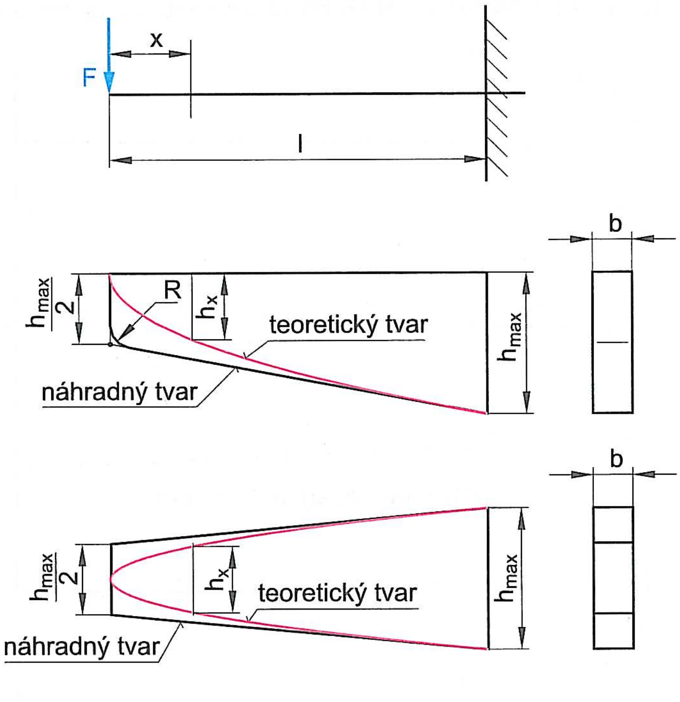
$$M_{ox} = x \cdot F$$

napätie v tomto mieste:

$$\sigma_{ox} = \frac{6 \cdot M_{ox}}{b \cdot h_x^2} \leq \sigma_{Do}$$

hrúbka nosníka v tomto mieste:

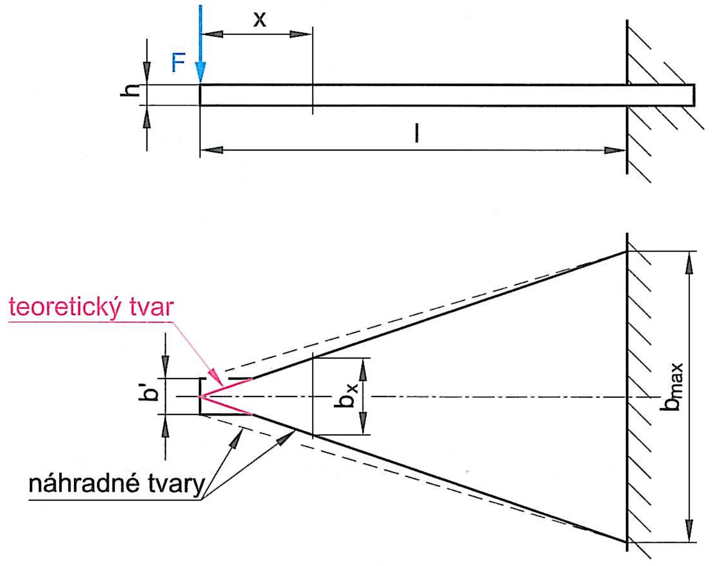
$$h_x \geq \sqrt{\frac{6 \cdot x \cdot F}{b \cdot \sigma_{Do}}}$$



Obr. 7.53

Z *obr. 7.53* vidieť, že rozmer h_x sa mení podľa paraboly. Preto by nebolo výhodné, aby skutočný nosník presne kopíroval teoretický tvar, ale aby bol zjednodušený tak, ako predpisuje jeden z dvoch náhradných tvarov nosníka.

7.8.2 Votknutý nosník s konštantnou hrúbkou *h* s osamelou silou na konci



Obr. 7.54

Ohybový moment vo vzdialenosti x od voľného konca:

$$M_{ox} = x \cdot F$$

napätie v tomto mieste:

$$\sigma_{ox} = \frac{6 \cdot M_{ox}}{b_x \cdot h^2} \leq \sigma_{Do}$$

šírka nosníka v tomto mieste:

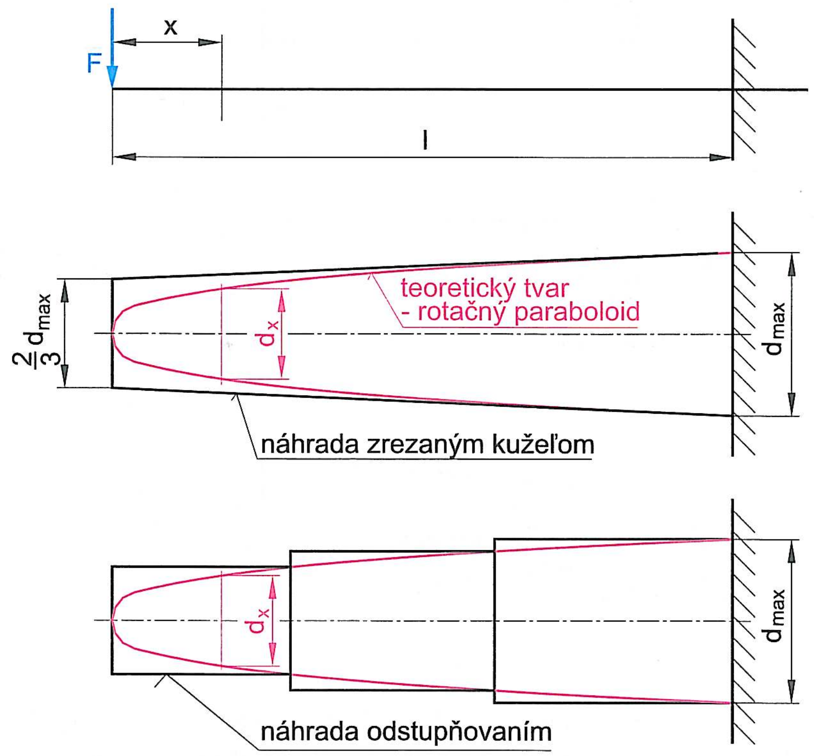
$$b_x \geq \frac{6 \cdot x \cdot F}{h^2 \cdot \sigma_{Do}}$$

Napriek tomu, že sa šírka nosníka mení priamočiaro, nemôžeme tento teoretický tvar použiť, pretože v mieste pôsobenia sily nemôžeme zanedbať šmyk. Preto na voľnom konci musí byť určitá šírka nosníka b', ktorej minimálna veľkosť je daná vzťahom:

$$\tau_{max} = \frac{3 \cdot F}{2 \cdot h \cdot b'} \leq \tau_{Ds}$$

$$b' \geq \frac{3 \cdot F}{2 \cdot h \cdot \tau_{Ds}}$$

7.8.3 Votknutý nosník kruhového prierezu zaťažený osamelou silou na konci



Obr. 7.55

Spôsob riešenia je rovnaký ako pri nosníkoch v predchádzajúcich prípadoch. Snahou je maximálne využitie materiálu, napr. pri ramenách kotúčov a pri pákach *(obr. 7.55)*. Vo vzdialenosti x od voľného konca platí:

$$M_{ox} = x \cdot F$$

$$\sigma_{ox} = \frac{32 \cdot M_{ox}}{\pi \cdot d_x^3} \leq \sigma_{Do}$$

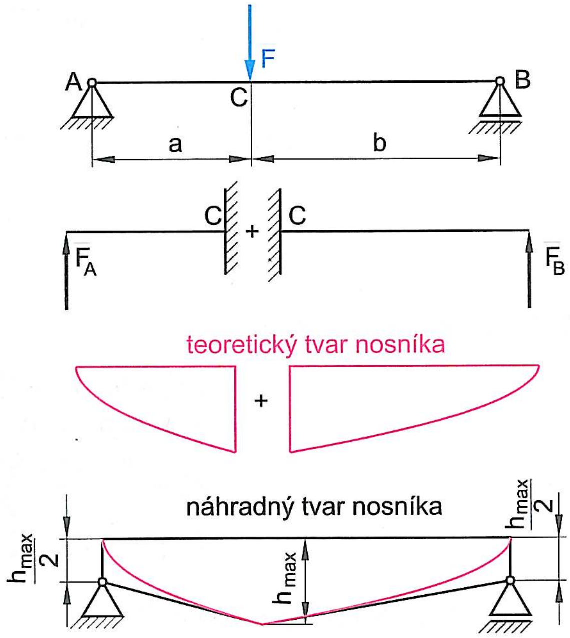
$$d_x \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot x \cdot F}{\pi \cdot \sigma_{Do}}}$$

7.8.4 Nosník na dvoch podperách zaťažený osamelou silou s konštantnou šírkou *b*

Riešenie je analogické:

a) nosník uvoľníme,
b) vyrátame väzbové sily v podperách,
c) rozdelíme nosník na dva votknuté nosníky,
d) riešime ako v predchádzajúcom prípade.

Postup vidno na *obr. 7.56*.



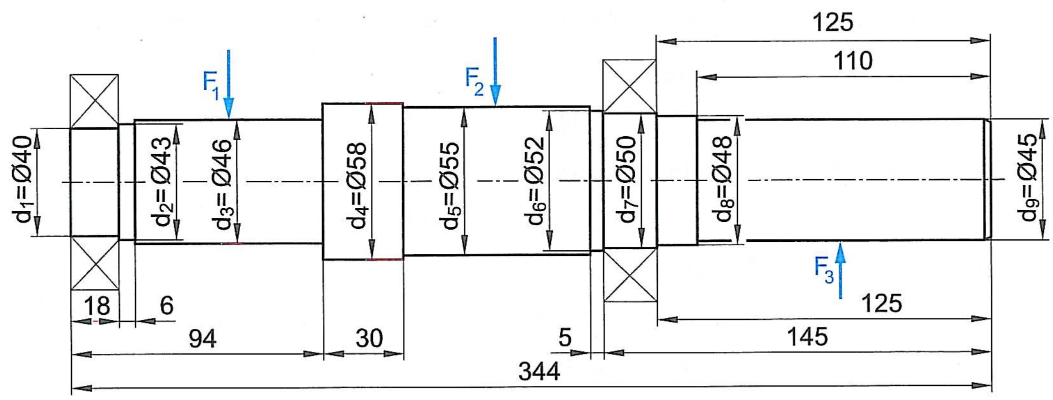
Obr. 7.56

7.8.5 Kontrola nosníka kruhového prierezu

Často potrebujeme prekontrolovať správnosť navrhnutých prierezových rozmerov na nosníkoch kruhového prierezu – hriadeľoch, ktoré sú z konštrukčných dôvodov v tvare zrezaných kužeľov alebo odstupňované. Postup riešenia si ukážeme na príklade.

PRÍKLAD

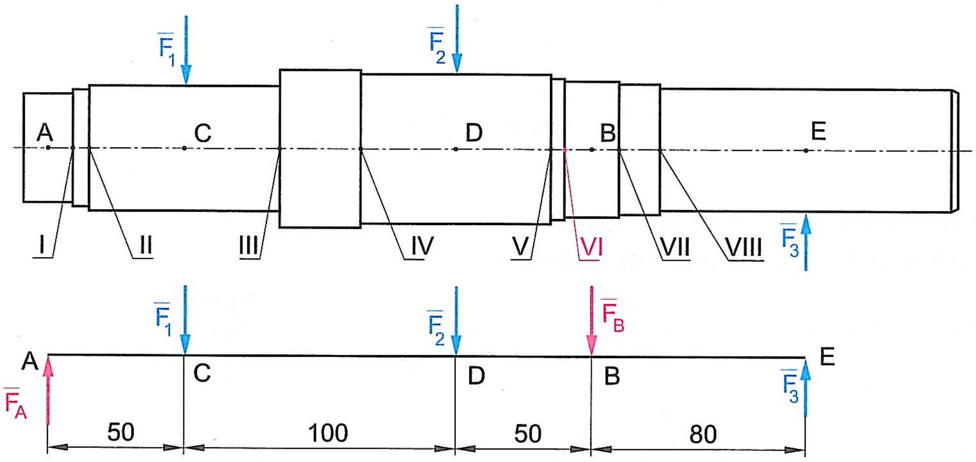
Prekontrolujte správnosť navrhnutých priemerov na otáčajúcom sa nosnom hriadeli (neprenáša krútiaci moment). Hriadeľ je vyrobený z ocele podľa EN 1027–1 E355 (podľa pôvodnej STN 11 600) a jeho rozmery sú na *obr. 7.57*. Urobte výpočet minimálnych priemerov a skutočných napätí. Sily $F_1 = 5$ kN, $F_2 = 8$ kN, $F_3 = 10$ kN pôsobia v strede osadení.



Obr. 7.57

Riešenie:

1. Prekreslíme hriadeľ na nosník a prekótujeme ho tak, aby sa dal z neho urobiť pevnostný výpočet. Nosník uvoľníme.

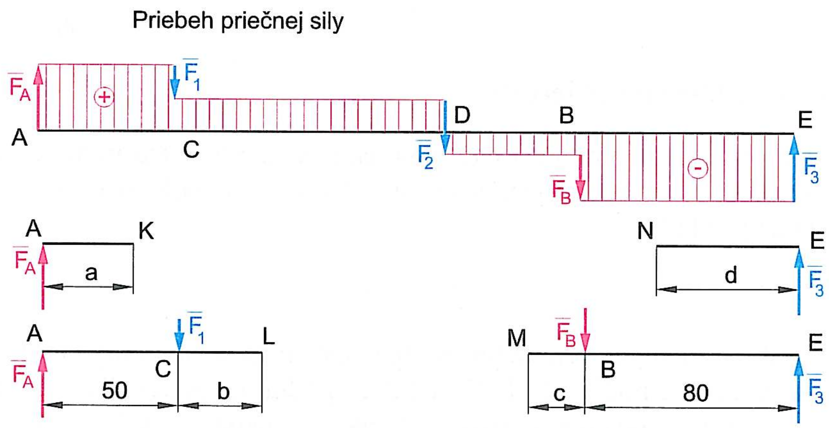


Obr. 7.58

2. Vyrátame väzbové sily.

$$\Sigma F_y = 0; \quad F_A - F_1 - F_2 - F_B + F_3 = 0$$
$$\Sigma M_A = 0; \quad -50 \cdot F_1 - 150 \cdot F_2 - 200 \cdot F_B + 280 \cdot F_3 = 0$$
$$F_B = \frac{280 \cdot F_3 - 50 \cdot F_1 - 150 \cdot F_2}{200} = 6\,750\,\text{N}$$
$$F_A = F_1 + F_2 + F_B - F_3 = 9\,750\,\text{N}$$

3. Nakreslíme priebeh priečnych síl.



Obr. 7.59

4. Matematicky vyjadríme rovnice na výpočet ohybových momentov v jednotlivých úsekoch.

Ohybový moment v úseku *A–C* – vyjadrený zľava:

$$M_{oK} = a \cdot F_A$$

Ohybový moment v úseku *C–D* – vyjadrený zľava:

$$M_{oL} = (50 + b) \cdot F_A - b \cdot F_1 = 50 \cdot F_A + b \cdot (F_A - F_1)$$

Ohybový moment v úseku *D–B* – vyjadrený sprava:

$$M_{oM} = (80 + c) \cdot F_3 - c \cdot F_B = 80 \cdot F_3 + c \cdot (F_3 - F_B)$$

Ohybový moment v úseku *B–E* – vyjadrený sprava:

$$M_{oN} = d \cdot F_3$$

5. Urobíme kontrolu priemerov a napätí.

Ako ukážku vyrátame minimálnu hodnotu priemeru d_7 a skutočného napätia v mieste *VI*. Miesto *VI* sa nachádza v úseku *D–B* vo vzdialenosti $c = 10$ mm od bodu *B* *(obr. 7.58)*.

Moment v mieste *VI*:

$$M_{oVI} = 80 \cdot F_3 + c\,(F_3 - F_B)$$

$$M_{oVI} = 80 \cdot 10\,000 + 10 \cdot (10\,000 - 6\,750) = 832\,500 \text{ Nmm}$$

Minimálny priemer:

$$\sigma = \frac{M_o}{W_o} = \frac{32 \cdot M_o}{\pi \cdot d_7^3} \leq \sigma_{DoIII}$$

$$d_7 \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_o}{\pi \cdot \sigma_{DoIII}}}$$

Zo strojníckych tabuliek zistíme hodnotu $\sigma_{Do\,III}$ pre striedavý ohyb, pretože hriadeľ sa otáča a povrchové vlákno je namáhané ťahom a po pretočení o 180° je namáhané tlakom. Hodnota dovoleného napätia pre striedavý ohyb a materiál podľa EN 1027-1 E355 (11 600) je (85 ÷ 115) MPa. Volíme nižšiu hodnotu.

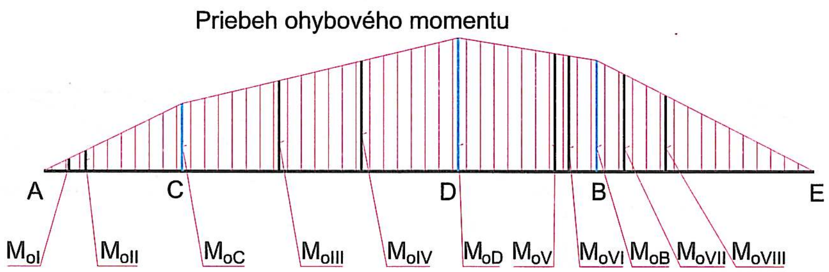
$$d_7 \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 832\,500}{\pi \cdot 85}} = 46{,}38 \text{ mm}$$

V tomto mieste je navrhnutý priemer hriadeľa ∅ 50 mm. Skutočné napätie bude:

$$\sigma_{sk7} = \frac{32 \cdot M_o}{\pi \cdot d_7^3}$$

$$\sigma_{sk7} = \frac{32 \cdot 832\,500}{\pi \cdot 50^3} = 67{,}84 \text{ MPa}$$

V mieste, kde sa nachádza priemer d_5 pôsobí najväčší ohybový moment. Tento priemer kontrolujeme z M_{omax}.



Obr. 7.60

Hodnoty v ostatných miestach hriadeľa *Tabuľka 7.1*

MIESTO	OHYBOVÝ MOMENT [Nmm]	MINIMÁLNY PRIEMER [mm]	SKUTOČNÉ NAPÄTIE [MPa]
I	87 750	21,91	13,97
II	146 250	25,98	18,73
III	653 750	42,79	68,41
IV	796 250	45,70	48,75
D	962 500	48,68	48,75
V	848 750	46,68	61,49
VI	832 500	46,38	67,84
VII	700 000	43,78	64,47
VIII	550 000	40,39	61,48

Zhrnutie:

Nosníkom rovnakého napätia nazývame taký nosník, ktorý pre určité zaťaženie má v okrajových vláknach všetkých prierezov rovnaké napätie. Spĺňa pritom podmienku:

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} = \text{konšt.}$$

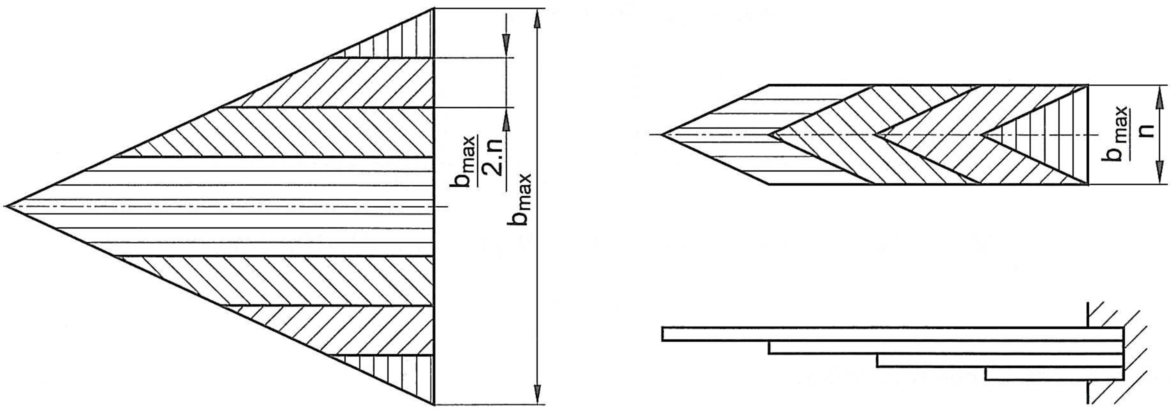
Prierezové moduly v ohybe sú v jednotlivých prierezoch priamoúmerné ohybovým momentom v týchto prierezoch.

Kontrolné otázky:

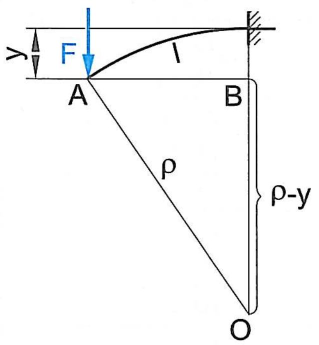
1. Čo sú nosníky rovnakého napätia v ohybe?
2. Aká je základná podmienka pre výpočet prierezových rozmerov nosníkov rovnakého napätia?
3. Aké základné typy votknutých nosníkov rovnakého napätia, zaťažených na konci osamelou silou poznáte?
4. Aký je tvar nosníka rovnakého napätia obdĺžnikového prierezu s konštantnou šírkou?
5. Aký je tvar nosníka rovnakého napätia obdĺžnikového prierezu s konštantnou výškou?
6. Aký je tvar nosníka rovnakého napätia kruhového prierezu?
7. Aký je vzťah medzi teoretickým a náhradným tvarom pri nosníkoch rovnakého napätia?
8. Aký je postup pri kontrole nosníka s odstupňovaným prierezom?

7.9 OHÝBANÉ PRUŽINY

Nosníky rovnakého napätia obdĺžnikového prierezu s konštantnou výškou sú východiskovým tvarom pre konštrukciu zväzku pružníc. Tvar listov – pružníc je odvodený od rovnoramenného trojuholníka, ktorý rozdelíme na n dielov. Rovnaké diely po obidvoch stranách sa poskladajú, čím dostaneme teoretický tvar pružnice tak, ako je to na *obr. 7.61*.



Obr. 7.61



Obr. 7.62

Jednou z rozhodujúcich vlastností pružiny je jej priehyb. Ak zaťažíme nosník rovnakého napätia, bude sa deformovať po kružnici s polomerom krivosti ρ. Priehyb pružiny y, ktorý vyrátame zo schémy na *obr. 7.62* je veľmi malý, a preto môžeme dĺžku úsečky AB považovať (s malou chybou) za rovnajúcu sa dĺžke nosníka l.

Potom $$\rho^2 = l^2 + (\rho - y)^2 = l^2 + \rho^2 - 2 \cdot \rho \cdot y + y^2$$

Hodnota y^2 je veľmi malá veličina a môžeme ju zanedbať. Pre priehyb dostaneme po úprave: $$y = \frac{l^2}{2 \cdot \rho}$$

Ak za ρ dosadíme vzťah, ktorý sme odvodili v článku 7.6.1 pre výpočet polomeru krivosti:

$$\rho = \frac{E \cdot J}{M}$$

a za

$$M = F \cdot l$$

priehyb je potom:

$$y = \frac{F \cdot l^3}{2 \cdot E \cdot J}$$

Týmto spôsobom sme vyriešili ohýbanú pružinu ako votknutý nosník. V praxi sa ale najčastejšie používa zväzok pružníc ako nosník na dvoch podperách tak, ako je to uvedené na *obr. 7.63*. Ak chceme vyjadriť priehyb v takomto prípade, do vzťahu za silu dosadíme $\frac{F}{2}$ a za dĺžku $\frac{l}{2}$. Po dosadení a úprave dostaneme:

$$y = \frac{F \cdot l^3}{32 \cdot E \cdot J_x}$$

Ak dosadíme do predchádzajúceho vzťahu za kvadratický moment prierezu

$$J_x = \frac{n \cdot b \cdot h^3}{12}$$

upraví sa vzťah pre priehyb:

$$y = \frac{3 \cdot F \cdot l^3}{8 \cdot E \cdot n \cdot b \cdot h^3}$$

Charakteristickou vlastnosťou pružín je ich tuhosť, ktorú vyjadrujeme pružinovou konštantou *k*. Je to sila potrebná na stlačenie pružiny o 1 mm a má rozmer Nmm^{-1}:

$$k = \frac{F}{y} = \frac{8 \cdot E \cdot n \cdot b \cdot h^3}{3 \cdot l^3} \quad [\mathrm{Nmm}^{-1}]$$

Pri pevnostnom výpočte zväzku pružníc vychádzame z pevnostnej podmienky:

$$\sigma_{o\,max} = \frac{M_{o\,max}}{W_o} \leq \sigma_{Do}$$

kde:

$$M_{o\,max} = \frac{F \cdot l}{4}$$

$$W_o = \frac{n \cdot b \cdot h^2}{6}$$

Po dosadení a úprave dostaneme:

$$\sigma_{o\,max} = \frac{3 \cdot F \cdot l}{2 \cdot n \cdot b \cdot h^2} \leq \sigma_{Do}$$

Z tohto vzťahu môžeme vyjadriť počet pružníc:

$$n \geq \frac{3 \cdot F \cdot l}{2 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_{Do}}$$

Maximálny priehyb zväzku pružníc závisí okrem iného aj od použitého materiálu – jeho tepelného spracovania – teda od σ_{Do}. Ak zo vzťahu pre maximálne napätie vyjadríme maximálnu silu, dostaneme po úprave vzťah:

$$F_{max} = \frac{2 \cdot n \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_{Do}}{3 \cdot l}$$

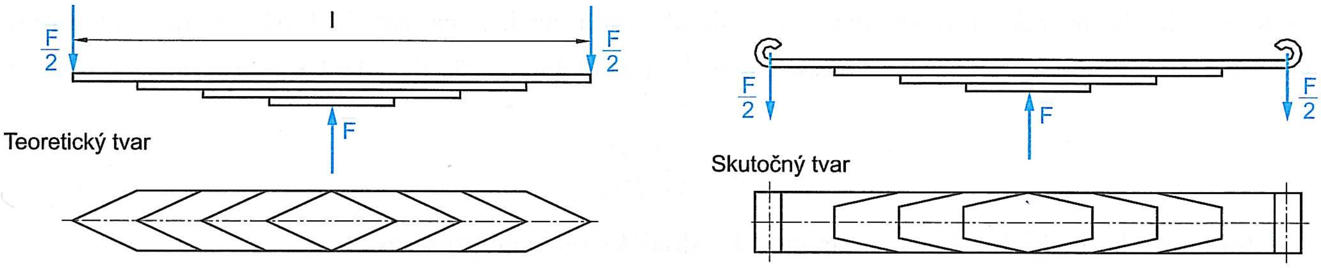
Po dosadení tohto výrazu do vzťahu pre priehyb máme:

$$y_{max} = \frac{l^2 \cdot \sigma_{Do}}{4 \cdot E \cdot h}$$

Aby sme zabránili vzniku tangenciálnych napätí, musia mať pružnice možnosť posúvať sa po sebe a preto je nevyhnutné, aby boli dobre namastené.

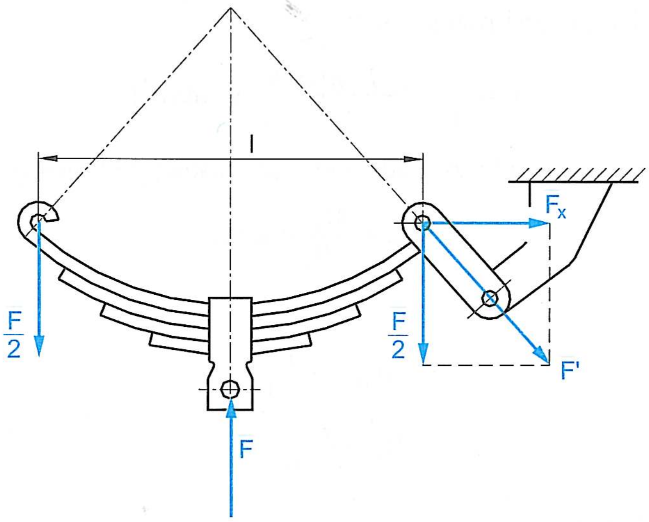
Dovolené napätie volíme:

- pre kalené pružnice: $\sigma_{Do} = 400$ až 600 MPa,
- pre nekalené pružnice: $\sigma_{Do} = 300$ až 400 MPa.



Obr. 7.63

Teoretický tvar pružníc sa málo líši od praktického tvaru. Tvar môže byť obdĺžnikový alebo upravený tak, ako je to na *obr. 7.63*. Horné pružnice sa tvarujú do závesných ôk. Priehyb ohýbanej pružiny v skutočnom tvare je o niečo menší ako pri teoretickom tvare. V praxi sa tieto pružiny používajú v železničných vagónoch alebo vo vozidlách. Konštrukčne sú riešené tak, že v nezaťaženom stave sú prehnuté a pri záťaži sa vyrovnávajú *(obr. 7.64)*.



Obr. 7.64

PRÍKLAD

Vypočítajte šírku pružnice a teoretický priehyb zväzku pružníc podľa *obr. 7.64*, ak vzdialenosť medzi okami pružiny je 2 000 mm, hrúbka pružnice je 20 mm, zväzok má 12 pružníc. Pružina je zaťažená silou $F = 4 \cdot 10^4$ N, $\sigma_{Do} = 500$ MPa a $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

Riešenie:

1. Výpočet šírky listu pružnice

$$\sigma_{o\,max} = \frac{3 \cdot F \cdot l}{2 \cdot n \cdot b \cdot h^2} \leq \sigma_{Do}$$

z toho

$$b \geq \frac{3 \cdot F \cdot l}{2 \cdot n \cdot h^2 \cdot \sigma_{Do}}$$

$$b \geq \frac{3 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 2000}{2 \cdot 12 \cdot 20^2 \cdot 500} = 50 \quad \text{mm}$$

Výpočet maximálneho teoretického priehybu

$$y = \frac{l^2 \cdot \sigma_{Do}}{4 \cdot h \cdot E}$$

$$y = \frac{2\,000^2 \cdot 500}{4 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 10^5} = 125 \text{ mm}$$

Zhrnutie:

Zväzok pružníc tvoria v podstate votknuté nosníky rovnakého napätia konštantnej výšky. Východiskový tvar rovnoramenného trojuholníka je rozdelený na jednotlivé pružnice.

7.10 DEFORMÁCIA PRI OHYBE

Os nosníka sa vplyvom zaťaženia deformuje. Zakrivenú os nosníka nazývame ohybová čiara. V praxi často potrebujeme poznať tvar ohybovej čiary, či už ide o priehyb, uhol natočenia alebo polomer zakrivenia. Často je kladená požiadavka, aby namáhaný nosník vydržal nielen po pevnostnej stránke, ale aby neprekročil ani dovolené deformácie. Napríklad pre deformácie hriadeľa je stanovené:

$y_{max} = 0{,}005 \cdot m$	pod ozubeným kolesom, kde m je modul,
$\alpha_{max} = 0{,}001$ rad	pre valivé ložiská a ložiská s výkyvnými panvami,
$\alpha_{max} = 0{,}0003$ rad	pre klzné ložiská s pevnými panvami.

Pri riešení vychádzame zo zjednodušujúcich predpokladov:

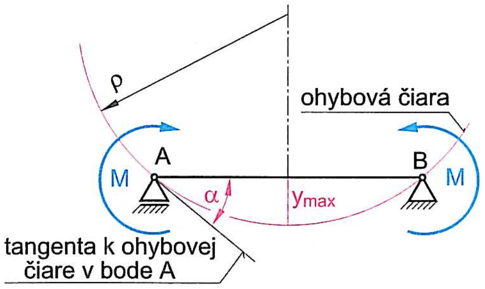
a) pôvodná os nosníka je priama,
b) prierez nosníka má rovinu súmernosti,
c) zaťaženie leží v rovine súmernosti, kolmo na os nosníka,
d) pre materiál platí Hookov zákon,
e) prierezy zostanú po deformácii kolmé na ohybovú čiaru,
f) pomer prierezových rozmerov nosníka k jeho dĺžke je minimálne $\frac{1}{10}$, aby sme mohli zanedbať vplyv deformácií spôsobených priečnymi silami.

7.10.1 Čiara ohybu

Ohybová čiara leží v rovine súmernosti. Pri malej deformácii predpokladáme, že sa body posúvajú iba zvislo a tento posuv nazývame priehyb. Ohybová čiara leží v neutrálnej vrstve, ktorá sa nepredlžuje. Priebeh ohybovej čiary môžeme odvodiť so vzťahu:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_o}{E \cdot J_x}$$

Najjednoduchší prípad nastáva vtedy, ak M_o a tuhosť $E \cdot J_x$ sú konštantné, vtedy je konštantný aj polomer krivosti a ohybová čiara je kružnica.



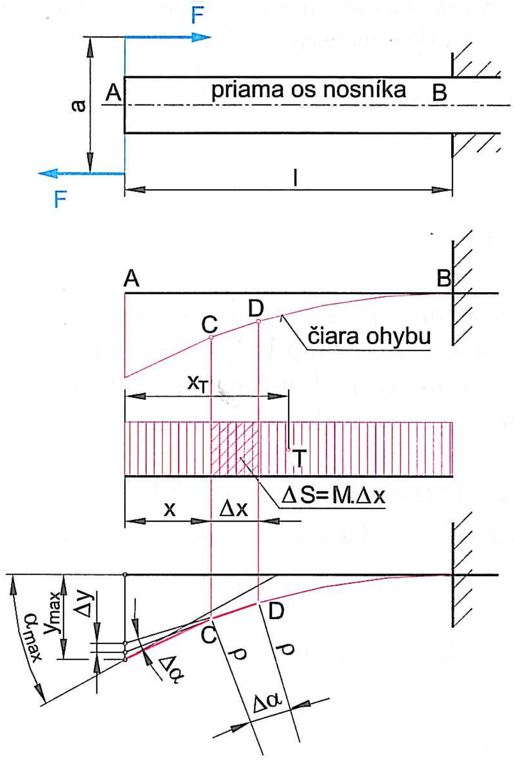
Obr. 7.65

Na jednoznačné určenie znamienka pre priehyb a uhol natočenia platí zásada:

Priehyb je kladný vtedy, ak smeruje nadol, záporný, ak smeruje nahor. Uhol natočenia je kladný, ak sa dotyčnica otáča v smere pohybu hodinových ručičiek, záporný, ak sa otáča proti pohybu hodinových ručičiek.

7.10.2 Deformácie votknutých nosníkov

Riešme deformáciu votknutého nosníka konštantného prierezu zaťaženého dvojicou síl. Na nosníku vzniká čistý ohyb a 83,6priehyb nie je ovplyvnený priečnou silou. Ohybová čiara je kruhový oblúk, pretože M_o aj E a J_x sú konštantné, a teda aj ρ je konštantné.



Obr. 7.66

Pre tento prípad platí:

$$\rho = \frac{E \cdot J_x}{M_o}$$

kde $M_o = F \cdot a$.

Zvoľme si úsek Δx. Ten sa vplyvom deformácie zmení na oblúk Δs. Pretože v praxi sú priehyby veľmi malé, môžeme ich dĺžky považovať za rovnaké, teda

$$\Delta x = \Delta s$$

V bodoch C a D veďme dotyčnice k oblúku Δs. Tieto dotyčnice zvierajú uhol $\Delta\hat{\alpha}$, rovnako ako normály, ktoré sa pretínajú v strede krivosti. Uhol $\Delta\hat{\alpha}$ je prírastok odchýlky dotyčnice medzi koncovými bodmi C a D na oblúku Δs. Platí:

$$\Delta x = \Delta s = \rho \cdot \Delta\hat{\alpha}$$

Ak dosadíme za

$$\rho = \frac{E \cdot J_x}{M_o}$$

$$\Delta\hat{\alpha} = \frac{\Delta x}{\rho} = \frac{M \cdot \Delta x}{E \cdot J_x}$$

Urobme teraz súčet elementárnych prírastkov $\Delta\widehat{\alpha}$ od miesta votknutia v bode B, až po voľný koniec v bode A. Tento uhol $\widehat{\alpha}_{max}$ je odchýlka ohybovej čiary na voľnom konci nosníka.

$$\sum \Delta\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}_{max} = \sum \frac{M \cdot \Delta x}{E \cdot J_x}$$

Pretože pri nosníkoch s konštantným prierezom sa $E \cdot J_x =$ konšt., potom

$$\widehat{\alpha}_{max} = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \sum M \cdot \Delta x$$

Súčin $M \cdot \Delta x$ je element plochy ΔS_M momentového obrazca, potom $\sum M \cdot \Delta x$ musí byť plocha celého momentového obrazca S_M. Z toho vyplýva, že odchýlka dotyčnice ohybovej čiary na voľnom konci votknutého nosníka sa *rovná podielu plochy momentového obrazca a tuhosti* $E \cdot J_x$:

$$\widehat{\alpha}_{max} = \frac{S_M}{E \cdot J_x} \; [\mathrm{rad}]$$

V prípade nášho votknutého nosníka zaťaženého silovou dvojicou na jeho konci je uhol natočenia

$$\widehat{\alpha}_{max} = \frac{M_o \cdot l}{E \cdot J_x}$$

Môžeme teda povedať, že odchýlka dotyčnice v ľubovoľnom mieste nosníka sa rovná ploche momentového obrazca pre daný prierez, delenej tuhosťou $E \cdot J$.

Teraz riešme veľkosť priehybu. Z *obr. 7.66* vidieť, že každému prírastku uhla $\Delta\alpha$ zodpovedá aj prírastok priehybu Δy na zvislici v bode A. Súčet všetkých elementárnych prírastkov sa rovná celému priehybu y na voľnom konci. Platí:

$$\Delta y = x \cdot \Delta\widehat{\alpha} = x \cdot \frac{M \cdot \Delta x}{E \cdot J}$$

teda

$$y = \sum \Delta y = \sum \frac{M \cdot x \cdot \Delta x}{E \cdot J} = \frac{1}{E \cdot J} \sum M \cdot x \cdot \Delta x$$

kde $M \cdot \Delta x$ je element plochy momentového obrazca. Výraz $M \cdot x \cdot \Delta x$ je lineárny moment elementárnej plochy ΔS_M k voľnému koncu nosníka. Súčet všetkých lineárnych momentov celej momentovej plochy $\sum M \cdot x \cdot \Delta x$ je lineárny moment celej momentovej plochy, čo je vlastne súčin plochy momentového obrazca a vzdialenosti ťažiska od voľného konca nosníka.

$$y = \frac{S_M \cdot x_T}{E \cdot J} = \widehat{\alpha} \cdot x_T \; [\mathrm{mm, m}]$$

V našom prípade je vzdialenosť ťažiska

$$x_T = \frac{l}{2}$$

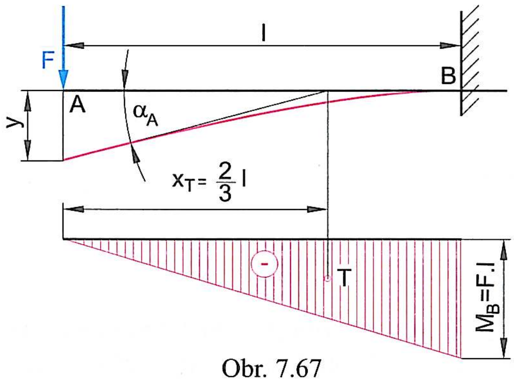
teda

$$y = \frac{M_o \cdot l}{E \cdot J} \cdot \frac{l}{2} = \frac{M_o \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J}$$

Vo všeobecnosti platí:

Priehyb v ľubovoľnom mieste votknutého nosníka sa rovná podielu lineárneho momentu plochy momentového obrazca medzi uvažovaným bodom X a bodom votknutia a tuhosťou v ohybe $E \cdot J$.

a) Votknutý nosník zaťažený osamelou silou na konci



Obr. 7.67

Pre priehyb v bode A platí: $\alpha_A = \dfrac{S_M}{E \cdot J} = \dfrac{l}{2} \cdot \dfrac{F \cdot l}{E \cdot J} = \dfrac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J}$

$$y_A = y_{max} = \frac{S_M \cdot x_T}{E \cdot J}$$

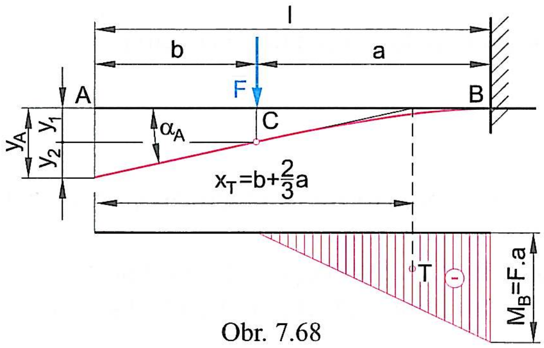
kde

$$S_M = F \cdot l \cdot \frac{l}{2} \qquad x_T = \frac{2}{3} \cdot l$$

po dosadení a úprave:

$$y_A = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

b) Votknutý nosník zaťažený osamelou silou medzi votknutím a voľným koncom



Obr. 7.68

$$\widehat{\alpha}_A = \widehat{\alpha}_C = \frac{F \cdot a \cdot a}{E \cdot J \cdot 2} = \frac{F \cdot a^2}{2 \cdot E \cdot J}$$

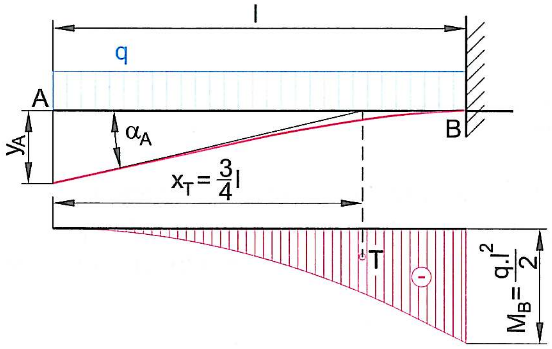
Priehyb v bode C

$$y_C = y_1 = \widehat{\alpha}_A \cdot \frac{2}{3} \cdot a = \frac{F \cdot a^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{2}{3} \cdot a = \frac{F \cdot a^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

Maximálny priehyb je v bode A

$$y_A = \widehat{\alpha}_A \cdot \left(b + \frac{2}{3} \cdot a\right) = \frac{F \cdot a^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \left(b + \frac{2}{3} \cdot a\right)$$

c) Votknutý nosník zaťažený spojitým bremenom po celej dĺžke



Obr. 7.69

Veľkosť momentovej plochy podľa tabuliek:

$$S_M = \frac{M_B \cdot l}{3}$$

a poloha ťažiska tejto plochy od voľného konca:

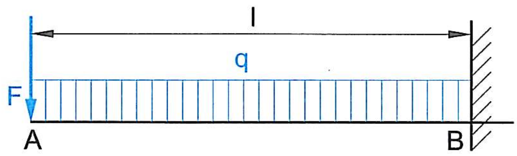
$$x_T = \frac{3}{4} \cdot l$$

Potom

$$\widehat{\alpha}_A = \frac{S_M}{E \cdot J} = \frac{M_B \cdot l}{3 \cdot E \cdot J} = \frac{F_q \cdot l^2}{6 \cdot E \cdot J} = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J}$$

$$y_A = \frac{S_M}{E \cdot J} \cdot x_T = \frac{F_q \cdot l^2}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{3}{4} \cdot l = \frac{F_q \cdot l^3}{8 \cdot E \cdot J} = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J}$$

PRÍKLAD

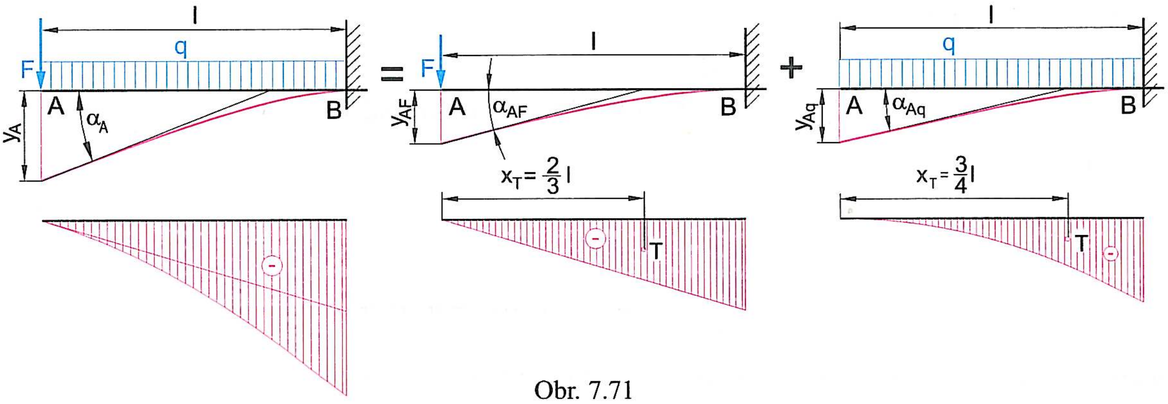


Obr. 7.70

Určte uhol natočenia a maximálny priehyb votknutého oceľového nosníka kruhového prierezu s priemerom $d = 40$ mm a dĺžkou $l = 1\,000$ mm, zaťaženého osamelou silou $F = 500$ N na konci s prihliadnutím na pôsobenie vlastnej tiaže.

Rozbor:

Nosník je zaťažený kombinovaným zaťažením, t. j. osamelou silou a spojitým bremenom. Na riešenie použijeme metódu superpozície, t. j. najskôr vypočítame účinok od sily F a potom účinok spôsobený spojitým bremenom. Výsledný účinok dostaneme ako súčet jednotlivých účinkov.



Obr. 7.71

Riešenie:

Pre uhol natočenia od sily F platí:

$$\hat{\alpha}_{AF} = \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J}$$

kde $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa a pre kruhový prierez:

$$J = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 40^4}{64} = 125\,663{,}71 \ \text{mm}^4$$

$$\hat{\alpha}_{AF} = \frac{500 \cdot 1000^2}{2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 125\,663{,}71} = 0{,}0095 \ \text{rad}$$

Pre priehyb od sily F platí:

$$y_{AF} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

$$y_{AF} = \frac{500 \cdot 1\,000^3}{3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 125\,663{,}71} = 6{,}317 \ \text{mm}$$

Ak chceme počítať deformáciu spôsobenú spojitým bremenom, musíme najskôr zistiť jeho hodnotu. Tú zistíme, ak tiažovú silu tyče vydelíme jej dĺžkou.

Tiažová sila tyče:

$$F_g = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot l \cdot \rho \cdot g$$

$$F_g = \frac{\pi \cdot 40^2}{4} \cdot 1000 \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}81 = 96{,}77 \ \text{N}$$

$$q = \frac{F_g}{l} = \frac{96{,}77}{1000} = 0{,}0968 \ \text{Nmm}^{-1}$$

Pre uhol natočenia od spojitého bremena q platí:

$$\hat{\alpha}_{Aq} = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J}$$

$$\hat{\alpha}_{Aq} = \frac{0{,}0968 \cdot 1000^3}{6 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 125\,663{,}71} = 0{,}000\,6 \ \text{rad}$$

Pre priehyb od spojitého bremena platí:

$$y_{Aq} = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J}$$

$$y_{Aq} = \frac{0{,}0968 \cdot 1\,000^4}{8 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 125\,663{,}71} = 0{,}459 \ \text{mm}$$

Celkový uhol natočenia:

$$\widehat{\alpha}_A = \widehat{\alpha}_{AF} + \widehat{\alpha}_{Aq}$$
$$\widehat{\alpha}_A = 0{,}0095 + 0{,}0006 = 0{,}0101 \ \text{rad}$$

Hodnota uhla v stupňoch:

$$\alpha^\circ_A = \frac{\widehat{\alpha}_{AF}}{\pi} \cdot 180^\circ$$
$$\alpha^\circ_A = \frac{0{,}0101}{\pi} \cdot 180^\circ = 0{,}5787^\circ = 0^\circ 34' 43''$$

Maximálny priehyb dostaneme súčtom čiastočných priehybov:

$$y_A = y_{AF} + y_{Aq}$$
$$y_A = 6{,}317 + 0{,}459 = 6{,}776 \ \text{mm}$$

Zhrnutie:

Deformačné podmienky pre votknuté nosníky môžeme vyjadriť ako:

a) krivosť

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_o}{E \cdot J}$$

b) uhol natočenia prierezu

$$\widehat{\alpha} = \frac{S_M}{E \cdot J} = \frac{\Sigma M_x \cdot x}{E \cdot J}$$

c) priehyb

$$y = \widehat{\alpha} \cdot x_T = \frac{S_M \cdot x_T}{E \cdot J}$$

7.10.3 Deformácie nosníkov na dvoch podperách

Prostriedkami stredoškolskej matematiky sa dajú riešiť iba nosníky na dvoch podperách zaťažené symetricky. Najjednoduchšie ich riešime tak, že nosník rozdelíme v strede na dva votknuté nosníky s votknutím v strede. Spôsob riešenia uhla natočenia a priehybu je zrejmé z *obr. 7.72*, kde sú dva prípady súmerne zaťaženého nosníka:

– s osamelou silou v strede *(obr. 7.72 a)*,
– nosník zaťažený spojitým bremenom *(obr. 7.72 b)*.

$$M_{o\max} = \frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{F \cdot l}{4}$$

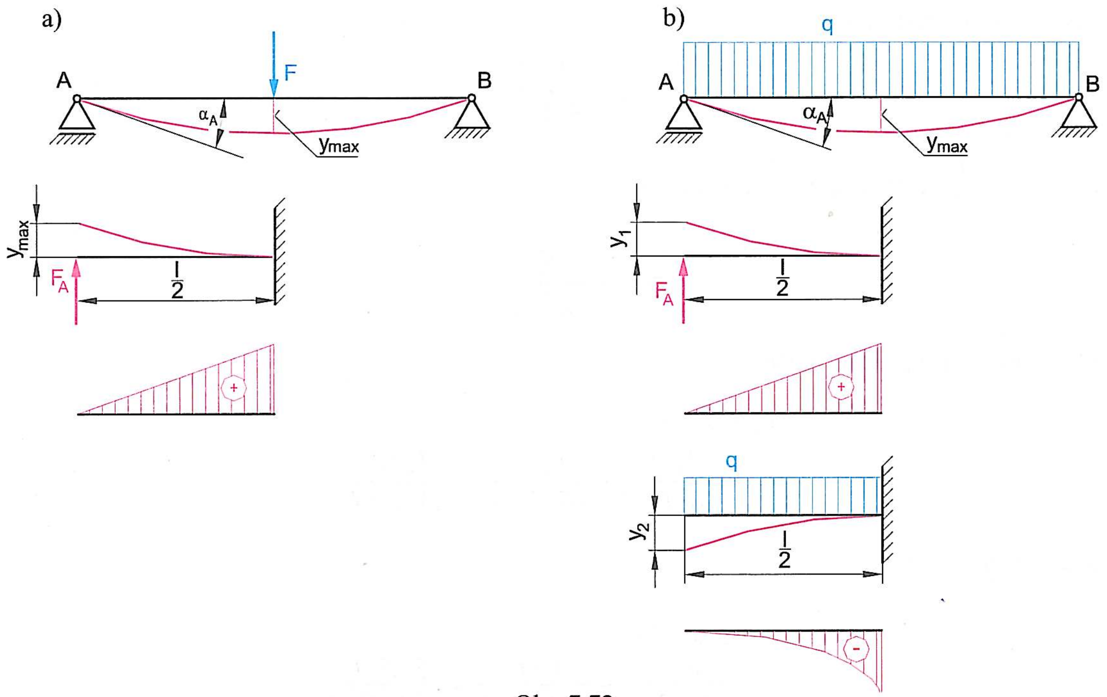
Uhol natočenia v podperách je v tomto prípade rovnaký:

$$\widehat{\alpha}_A = \frac{S_M}{E \cdot J} = \frac{\frac{F \cdot l}{4} \cdot \frac{l}{4}}{E \cdot J} = \frac{F \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot J}$$

a priehyb:

$$y_{\max} = \frac{S_M \cdot x_T}{E \cdot J} = \frac{F \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{l}{3} = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}$$

Ak je nosník zaťažený po celej dĺžke rovnomerne rozloženým spojitým bremenom, na jeho riešenie použijeme metódu superpozície. Nosník opäť rozložíme na dva votknuté nosníky delené v jeho strede. Jeden nosník zaťažíme väzbovou silou a druhý spojitým bremenom. Výsledný účinok je daný súčtom jednotlivých účinkov.



Obr. 7.72

Pre uhol natočenia spôsobený väzbovou silou (čo je zaťaženie osamelou silou votknutého nosníka na jeho konci) sme odvodili vzťah:

$$\widehat{\alpha} = \frac{S_M}{E \cdot J}$$

kde

$$S_M = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_q}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}$$

po dosadení

$$\widehat{\alpha}_{A1} = \frac{F_q \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot J}$$

Pre priehyb spôsobený väzbovou silou platí:

$$y = \frac{S_M \cdot x_T}{E \cdot J}$$

kde

$$x_T = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2}$$

po dosadení

$$y_{A1} = \frac{F_q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}$$

Pre uhol natočenia spôsobený spojitým bremenom sme odvodili:

$$\widehat{\alpha} = \frac{F_q \cdot l}{6 \cdot E \cdot J}$$

Do tohto vzťahu za F_q dosadíme $\frac{F_q}{2}$, za l dosadíme $\frac{l}{2}$ a dostaneme:

$$\widehat{\alpha}_{A2} = \frac{F_q \cdot l^2}{48 \cdot E \cdot J}$$

Podobne pre priehyb sme odvodili:

$$y = \frac{F_q \cdot l^3}{8 \cdot E \cdot J}$$

a keď za F_q dosadíme $\frac{F_q}{2}$ a za l opäť $\frac{l}{2}$ dostaneme:

$$y_{A2} = \frac{F_q \cdot l^3}{128 \cdot E \cdot J}$$

Celkový uhol natočenia potom bude:

$$\widehat{\alpha}_A = \widehat{\alpha}_{A1} - \widehat{\alpha}_{A2}$$
$$\widehat{\alpha}_A = \frac{F_q \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot J} - \frac{F_q \cdot l^2}{48 \cdot E \cdot J} = \frac{F_q \cdot l^2}{24 \cdot E \cdot J}$$

Celkový priehyb je:

$$y_{max} = y_{A1} - y_{A2}$$
$$y_{max} = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J} - \frac{F \cdot l^3}{128 \cdot E \cdot J} = \frac{5 \cdot F \cdot l^3}{384 \cdot E \cdot J}$$

Pre všetky základné spôsoby zaťaženia sú vypracované vzťahy nielen na výpočet maximálnych uhlov natočenia a priehybov, ale aj pre ich hodnoty v ľubovoľnom mieste. Tieto hodnoty nájdeme napr. aj v strojníckych tabuľkách.

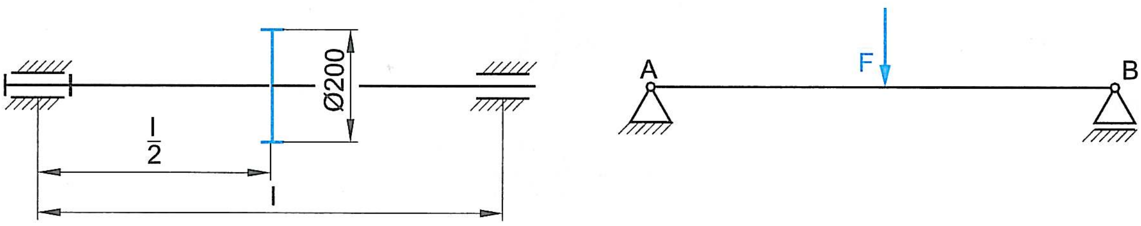
Často sa stáva, že potrebujeme určiť prierezové rozmery nosníka s ohľadom na maximálne dovolený priehyb. Je to napríklad pri navrhovaní priemerov hriadeľa, na ktorom budú ozubené kolesá, kde dovolený priehyb nesmie prekročiť hodnotu y_{max} = 0,005 modulu. V takýchto prípadoch urobíme výpočet prierezových rozmerov dvakrát:

1. podľa pevnostných podmienok,
2. podľa deformačných podmienok.

Prierez navrhneme podľa toho výpočtu, v ktorom vyšli vyššie prierezové rozmery.

PRÍKLAD

Aký minimálny priemer musí mať hriadeľ dĺžky l = 200 mm z materiálu podľa EN 1027-1 S355J0 (pôvodné označenie 11 523), na ktorom je v strede ozubené koleso s priemerom D = 200 mm a modulom m = 5 a ktoré prenáša M_K = 200 Nm?



Obr. 7.73

Riešenie:

Príklad budeme riešiť dvakrát. Prvýkrát z pevnostnej podmienky a druhýkrát z deformačnej podmienky. Pretože pre oba prípady vyhovuje riešenie s väčším priemerom, budeme za výsledný priemer hriadeľa brať do úvahy väčší priemer.

1. Výpočet priemeru podľa pevnostnej podmienky:

Výpočet sily namáhajúcej hriadeľ:

$$F = \frac{2 \cdot M_K}{D}$$

$$F = \frac{2 \cdot 200}{0,2} = 2\,000 \text{ N}$$

Výpočet ohybového momentu:

Pretože je zaťaženie nosníka v strede, musia sa obidve väzbové sily rovnať polovici zaťažujúcej sily.

$$F_A = \frac{F}{2}$$

$$F_A = F_B = \frac{2\,000}{2} = 1\,000 \text{ N}$$

$$M_o = \frac{l}{2} \cdot F_A$$

$$M_o = 100 \cdot 1\,000 = 1 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

Výpočet priemeru:

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} \leq \sigma_{DoIII}$$

$$\sigma_{DoIII} \geq \frac{32 \cdot M_o}{\pi \cdot d_p^3}$$

$$d_p \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_o}{\pi \cdot \sigma_{DoIII}}}$$

Pretože sa hriadeľ bude otáčať, musíme brať do úvahy striedavé namáhanie. Podľa EN 1027-1 pre oceľ S355J0 číselný údaj uvedený za písmenom S označuje hodnotu napätia na medzi klzu R_e = 355 MPa. Z toho vyrátame dovolené napätie

$$\sigma_{DoIII} = c_{III} \cdot \sigma_{Do}$$

$$\sigma_{Do} = \frac{R_e}{k} = \frac{355}{2} = 177,5 \text{ MPa}$$

Pre uvedený materiál sa c_{III} = 0,6

$$\sigma_{DoIII} = 0,6 \cdot 177,5 = 106,5 \text{ MPa}$$

Po dosadení dostaneme

$$d_p \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1 \cdot 10^5}{\pi \cdot 106,5}} = 21,2 \text{ mm}$$

2. Výpočet priemeru podľa deformačnej podmienky:

$$y_{max} \geq \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}$$

Pre kruhový prierez platí:

$$J = \frac{\pi \cdot d_d^4}{64}$$

Po dosadení a úprave dostaneme:

$$d_d \geq \sqrt[4]{\frac{64 \cdot F \cdot l^3}{48 \cdot \pi \cdot E \cdot y_{max}}}$$

Maximálny priehyb $y_{max} = 0{,}005 \cdot 5 = 0{,}025$ mm

$$d_d \geq \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 2\,000 \cdot 200^3}{48 \cdot \pi \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 0{,}025}} = 33{,}7 \text{ mm}$$

Z vypočítaných výsledkov vyplýva, že pre daný nosník uplatníme minimálny priemer, ktorý vyšiel z deformačnej podmienky $d_d = 33{,}7$ mm.

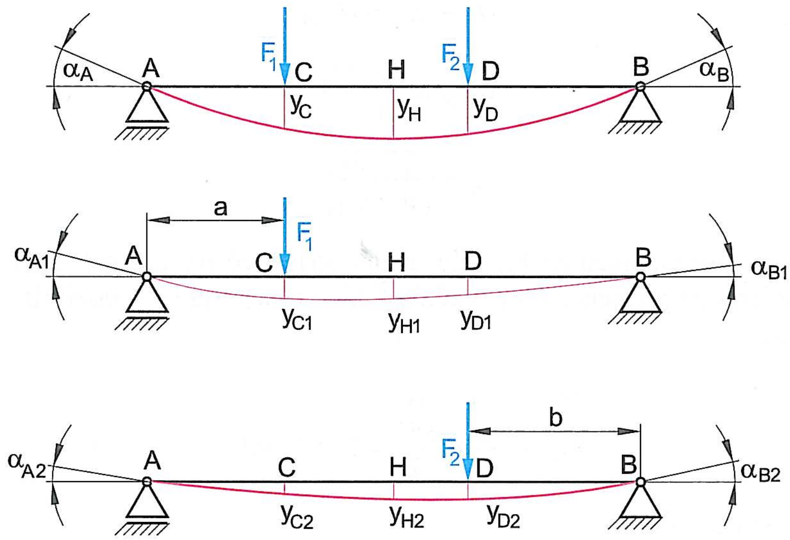
7.10.4 Riešenie deformácií metódou superpozície

Ak máme nosník zaťažený viacerými silami, použijeme metódu superpozície. Postup je takýto:
Rozložíme celkové zaťaženie na základné typy. Pre každý z nich určíme uhol natočenia a priehyb v požadovanom mieste. Výslednú hodnotu dostaneme ako súčet čiastočných hodnôt. Aby sme sa vyznali v čiastočných deformáciách, zvyknú sa používať dva indexy. Prvý index určuje miesto deformácie a druhý jej príčinu. Pre náš prípad nosníka zaťaženého dvomi silami bude platiť:

$$\alpha_A = \alpha_{A1} + \alpha_{A2}; \qquad \alpha_B = \alpha_{B1} + \alpha_{B2};$$

$$y_C = y_{C1} + y_{C2}; \qquad y_D = y_{D1} + y_{D2}; \qquad y_H = y_{H1} + y_{H2}$$

Takto sa dajú podľa vopred známych vzťahov pre uhol natočenia prierezu a pre priehyb vypočítať deformácie v ľubovoľnom mieste daného nosníka.



Obr. 7.74

Zhrnutie:

Ak je nosník na dvoch podperách zaťažený symetricky, môžeme ho riešiť ako dva votknuté nosníky s votknutím v strede dĺžky. Vo všeobecnom prípade môžeme použiť metódu superpozície. Hodnoty uhlov natočenia a priehybu v danom mieste vyrátame podľa vzťahov pre základné zaťaženia, ktoré sú uvádzané v tabuľkách.

7.10.5 Grafické riešenie ohybovej čiary

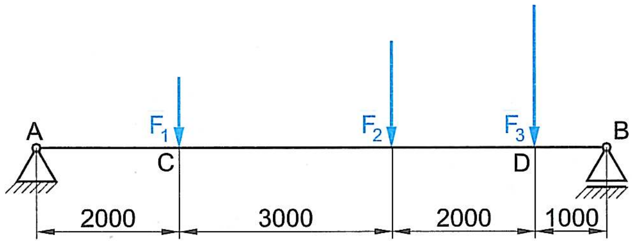
Táto metóda je vhodná pre veľmi zložité kombinované zaťaženie s mnohými silami, pri riešení nosníkov s premenlivými prierezmi. Zo vzťahu:

$$y = \frac{\sum M \cdot x \cdot \Delta x}{E \cdot J} = \frac{\text{lineárny moment momentovej plochy}}{\text{tuhosť v ohybe}}$$

vyplýva, že priehyb y je závislý od momentu momentovej plochy. Moment riešime graficky pomocou silového a vláknového obrazca. Z toho vyplýva, že treba dvakrát nakresliť vláknový mnohouholník. Prvýkrát pre dané zaťaženie, čím získame momentovú plochu. Túto momentovú plochu považujeme za zaťaženie nového združeného nosníka. Druhým nakreslením vláknového obrazca pre združený nosník získame obalové dotyčnice ohybovej čiary. Musíme dávať pozor na mierky a pri prepočte nameraných hodnôt na skutočné hodnoty. Veľká výhoda tejto metódy je v tom, že jedným riešením môžeme vyriešiť priehyb v ľubovoľnom mieste nosníka.

PRÍKLAD

Zistite maximálny moment, maximálny priehyb, priehyb v mieste *C* a *D* a uhol natočenia v podperách *A* a *B* na nosníku podľa *obr. 7.75* ak je nosník vytvorený z profilu I 200. $F_1 = 2 \cdot 10^4$ N, $F_2 = 3 \cdot 10^4$ N, $F_3 = 4 \cdot 10^4$ N.



Obr. 7.75

Riešenie:

1. Najskôr si zvolíme mierky:
   mierka dĺžok: m_L,
   mierka síl: m_F.
2. V daných mierkach nakreslíme nosník, sily a zostrojíme vláknový obrazec. Vláknový obrazec zodpovedá v mierke priebehu ohybových momentov a veľkosť momentu v ľubovoľnom mieste vypočítame zo vzťahu:
$$M_o = y \cdot H_1 \cdot m_L \cdot m_F$$
   kde y je výška vláknového polygónu v danom mieste a H_1 je vzdialenosť pólu.
3. Momentovú plochu si rozdelíme na diely. Čím menšie bude delenie, tým presnejší bude výsledok. V ťažiskách týchto čiastočných plôch zavedieme sily, ktoré svojou veľkosťou musia zodpovedať veľkostiam plôch. Pre tieto sily si zvolíme mierku momentových plôch: m_{SM}.
4. Urobíme zloženie síl s pólovou vzdialenosťou H_2 a zostrojíme vláknový polygón.
5. Zostrojíme ohybovú čiaru, ktorá je dotyčnicou k polygónu. Maximálny priehyb bude v mieste, kde sa pretína prvé a posledné vlákno.
6. Z nameraných hodnôt graficky zisteného priehybu y vypočítame skutočný priehyb y_{skut} podľa vzorca:
$$y_{skut} = y \cdot \frac{H_1 \cdot H_2 \cdot m_L^3 \cdot m_F \cdot m_{SM}}{E \cdot J}$$
7. Uhly natočenia v podperách zistíme podľa vzťahov:
$$\widehat{\alpha}_A = F_{AS} \cdot \frac{H_1 \cdot m_L^2 \cdot m_F \cdot m_{SM}}{E \cdot J}$$
$$\widehat{\alpha}_B = F_{BS} \cdot \frac{H_1 \cdot m_L^2 \cdot m_F \cdot m_{SM}}{E \cdot J}$$

kde F_{AS} a F_{BS} sú veľkosti väzbových síl združeného nosníka.

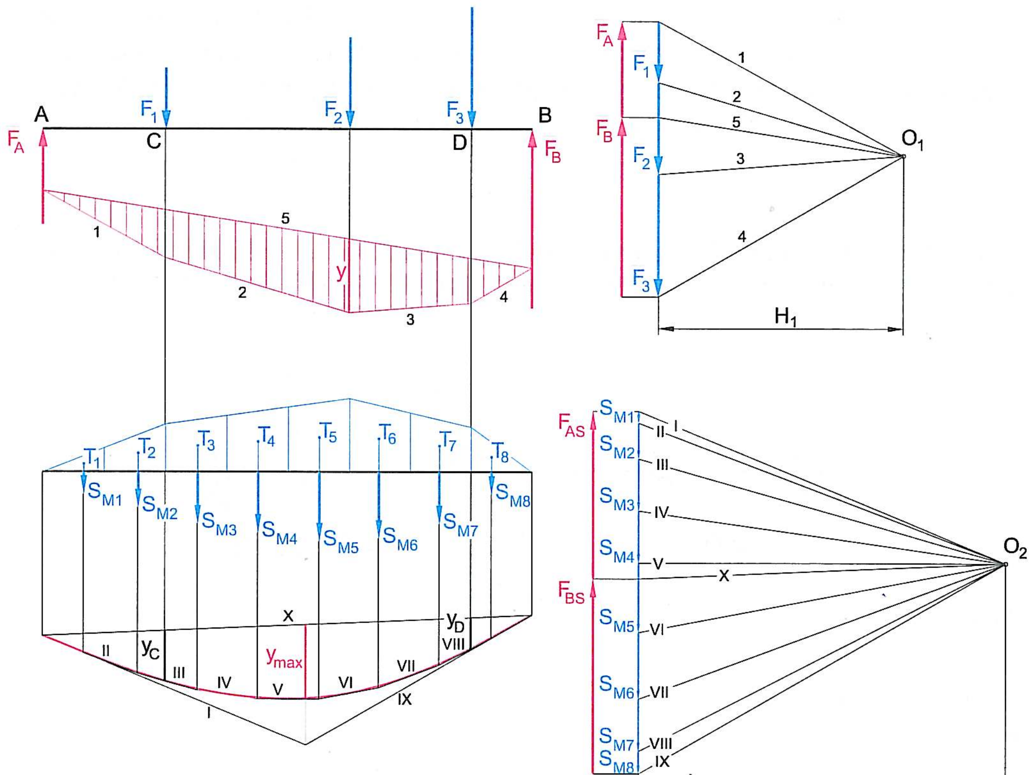
Samotné riešenie nosníka je zrejmé z *obr. 7.76.*

1. Určíme mierky:

   m_L: 100 mm ≙ 1 mm

   m_F: 2 000 N ≙ 1 mm

   vzdialenosť pólu:
$$H_1 = 40 \text{ mm}$$



Obr. 7.76

2. Z *obr. 7.76* vyplýva, že M_{omax} je v mieste pôsobenia sily F_2, teda v bode C a jeho hodnota:

$$M_{o\,max} = y \cdot H_1 \cdot m_L \cdot m_F$$

Výšku vláknového polygónu sme v tomto mieste odmerali: $y = 12$ mm.

$$M_{o\,max} = 12 \cdot 40 \cdot 100 \cdot 2\,000 = 96 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

3. Rozdelíme momentovú plochu na 8 dielov. Vypočítame hodnoty čiastočných plôch, kde:

$S_{M1} = 19{,}5$ mm², $S_{M2} = 58{,}6$ mm², $S_{M3} = 85{,}2$ mm², $S_{M4} = 99{,}2$ mm²,
$S_{M5} = 113{,}3$ mm², $S_{M6} = 107{,}8$ mm², $S_{M7} = 85{,}2$ mm², $S_{M8} = 36{,}7$ mm²,

Mierka momentových plôch:

$$m_{SM}\text{: } 10 \text{ mm}^2 \triangleq 1 \text{ mm}$$

4. Z ohybovej čiary určíme vo vyznačenom mieste najväčší priehyb:

$$y_{skut,max} = y_{max} \cdot \frac{H_1 \cdot H_2 \cdot m_L^3 \cdot m_F \cdot m_{SM}}{E \cdot J}$$

pričom sme namerali $y_{max} = 12$ mm, v mieste C $y_C = 8{,}3$ mm a v mieste D $y_D = 5{,}1$ mm. Pre daný nosník je kvadratický moment prierezu podľa strojníckych tabuliek $J = 2\,140$ cm⁴ $= 21\,400\,000$ mm⁴ a modul pružnosti pre oceľ $E = 2{,}1.10^5$ MPa. Tuhosť nosníka vypočítame:

$$E \cdot J = 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 21\,400\,000 = 4{,}494 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Výsledné priehyby:

$$y_{skut,max} = 12 \cdot \frac{40 \cdot 60 \cdot 100^3 \cdot 2000 \cdot 10}{4{,}494 \cdot 10^{12}}$$

$$y_{skut,max} = 128{,}17 \text{ mm}$$

$$y_{skut,C} = 8{,}3 \cdot \frac{40 \cdot 60 \cdot 100^3 \cdot 2000 \cdot 10}{4{,}494 \cdot 10^{12}} = 88{,}65 \text{ mm}$$

$$y_{skut,D} = 5{,}1 \cdot \frac{40 \cdot 60 \cdot 100^3 \cdot 2000 \cdot 10}{4{,}494 \cdot 10^{12}} = 54{,}47 \text{ mm}$$

5. Určíme uhly natočenia v podperách:

$$\overset{\frown}{\alpha}_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{AS}} \cdot \frac{H_1 \cdot m_{\mathrm{L}}^2 \cdot m_{\mathrm{F}} \cdot m_{\mathrm{SM}}}{E \cdot J}$$

$$\overset{\frown}{\alpha}_{\mathrm{B}} = F_{\mathrm{BS}} \cdot \frac{H_1 \cdot m_{\mathrm{L}}^2 \cdot m_{\mathrm{F}} \cdot m_{\mathrm{SM}}}{E \cdot J}$$

Namerali sme hodnoty $F_{\mathrm{AS}} = 27{,}4$ mm a $F_{\mathrm{BS}} = 31{,}8$ mm.

$$\overset{\frown}{\alpha}_{\mathrm{A}} = 27{,}4 \cdot \frac{40 \cdot 100^2 \cdot 2\,000 \cdot 10}{4{,}494 \cdot 10^{12}} = 0{,}0488 \text{ rad}$$

$$\alpha_{\mathrm{A}}^{\circ} = 2°47'41''$$

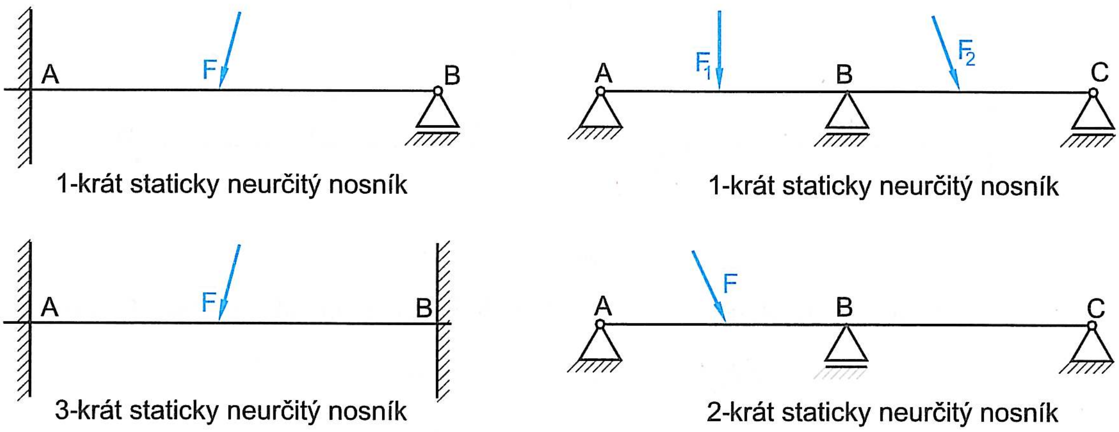
$$\overset{\frown}{\alpha}_{\mathrm{B}} = 31{,}8 \cdot \frac{40 \cdot 100^2 \cdot 2\,000 \cdot 10}{4{,}494 \cdot 10^{12}} = 0{,}0566 \text{ rad}$$

$$\alpha_{\mathrm{B}}^{\circ} = 3°14'36''$$

7.11 STATICKY NEURČITÉ NOSNÍKY

Ako sme už uviedli v článku 7.2, uloženie nosníka je staticky neurčité vtedy, ak počet neznámych zložiek väzbových síl a momentov je väčší ako počet statických podmienok rovnováhy. Nosník je toľkokrát staticky neurčitý, o koľko je neznámych zložiek väzbových síl navyše. Ak chceme zostávajúce neznáme zložky vyrátať, musíme použiť ešte ďalšie deformačné podmienky (uhol natočenia prierezu alebo priehyb). Najjednoduchšia je metóda porovnávania deformácií. Je vhodná na riešenie votknutých nosníkov a nosníkov na troch podperách. Na riešenie použijeme deformačné podmienky za predpokladu, že:

a) celkový priehyb v podpere sa rovná nule,
   alebo
b) celkový uhol natočenia vo votknutí sa rovná nule.

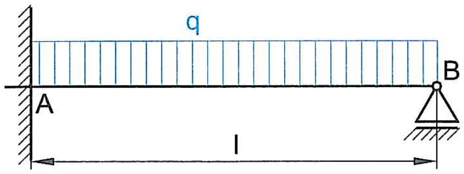


Obr. 7.77

Pri použití oboch podmienok je základný postup vždy rovnaký:

1. Staticky neurčitý nosník rozdelíme na dva čiastočné, staticky určité nosníky a pre každý z nich vyjadríme deformáciu.
2. Urobíme porovnanie deformácií na obidvoch nosníkoch, pričom predpokladáme, že ich súčet sa rovná nule.
3. Z tejto podmienky vyrátame prevyšujúcu väzbovú silu.
4. Ostatné väzbové sily a momenty vypočítame zo statických podmienok rovnováhy.

Nahradenie staticky neurčitého systému staticky určitým systémom urobíme tak, že väzbovú silu, ktorá je v staticky neurčitom systéme navyše považujeme za neznámu silu alebo neznámy moment. Staticky určitý systém vytvoríme podľa toho, čo považujeme za staticky neurčitú veličinu.



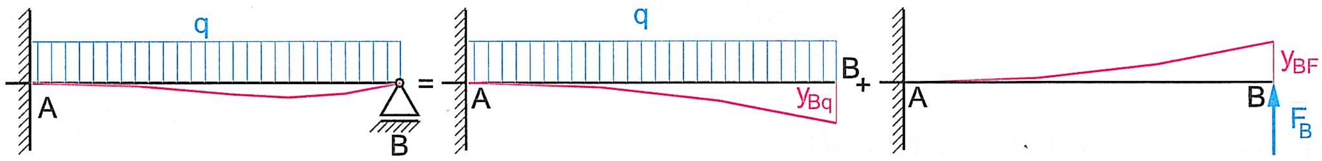
Obr. 7.78

PRÍKLAD

Vyjadrite veľkosti väzbovej sily na staticky neurčitom votknutom nosníku podľa *obr. 7.78* zaťaženého spojitým bremenom po celej dĺžke nosníka.

Riešenie:

Staticky neurčitý nosník rozdelíme na dva staticky určité nosníky, z ktorých jeden bude zaťažený spojitým bremenom a bude vyvolávať priehyb y_{Bq} a druhý bude zaťažený silou F_B, ktorú považujeme za neznámu a bude vyvolávať priehyb y_{BF}.



Obr. 7.79

Platí:

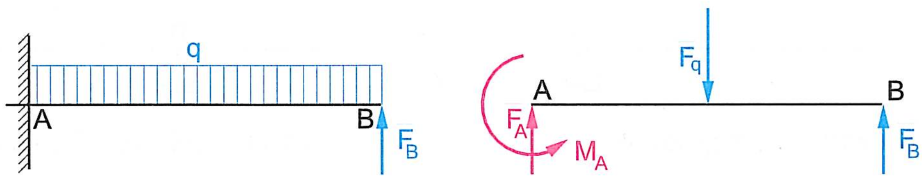
$$|y_{Bq}| = |y_{BF}|$$

Z predchádzajúcich vzťahov vyplýva:

$$y_{Bq} = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J} \quad \text{a} \quad y_{BF} = \frac{F_B \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

po dosadení a vyjadrení dostaneme vzťah pre väzbovú silu:

$$F_B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l$$



Obr. 7.80

Ostatné neznáme väzbové sily vyrátame zo statických podmienok rovnováhy, pričom $F_q = q \cdot l$:

$$\Sigma F_y = 0; \qquad F_A - F_q + F_B = 0$$

$$\Sigma M_A = 0; \qquad M_A - \frac{l}{2} \cdot F_q + l \cdot F_B = 0$$

potom

$$F_A = F_q - F_B$$

$$F_A = q \cdot l - \frac{3}{8} \cdot q \cdot l$$

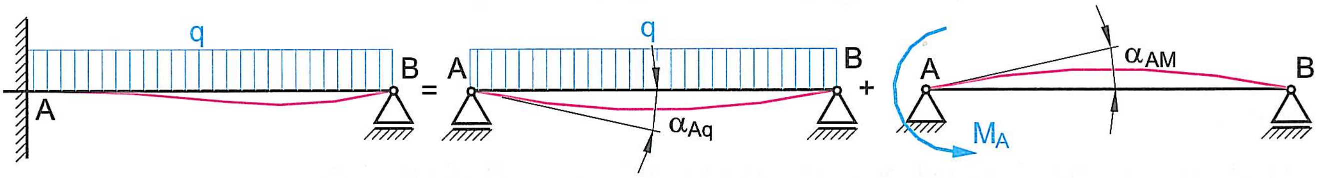
$$F_A = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l$$

$$M_A = \frac{l \cdot F_q}{2} - l \cdot F_B$$

$$M_A = \frac{l \cdot F_q}{2} - l \cdot \frac{3}{8} \cdot F_B$$

$$M_A = \frac{l \cdot F_q}{8}$$

V našom prípade sme použili rovnosť priehybov, za predpokladu, že ako prevyšujúcu sme považovali väzbovú silu v podpere B. Môžeme však zvoliť aj inú náhradu staticky neurčitého nosníka a to takú, že votknutie nahradíme pevným kĺbom a za prevyšujúcu neznámu budeme považovať moment v podpere A, tak ako je to na *obr. 7.81*.



Obr. 7.81

V takto navrhnutom staticky určitom systéme potom ako deformačnú podmienku určíme rovnosť uhlov natočenia:

$$|\widehat{\alpha}_{Aq}| = |\widehat{\alpha}_{AM}|$$

Pre $\widehat{\alpha}_{Aq}$ sme odvodili:

$$\widehat{\alpha}_{Aq} = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot J}$$

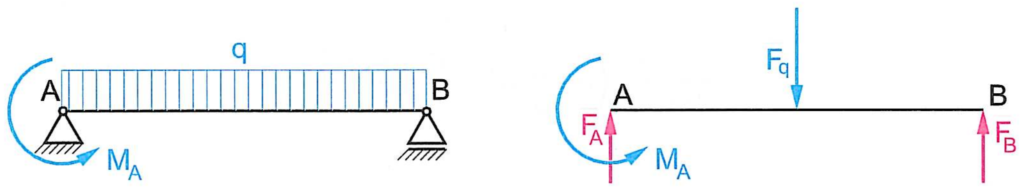
a pre hodnotu $\widehat{\alpha}_{AM}$ nájdeme v strojníckych tabuľkách výraz:

$$\widehat{\alpha}_{AM} = \frac{M_A \cdot l}{3 \cdot E \cdot J}$$

Po dosadení a vyjadrení dostaneme vzťah pre moment pôsobiaci v mieste A:

$$M_A = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

Dostali sme rovnakú hodnotu momentu ako v predchádzajúcom prípade. Ostatné neznáme vyjadríme pomocou podmienok rovnováhy:



Obr. 7.82

$$\Sigma F_y = 0; \qquad F_A - F_q + F_B = 0$$

$$\Sigma M_A = 0; \qquad M_A - \frac{l \cdot F_q}{2} + l \cdot F_B = 0$$

z toho

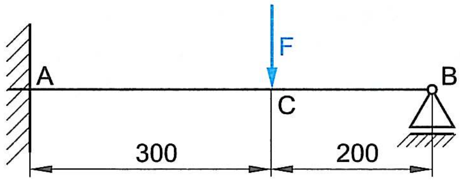
$$F_B = \frac{\frac{l^2 \cdot q}{2} - \frac{l^2 \cdot q}{8}}{l}$$

$$F_B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l$$

Vidíme, že oboma spôsobmi dôjdeme k rovnakým výsledkom.

PRÍKLAD

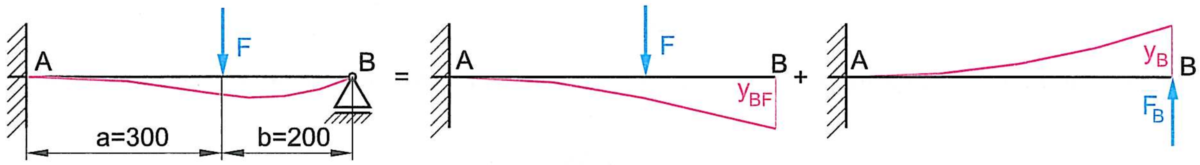
Vypočítajte veľkosti väzbových síl na nosníku podľa *obr. 7.83*, ak sila $F = 1\,000$ N.



Obr. 7.83

Riešenie:

1. Staticky neurčitý nosník nahradíme dvomi staticky určitými nosníkmi *(obr. 7.84)*.



Obr. 7.84

2. Riešime priehyb nosníka v mieste B od sily F, ktorý označíme y_{BF}. Vzťah pre priehyb nášho nosníka a spôsob jeho zaťaženia sme odvodili a platí:

$$y_{BF} = \frac{F \cdot a^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \left(b + \frac{2}{3} \cdot a \right)$$

3. Riešime priehyb nosníka v mieste B od väzbovej sily F_B a označíme ho y_B. Pre tento prípad sme odvodili vzťah:

$$y_B = \frac{F_B \cdot (a+b)^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

4. Urobíme rovnosť priehybov a vyjadríme väzbovú silu $F_{B:}$.

$$y_{BF} = y_B$$

$$\frac{F \cdot a^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \left(b + \frac{2}{3} \cdot a \right) = \frac{F_B \cdot (a+b)^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

z toho

$$F_B = \frac{F \cdot a^2 \cdot (3b + 2a)}{2 \cdot (a+b)^3}$$

a po dosadení:

$$F_B = \frac{1000 \cdot 300^2 \cdot (3 \cdot 200 + 2 \cdot 300)}{2 \cdot (300 + 200)^3} = 432 \text{ N}$$

Ostatné neznáme zložky väzbových síl dostaneme z podmienok rovnováhy, pozri *obr. 7.85*:

$$\sum F_y = 0; \qquad F_A - F + F_B = 0$$
$$\sum M_A = 0; \qquad -M_A + a \cdot F - (a+b) \cdot F_B = 0$$

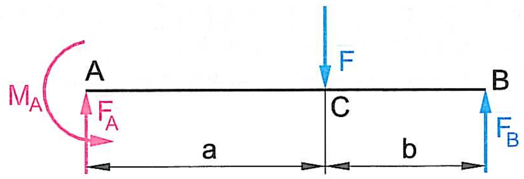
z toho

$$F_A = F - F_B$$

$$F_A = 1\,000 - 432 = 568 \text{ N}$$

$$M_A = a \cdot F - (a+b) \cdot F_B$$

$$M_A = 300 \cdot 1\,000 - (300 + 200) \cdot 432 = 84\,000 \text{ Nmm}$$



Obr. 7.85

Zhrnutie:

Najjednoduchšia metóda riešenia staticky neurčitých nosníkov je metóda porovnávania deformácií. Princíp riešenia je v tom, že staticky neurčitý nosník nahradíme dvoma staticky určitými nosníkmi. Nosník zaťažíme známymi silami a neznámou staticky neurčitou veličinou – silou alebo momentom. Z podmienky rovnosti deformácií vypočítame staticky neurčitú veličinu. Ostatné neznáme väzbové sily a momenty vypočítame zo statických podmienok rovnováhy.

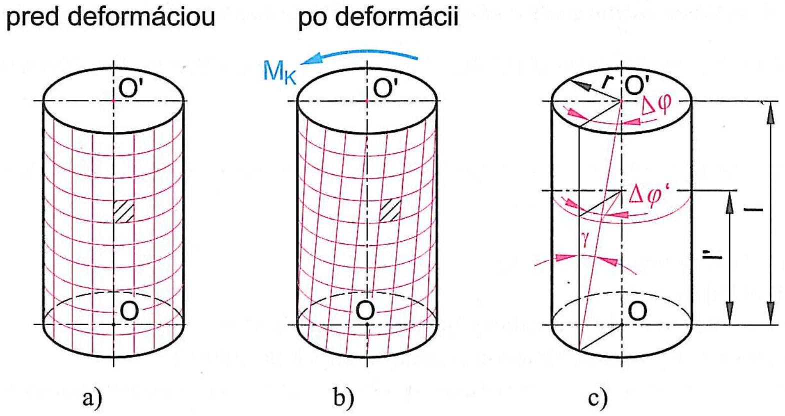
KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Ako charakterizujeme staticky neurčité nosníky?
2. Ako určíme stupeň statickej neurčitosti?
3. Akým spôsobom riešime väzbové sily pri staticky neurčitých nosníkoch?
4. Ako nahradíme staticky neurčitý nosník sústavou staticky určitých nosníkov?

8 NAMÁHANIE KRÚTENÍM

8.1 ZÁKLADNÉ POJMY

Na začiatku si pripomeňme definíciu namáhania krútením. Prút je namáhaný krútením vtedy, ak naň pôsobí silová dvojica, ktorá leží v rovine kolmej na os prútu. Namáhanie čistým krútením sa vyskytuje iba zriedkavo, ale obyčajne pôsobí spoločne s namáhaním v ohybe. Prút budeme pritom považovať za priamočiary konštrukčný prvok, ktorý má najčastejšie kruhový prierez.



Obr. 8.1

Ak by sme pripravili pokus, pri ktorom by sme na plný gumový valec nakreslili povrchové priamky a rovnobežné kružnice tak, aby sa vytvorila štvorcová sieť a tento by sme na jednom konci pripevnili celou plochou na podložku, mohli by sme na ňom pozorovať, že pri namáhaní voľného konca silovou dvojicou:

1. os valca $\overline{OO'}$ sa nedeformuje, nezúčastňuje sa na deformácii (neutrálna os),
2. jednotlivé prierezy sa voči sebe natáčajú ako tuhé celky – šmýkajú sa po sebe, vzniká tangenciálne napätie,
3. štvorcová sieť na povrchu sa mení na kosoštvorcovú,
4. kruhové prierezy zostávajú kruhové s rovnakými polomermi,
5. vzájomné vzdialenosti medzi kružnicami sa nemenia a nemení sa ani celková výška valca,
6. povrchové priamky sa menia na skrutkovice s veľmi veľkým uhlom stúpania,
7. polomery zostávajú priame.

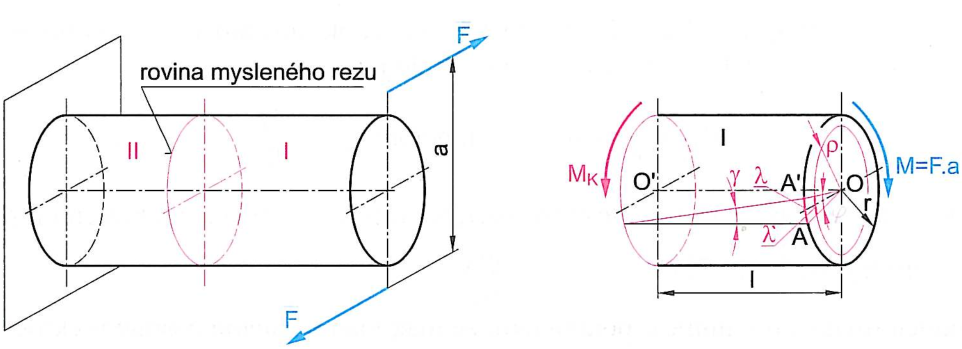
Deformáciu, ktorá vzniká pri krútení nazývame celkový uhol skrútenia. Je to uhol, ktorý vznikne skrútením prierezu voľného konca oproti upnutému prierezu.

8.2 NAPÄTIE NA PRÚTE NAMÁHANOM KRÚTENÍM

Pri odvodzovaní napätia vychádzame z nasledujúcich zjednodušujúcich predpokladov:
1. Rovinné prierezy valca zostávajú rovinnými prierezmi aj po deformácii. Táto podmienka platí iba pre kruhové prierezy, pretože nekruhové prierezy sa pri krútení menia – „boria sa".
2. Polomery prierezov zostávajú priamočiare aj po deformácii.
3. Medzi prierezmi sa vzdialenosť nemení.

Predpokladáme tiež, že zmeny, ktoré pozorujeme na povrchu prúta, sa rovnako prejavujú aj vo vnútri prúta. Pri odvodzovaní napätia použijeme metódu mysleného rezu:

a) Zaťaženým prútom vedieme myslený rez a ponecháme si časť I.



Obr. 8.2

b) Pôsobenie odstránenej časti II na časť I nahradíme momentom vnútorných síl, ktorý udrží časť I v rovnováhe.
c) Napíšeme podmienku rovnováhy:

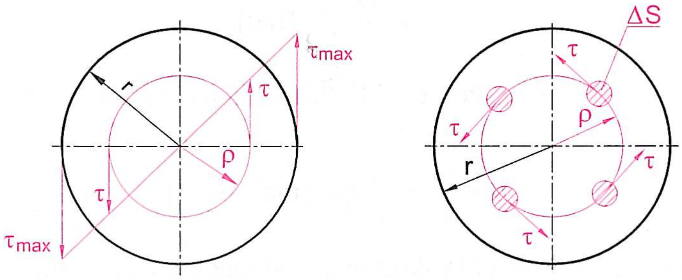
$$|M| = |M_k|$$

d) Os $\overline{OO'}$ je neutrálna os a platí pomer:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{r \cdot \varphi}{\rho \cdot \varphi} = \frac{r}{\rho}$$

e) Rezy sa po sebe posúvajú a vzniká tangenciálne napätie τ_k.
f) V medziach platnosti Hookovho zákona je deformácia priamoúmerná napätiu.

Z toho vyplýva, že tangenciálne napätie je priamoúmerné vzdialenosti od neutrálnej osi a jeho maximálna hodnota je na povrchu valca.



Obr. 8.3

g) Elementárnu silu vyvolanú napätím τ na elementárnu plôšku vyjadríme:

$$\Delta F = \tau \cdot \Delta S$$

Táto sila vyvoláva na polomere ρ elementárny moment:

$$\Delta M_k = \Delta F \cdot \rho$$

h) Celkový moment vnútorných síl vyjadríme:

$$M_k = \sum \Delta M_k = \sum \Delta S \cdot \rho \cdot \tau$$

Platí

$$\frac{\tau}{\tau_{max}} = \frac{\rho}{r} \Rightarrow \tau = \frac{\tau_{max}}{r} \cdot \rho$$

$$M_k = \sum \Delta S \cdot \rho \cdot \frac{\tau_{max}}{r} \cdot \rho = \frac{\tau_{max}}{r} \sum \Delta S \cdot \rho^2 = \frac{\tau_{max}}{r} \cdot J_p$$

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{\frac{J_p}{r}}$$

Podiel polárneho momentu kruhového prierezu a vzdialenosti okrajového vlákna od neutrálnej osi nazývame prierezový modul v krútení. Jeho matematické vyjadrenie je:

$$W_k = \frac{J_p}{r} \ [\mathrm{m^3;\ mm^3}], \text{ potom } \tau_{max} = \frac{M_k}{W_k}$$

Maximálne tangenciálne napätie sa nachádza na povrchu súčiastky namáhanej krútením. Nazývame ho napätím v krútení a označujeme ho τ_k. Platí $\tau_k = \frac{M_k}{W_k}$

Ak predchádzajúcu rovnicu doplníme o podmienku, že maximálne napätie nesmie prekročiť dovolené napätie, dostaneme rovnicu:

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_{Dk}$$

Na výpočet uhla skrútenia využijeme kruhový oblúk $\widehat{AA}'$, pre ktorý platí:

$$\widehat{AA}' = \widehat{r} \cdot \widehat{\varphi} = l \cdot \widehat{\gamma}$$

hodnoty $\widehat{\varphi}$ a $\widehat{\gamma}$ sú v radiánoch.

Podľa Hookovho zákona platí: $\widehat{\gamma} = \frac{\tau_{k\,max}}{G}$, kde G je modul pružnosti v šmyku

$$\widehat{\varphi} = \frac{l}{r} \cdot \widehat{\gamma} = \frac{l}{r} \cdot \frac{\tau_k}{G} = \frac{l}{r} \cdot \frac{M_k}{\frac{J_p}{r} \cdot G}$$

po úprave dostaneme výraz na výpočet uhla skrútenia:

$$\widehat{\varphi} = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p} \ [\mathrm{rad}]$$

Výraz $G \cdot J_p$ nazývame tuhosť v krútení. Podiel uhla skrútenia na jednotku dĺžky nazývame pomerné skrútenie – skrut

$$\widehat{\vartheta} = \frac{\widehat{\varphi}}{l} = \frac{M_k}{G \cdot J_p} \ [\mathrm{rad\ \ mm^{-1}}]$$

V prípade, ak chceme vyjadriť veľkosť uhla skrútenia v stupňoch, použijeme vzťah:

$$\varphi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p}$$

Podobne ako pri napätí, kedy maximálne napätie nesmie prekročiť dovolenú hodnotu, sa často kladie podmienka maximálne dovolenej deformácie. V takomto prípade bude mať deformačná rovnica tvar:

$$\widehat{\varphi} = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p} \leq \widehat{\varphi}_D$$

alebo pre pomerné skrútenie:

$$\widehat{\vartheta} = \frac{M_k}{G \cdot J_p} \leq \widehat{\vartheta}_D$$

Zhrnutie:

Prút je namáhaný krútením vtedy, ak naň pôsobí silová dvojica, ktorá leží v kolmej rovine na os prúta. Pri krútení vzniká tangenciálne napätie τ_k, ktoré rastie rovnomerne od nuly na osi prúta, až po maximum nachádzajúce sa na jeho povrchu. Os prúta je zároveň neutrálnou osou prúta.

Na výpočet maximálneho napätia použijeme vzťah: $\tau_k = \frac{M_k}{W_k}$

na výpočet deformácie, ktorú pri krútení nazývame uhol skrútenia, použijeme vzťah: $\widehat{\varphi} = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p}$

8.3 POROVNANIE VYUŽITIA MATERIÁLU PRI KRÚTENÍ PLNÝCH A DUTÝCH PRIEREZOV

Ak si všimneme rozloženie napätia v krútení po priereze zistíme, že najlepšie využitie materiálových vlastností je na povrchu prúta, kde je maximálne napätie, zatiaľ čo materiál v blízkosti stredu takmer nie je namáhaný. Preto je výhodné použitie dutých hriadeľov. Za podmienky, že na povrchu bude rovnaké napätie v krútení, dosiahne sa malým zväčšením vonkajšieho priemeru značná úspora materiálu.

Aby sme dokázali toto tvrdenie, vyrátame nasledujúci príklad.

PRÍKLAD

Prút plného kruhového prierezu dlhý 1 m, ktorého τ_{Dk} = 80 MPa, je namáhaný krútiacim momentom $M_k = 250$ Nm. Z rovnakého materiálu a v rovnakej dĺžke má byť vyrobený aj dutý prút, ktorého pomer vnútorného a vonkajšieho priemeru $\alpha = \dfrac{d}{D} = 0{,}7$. Vypočítajte priemery obidvoch prútov a urobte porovnanie ich hmotností.

Riešenie:

1. Najskôr vyrátame priemer prúta plného prierezu podľa výpočtovej rovnice:

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} \le \tau_{Dk}$$

Ak vyjadríme prierezový modul v krútení pre plný prierez:

$$W_k = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

a tento dosadíme do výpočtovej rovnice, dostaneme po úprave výraz pre priemer:

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_k}{\pi \cdot \tau_{Dk}}}$$

Do odvodeného vzťahu budeme dosadzovať všetky hodnoty v mm.

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 250\,000}{\pi \cdot 80}} = 25{,}15 \text{ mm}$$

2. Hmotnosť plného prúta bude:

$$m = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot l \cdot \rho_o$$

$$m = \frac{\pi \cdot 25{,}15^2}{4} \cdot 1000 \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-6} = 3{,}90 \text{ kg}$$

3. Vyrátame priemery dutého prúta dosadením prierezového modulu v krútení pre medzikružie:

$$W_k = \frac{J_p}{\frac{D}{2}}$$

$$J_p = \frac{\pi \cdot \left(D^4 - d^4\right)}{32}$$

Po dosadení za $d = \alpha \cdot \mathrm{D}$ a úprave dostaneme výraz:

$$J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32}\left(1 - \alpha^4\right)$$

Prierezový modul v krútení pre medzikružie má potom tvar:

$$W_k = \frac{\pi \cdot D^3}{16}\left(1 - \alpha^4\right)$$

Dosadením odvodeného výrazu do výpočtovej rovnice a jeho úpravou dostaneme výraz na výpočet vonkajšieho priemeru dutého prúta:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_k}{\pi \cdot \tau_{Dk}\left(1-\alpha^4\right)}}$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 250\,000}{\pi \cdot 80 \cdot \left(1-0,7^4\right)}} = 27,56 \text{ mm}$$

Vnútorný priemer potom je:

$$d = 0,7 \cdot D$$

$$d = 0,7 \cdot 27,56 = 19,30 \text{ mm}$$

4. Hmotnosť dutého prúta:

$$m_1 = \frac{\pi \cdot \left(D^2 - d^2\right)}{4} \cdot l \cdot \rho_o$$

$$m_1 = \frac{\pi \cdot \left(27,56^2 - 19,30^2\right)}{4} \cdot 1000 \cdot 7,85 \cdot 10^{-6} = 2,39 \text{ kg}$$

Z výsledku vyplýva, že vonkajší priemer prútov sa zvýšil o 2,41 mm, t. j. o 9,58 %, ale jeho hmotnosť poklesla o 1,51 kg, t. j. o 38,72 %.

Podobným spôsobom boli vypočítané hodnoty v *tab. 8.1*, kde vidieť závislosť úspory materiálu od pomeru priemerov α pri použití plného a dutého prúta. Hodnoty v tabuľke sú vypočítané pre zaťaženie $M_k = 250$ Nm, $\tau_{Dk} = 80$ MPa a dĺžku $l = 1$ m.

Tabuľka 8.1

α d/D	d [mm]	D_1 [mm]	d_1 [mm]	m [kg]	m_1 [kg]	% priemeru	% hmotnosti
0,90	25,15	35,90	32,31	3,90	1,51	42,73	61,29
0,80		29,98	23,99		2,00	19,20	48,86
0,70		27,56	19,30		2,39	9,58	38,76
0,60		26,35	15,81		2,74	4,74	29,80
0,50		25,70	12,85		3,05	2,17	21,70
0,40		25,37	10,15		3,33	0,87	14,54
0,30		25,22	7,57		3,57	0,27	8,51
0,20		25,17	5,03		3,75	0,05	3,90
0,10		25,15	2,52		3,86	0,00	0,99

8.4 VÝPOČET A KONTROLA SÚČIASTOK NAMÁHANÝCH KRÚTENÍM

Z výpočtovej rovnice pre krútenie

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_{Dk}$$

môžeme rovnako ako pri predchádzajúcich druhoch namáhania robiť nasledujúce výpočty:

1. *Kontrolný výpočet* – robíme ho vtedy, ak poznáme krútiaci moment M_k a prierezový modul v krútení W_k. Vypočítané skutočné napätie porovnávame s dovoleným napätím.
2. *Výpočet únosnosti* – robíme ho vtedy, ak poznáme prierezový modul v krútení W_k, veľkosť dovoleného napätia τ_{Dk} a chceme vypočítať maximálny krútiaci moment M_k, ktorý môže daný prierez preniesť.
3. *Návrhový výpočet – dimenzovanie* – použijeme ho vtedy, ak poznáme veľkosť krútiaceho momentu M_k a veľkosť dovoleného napätia v krútení τ_{Dk} a chceme vyrátať priemer hriadeľa.

Veľkosť dovoleného napätia v krútení nájdeme pre vybrané materiály v strojníckych tabuľkách. V prípadoch, že poznáme dovolené napätie v ťahu, môžeme si veľkosť dovoleného napätia v krútení prepočítať podľa týchto vzťahov:

pri konštrukčných oceliach:		$\tau_{Dk} = (0{,}6 \div 0{,}65)\,\sigma_{Dt}$
pri pružinových oceliach:		$\tau_{Dk} = (0{,}7 \div 0{,}8)\,\sigma_{Dt}$
pri liatine –	kruhový prierez	$\tau_{Dk} = \sigma_{Dt}$
	– medzikružie	$\tau_{Dk} = (0{,}8 \div 1{,}2)\,\sigma_{Dt}$
	– štvorec a obdĺžnik	$\tau_{Dk} = (1{,}4 \div 1{,}6)\,\sigma_{Dt}$

Takto definované dovolené napätia pre krútenie platia iba pri statickom zaťažení, t. j. zaťažení nemeniacom sa s časom. V praxi sa vyskytujú prípady, keď súčiastka namáhaná krútením prenáša miznúce zaťaženie (jednosmerné rozbehy, prípadne jednosmerné kmitanie) alebo striedavé zaťaženie (prenášanie skrutného – torzného kmitania). V týchto prípadoch musíme vynásobiť dovolené napätie súčiniteľom zníženia napätia podľa spôsobu zaťaženia:

$$\tau_{Dk\,II} = c_{II} \cdot \tau_{Dk} \quad \text{– pre miznúci spôsob zaťaženia}$$

$$\tau_{Dk\,III} = c_{III} \cdot \tau_{Dk} \quad \text{– pre striedavý spôsob zaťaženia}$$

Často sa stáva, že okrem pevnostnej podmienky je na navrhovaný prierez kladená požiadavka z hľadiska tuhosti. To znamená, že hriadeľ má predpísanú aj veľkosť skrútenia pri maximálnom zaťažení. V tomto prípade vychádzame zo vzťahu pre deformáciu

$$\widehat{\varphi} = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p} \leq \widehat{\varphi}_D$$

alebo z pomerného skrútenia

$$\widehat{\vartheta} = \frac{M_k}{G \cdot J_p} \leq \widehat{\vartheta}_D$$

Aj v tomto prípade môžeme uplatniť tri možnosti výpočtu – kontrolný výpočet, výpočet únosnosti a návrhový výpočet. Pri návrhovom výpočte rátame priemer dvakrát. Prvý raz z pevnostnej podmienky a druhý raz z deformačnej podmienky. Aby hriadeľ vyhovoval daným podmienkam, volíme väčší z vypočítaných priemerov, pretože ten vyhovuje obom podmienkam.

Poznámka:

Predpísaním požadovanej tuhosti sa hlavne pri dlhších hriadeľoch dá zabrániť vzniku skrutných kmitov, ktoré môžu byť pre daný stroj veľmi nepriaznivé. Ozubené kolesá majú potom lepší záber, ale vedie to ku zväčšeniu priemeru hriadeľa. Naopak, niekedy je výhodné medzi dva hriadele vložiť krátky hriadeľ malej tuhosti, ktorý pôsobí ako skrutná pružina, čím sa tlmia rázy spôsobené nerovnomerným krútiacim momentom hnacieho hriadeľa.

Zhrnutie:

Výhodnejšie využitie mechanických vlastností materiálu je pri použití dutých hriadeľov. Ušetrí sa pritom značné množstvo materiálu pri malom zväčšení vonkajšieho priemeru.

Pri namáhaní súčiastok krútením môžeme uplatniť tri spôsoby výpočtu:

1. *kontrolný výpočet,*
2. *návrhový výpočet,*
3. *výpočet únosnosti.*

Pri výpočte použijeme vzťah: $\tau_k = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_{Dk}$

Ak je na namáhanú súčiastku kladená deformačná podmienka, vtedy okrem pevnostného výpočtu robíme aj výpočet maximálnej deformácie podľa vzťahu: $\widehat{\varphi} = \frac{M_k \cdot l}{W_k} \leq \widehat{\varphi}_D$

PRÍKLAD

Máme navrhnúť prierezové rozmery hriadeľa z materiálu označeného podľa EN 1027-1 S235J0 (pôvodné označenie podľa STN 11 378), ktorý bude prenášať miznúci $M_k = 5\,000$ Nm a jeho pomerné skrútenie nesmie prekročiť hodnotu $\hat{\vartheta}_D = 0{,}3°$. Výpočet treba urobiť pre plný prierez a dutý prierez s pomerom $\alpha = \dfrac{d}{D} = 0{,}8$.

Riešenie:

Pre daný materiál a spôsob zaťaženia vyrátame dovolené napätie v krútení. Z označenia materiálu vyplýva:

$$R_e = 235 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Dt} = \frac{R_e}{k} = \frac{235}{2} = 117{,}5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{Dk} = (0{,}6 \div 0{,}65) \cdot \sigma_{Dt}$$

$$\tau_{Dk} = 0{,}6 \cdot 117{,}5 = 70{,}5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{Dk\,II} = c_{II} \cdot \tau_{Dk}$$

Danému materiálu odpovedá hodnota $c_{II} = 0{,}85$, teda

$$\tau_{Dk\,II} = 0{,}85 \cdot 70{,}5 = 60 \text{ MPa}$$

Prierezové rozmery rátame dvakrát:

- z pevnostnej podmienky,
- z deformačnej podmienky.

1. Plný prierez

a) výpočet z pevnostnej podmienky:

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} \le \tau_{Dk}$$

kde

$$W_k = \frac{\pi \cdot d_{p1}^3}{16}$$

po dosadení a úprave dostaneme:

$$d_{p1} \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_k}{\pi \cdot \tau_{Dk\,II}}}$$

Ak dosadíme číselné hodnoty v Nmm a MPa a výsledok dostaneme v mm.

$$d_{p1} \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5000 \cdot 1000}{\pi \cdot 60}} = 75{,}2 \text{ mm}$$

b) výpočet z deformačnej podmienky:

$$\hat{\vartheta} = \frac{M_k}{G \cdot J_p} \le \hat{\vartheta}_D$$

kde

$$J_p = \frac{\pi \cdot d_{d1}^4}{32}$$

po dosadení a úprave:

$$d_{d1} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_k}{\pi \cdot G \cdot \hat{\vartheta}_D}}$$

Hodnotu modulu pružnosti pre ťahané konštrukčné ocele nájdeme v strojníckych tabuľkách $G = (8 \div 8{,}5).10^4$ MPa. Hodnotu pomerného skrútenia musíme dosadiť v radiánoch a zároveň vynásobiť 1 000, lebo je to hodnota skrútenia 1 m prútu, ktorý musíme premeniť na mm, preto:

$$\widehat{\vartheta}_D = \frac{\pi}{180°} \cdot \vartheta_D^{\circ}$$

po dosadení a úprave dostaneme:

$$d_{d1} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_k \cdot 180°}{\pi^2 \cdot G \cdot \vartheta_D^{\circ}}}$$

$$d_{d1} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 1000 \cdot 180°}{\pi^2 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0{,}3°}} = 105{,}00 \text{ mm}$$

2. Dutý prierez

a) výpočet z pevnostnej podmienky:

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} \le \tau_{Dk\,II}$$

kde

$$W_k = \frac{J_{p2}}{\frac{D_{p2}}{2}}$$

Pre medzikružie platí:

$$J_{p2} = \frac{\pi \cdot D_{p2}^4}{32}(1 - \alpha^4)$$

Prierezový modul v krútení:

$$W_k = \frac{\pi \cdot D_{p2}^3}{16}(1 - \alpha^4)$$

Po dosadení a úprave dostaneme výraz pre vonkajší priemer dutého hriadeľa:

$$D_{p2} \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_k}{\pi \cdot (1 - \alpha^4) \cdot \tau_{Dk\,II}}}$$

$$D_{p2} \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5000 \cdot 10^3}{\pi \cdot (1 - 0{,}8^4) \cdot 60}} = 89{,}6 \text{ mm}$$

b) výpočet z deformačnej podmienky:

$$\widehat{\vartheta} = \frac{M_k}{G \cdot J_{p2}} \le \widehat{\vartheta}_D$$

kde po dosadení za J_{p2} a úprave dostaneme:

$$D_{d2} \ge \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_k}{\pi \cdot (1 - \alpha^4) \cdot G \cdot \widehat{\vartheta}_D}}$$

pričom nesmieme zabudnúť, že hodnotu pomerného skrútenia musíme dosadiť v radiánoch a zároveň ju vynásobiť číslom 1 000, aby sme výsledok dostali v mm, tak ako v predchádzajúcom prípade:

$$\widehat{\vartheta}_D = \frac{\pi}{180°} \cdot \vartheta_D^{\circ}$$

po dosadení a úprave dostaneme:

$$D_{d2} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_k \cdot 180°}{\pi^2 \cdot (1-0,8^4) \cdot G \cdot \vartheta_D^o}}$$

$$D_{d2} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 5000 \cdot 10^3 \cdot 180 \cdot 10^3}{\pi^2 \cdot (1-0,8^4) \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0,3}} = 119,79 \text{ mm}$$

Je len samozrejmosťou, že vyrátané priemery by sme upravili podľa normalizovaných rozmerov. Ale pre porovnanie budeme pracovať s vyrátanými rozmermi.

Urobme porovnanie hmotností oboch hriadeľov pre dĺžku 1 m. Porovnáme nárast hmotnosti pri plnom a dutom priereze pri uplatnení pevnostnej a deformačnej podmienky.

a) Plný prierez

Hmotnosť prúta z priemeru podľa pevnostnej podmienky je:

$$m_{p1} = \frac{\pi \cdot d_{p1}^2}{4} \cdot l \cdot \rho_o$$

$$m_{p1} = \frac{\pi \cdot 75,2^2}{4} \cdot 1000 \cdot 7,85 \cdot 10^{-6} = 34,9 \text{ kg}$$

Hmotnosť prúta vyrátaného z priemeru podľa deformačnej podmienky je:

$$m_{d1} = \frac{\pi \cdot d_{d1}^2}{4} \cdot l \cdot \rho_o$$

$$m_{d1} = \frac{\pi \cdot 105^2}{4} \cdot 1000 \cdot 7,85 \cdot 10^{-6} = 67,97 \text{ kg}$$

Ak splníme danú deformačnú podmienku, narastie hmotnosť pri plnom priereze o 94,7 %.

b) Dutý prierez

Hmotnosť prúta vyrátaného z priemeru podľa pevnostnej podmienky je:

$$m_{p2} = \frac{\pi \cdot D_{p2}^2}{4} \cdot \left(1-\alpha^2\right) \cdot l \cdot \rho_o$$

$$m_{p2} = \frac{\pi \cdot 89,6^2}{4} \cdot \left(1-0,8^2\right) \cdot 1000 \cdot 7,85 \cdot 10^{-6} = 17,82 \text{ kg}$$

Hmotnosť prúta z priemeru podľa deformačnej podmienky je:

$$m_{d2} = \frac{\pi \cdot D_{d2}^2}{4} \cdot \left(1-\alpha^2\right) \cdot l \cdot \rho_o$$

$$m_{d2} = \frac{\pi \cdot 119,79^2}{4} \cdot \left(1-0,8^2\right) \cdot 1000 \cdot 7,85 \cdot 10^{-6} = 31,85 \text{ kg}$$

Pri splnení tej istej deformačnej podmienky, narastie hmotnosť dutého hriadeľa o 78,7 %. Z porovnania výsledkov teda vyplýva, že dutý prierez je tuhší ako plný.

KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Ako je rozložené napätie po priereze pri namáhaní krútením?
2. Aký je vzťah medzi napätím v krútení a v ťahu pre konštrukčné, pružinové ocele a pre liatinu?
3. Ako vyrátame napätie v krútení pre kruhový prierez?
4. Ako vypočítame deformáciu v krútení pre prút kruhového prierezu?
5. Aké sú výhody dutých hriadeľov?
6. Čo je to skrútenie?
7. Ako robíme výpočet hriadeľa, ktorý treba dimenzovať na dovolené napätie a ako na dovolené skrútenie?

8.5 DEFORMAČNÁ PRÁCA A OBJEMOVÁ HUSTOTA ENERGIE PRI NAMÁHANÍ KRÚTENÍM

Nech je tyč podľa *obr. 8.4* zaťažená krútiacim momentom $M_k = F \cdot a$ v medziach platnosti Hookovho zákona. Deformácia je priamoúmerná zaťaženiu. Pri pootočení polomeru OA do polohy OA' o uhol $\widehat{\varphi}$ sa vykoná práca:

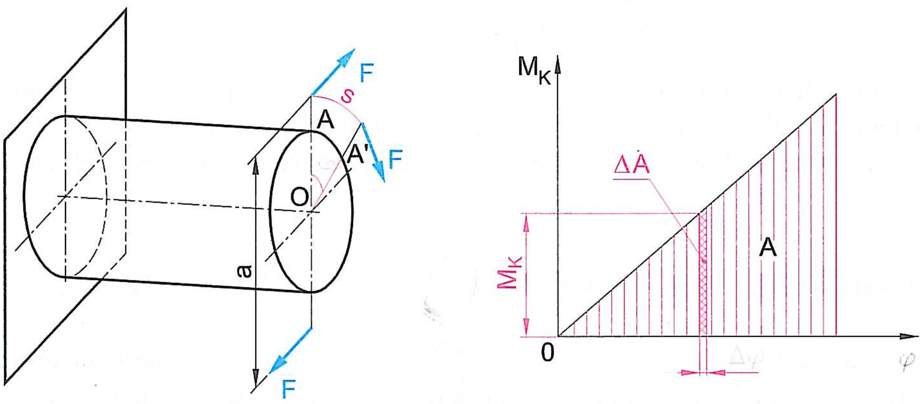
$$A = \frac{F}{2} \cdot a \cdot \widehat{\varphi} = \frac{M_k \cdot \widehat{\varphi}}{2}$$

Táto práca sa prejaví na tyči ako potenciálna energia a po odľahčení vráti prút do pôvodnej polohy, pričom sa odovzdá nahromadená energia. Ak za uhol skrútenia dosadíme:

$$\widehat{\varphi} = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p}$$

dostaneme potom vzťah pre deformačnú prácu:

$$A = \frac{M_k^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot J_p}$$



Obr. 8.4

Ak chceme porovnať deformačnú prácu na rôznych súčiastkach, vzťahujeme ju na jednotku objemu a hovoríme o mernej deformačnej práci alebo o objemovej hustote energie.

$$w = \frac{W}{V} = \frac{A}{V} = \frac{4 \cdot M_k^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot J_p \cdot \pi \cdot d^2 \cdot l}$$

Ak dosadíme za

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

a za

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M_k}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}}$$

dostaneme po úprave vzťah pre objemovú hustotu energie:

$$w = \frac{\tau_k^2}{4 \cdot G} \quad [\mathrm{Jm^{-3}}]$$

8.6 ZÁVISLOSŤ KRÚTIACEHO MOMENTU OD VÝKONU A OTÁČOK

Pri výpočte hriadeľov kruhového prierezu býva často známy výkon a otáčky. Z fyziky poznáme závislosť medzi výkonom P [W], silou F [N] a rýchlosťou v [ms^{-1}]:

$$P = F \cdot v$$

Rýchlosť otáčajúceho sa bodu je

$$v = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot r \qquad [\mathrm{ms^{-1}}]$$

kde n $[\mathrm{s^{-1}}]$ sú otáčky a r [m] je polomer otáčania. Ak túto rovnicu dosadíme do vzťahu pre výkon, dostaneme:

$$P = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot r \cdot F$$

Súčin $F \cdot r$ predstavuje krútiaci moment M_k a výraz $2 \cdot \pi \cdot n$ nazývame uhlovou rýchlosťou ω $[\mathrm{rad \cdot s^{-1}}]$. Po úprave dostaneme vzťah:

$$P = M_k \cdot \omega \qquad [\mathrm{W}]$$

Často musíme vyrátať veľkosť krútiaceho momentu, a preto vzťah upravíme na tvar:

$$M_k = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} \qquad [\mathrm{Nm}]$$

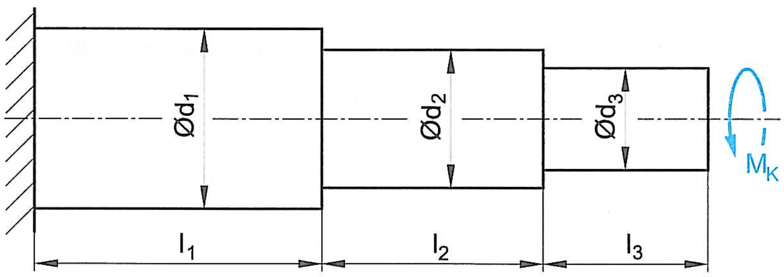
V katalógoch rôznych strojov a zariadení bývajú otáčky vyjadrené v jednotkách n $[\mathrm{min^{-1}}]$. Vtedy je výhodné použiť upravený vzťah:

$$M_k = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{60}} = \frac{30 \cdot P}{\pi \cdot n} \qquad [\mathrm{Nm}]$$

Ak sa pozrieme na uvedený vzťah, vidíme, že veľkosť krútiaceho momentu je priamoúmerná výkonu a nepriamoúmerná otáčkam. Z toho vyplýva, že zvýšením otáčok pri tom istom výkone sa dajú podstatne znížiť rozmery hriadeľa. Zvyšovanie výkonu však nesmie byť na úkor zníženia dovolenej deformácie hriadeľa.

8.7 CELKOVÉ SKRÚTENIE PRÚTA S ODSTUPŇOVANÝMI PRIEMERMI

Pri výpočte celkového uhla skrútenia vyjdeme z predpokladu, že krútiaci moment je pozdĺž namáhaného prúta konštantný. Hriadeľ si rozdelíme na úseky podľa priemerov tak, ako je to na *obr. 8.5*.



Obr. 8.5

V jednotlivých úsekoch je uhol skrútenia:

$$\widehat{\varphi}_1 = \frac{M_k \cdot l_1}{G \cdot J_{p1}} \qquad \widehat{\varphi}_2 = \frac{M_k \cdot l_2}{G \cdot J_{p2}} \qquad \widehat{\varphi}_3 = \frac{M_k \cdot l_3}{G \cdot J_{p3}}$$

Celkový uhol skrútenia:

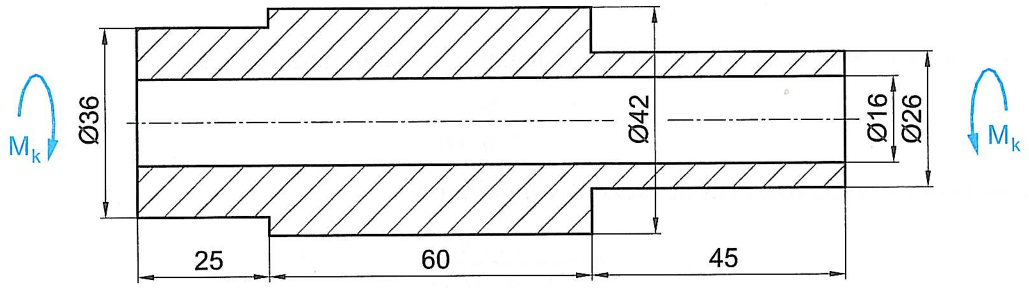
$$\widehat{\varphi}_{celk} = \widehat{\varphi}_1 + \widehat{\varphi}_2 + \widehat{\varphi}_3 = \frac{M_k}{G}\left(\frac{l_1}{J_{p1}} + \frac{l_2}{J_{p2}} + \frac{l_3}{J_{p3}}\right)$$

V prípade plného kruhového prierezu po dosadení za J_p a po úprave dostaneme:

$$\widehat{\varphi}_{celk} = \frac{32 \cdot M_k}{\pi \cdot G}\left(\frac{l_1}{d_1^4} + \frac{l_2}{d_2^4} + \frac{l_3}{d_3^4}\right)$$

PRÍKLAD

Vyrátajte celkový uhol skrútenia hriadeľa podľa obrázka, ak krútiaci moment $M_k = 100$ Nm.



Obr. 8.6

Riešenie:

V tomto prípade ide o dutý, odstupňovaný hriadeľ. Preto výsledný vzťah musíme odvodiť z rovnice:

$$\widehat{\varphi}_{\text{celk}} = \widehat{\varphi}_1 + \widehat{\varphi}_2 + \widehat{\varphi}_3 = \frac{M_k}{G}\left(\frac{l_1}{J_{p1}} + \frac{l_2}{J_{p2}} + \frac{l_3}{J_{p3}}\right)$$

kde za $J_{p1,2,3}$ dosadíme:

$$J_{p1,2,3} = \frac{\pi \cdot \left(D_{1,2,3}^4 - d^4\right)}{32}$$

a po úprave:

$$\widehat{\varphi}_{\text{celk}} = \frac{32 \cdot M_k}{\pi \cdot G}\left(\frac{l_1}{D_1^4 - d^4} + \frac{l_2}{D_2^4 - d^4} + \frac{l_3}{D_3^4 - d^4}\right)$$

Po dosadení dostaneme:

$$\widehat{\varphi}_{\text{celk}} = \frac{32 \cdot 100 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 10^4}\left(\frac{25}{36^4 - 16^4} + \frac{60}{42^4 - 16^4} + \frac{45}{26^4 - 16^4}\right)$$

$$\widehat{\varphi}_{\text{celk}} = 0{,}00191 \text{ rad}$$

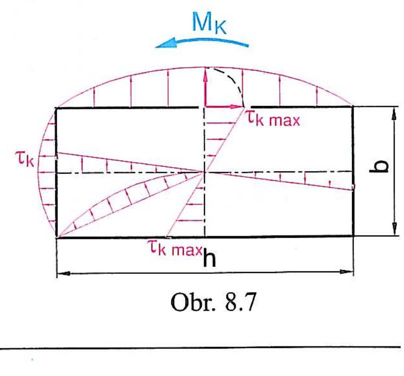
$$\varphi^{\circ}_{\text{celk}} = 0°6'34''$$

KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Aký je vzťah medzi krútiacim momentom, výkonom a otáčkami?
2. Ako vypočítame deformačnú prácu pri namáhaní krútením?
3. Ako vypočítame objemovú hustotu energie pri namáhaní krutom?

8.8 VÝPOČET PRÚTOV NEKRUHOVÉHO PRIEREZU NAMÁHANÝCH KRÚTENÍM

Doteraz sme vždy uvažovali o krútení prútov kruhového prierezu, kde maximálne napätie bolo na jeho povrchu. Pri krútení nekruhových prierezov je priebeh napätí odlišný a napätie prebieha po priereze tak, ako je to na *obr. 8.7.*



Obr. 8.7

Neutrálna os je totožná s osou krútenia. Nulové napätie je aj v rohoch prierezu. Maximálne napätie je v strede dlhších strán obdĺžnikového prierezu. Jeho hodnota:

$$\tau_{k\,max} = \frac{M_k}{\alpha \cdot b^2 \cdot h}$$

V strede kratšej strany obdĺžnikového prierezu je napätie, ktorého hodnota je:

$$\tau_k = \frac{M_k}{\beta \cdot h^2 \cdot b}$$

Uhol skrútenia prúta s obdĺžnikovým prierezom vypočítame:

$$\widehat{\varphi} = \frac{M_k \cdot l}{\gamma \cdot b^3 \cdot h \cdot G}$$

Tretia mocnina je na kratšej strane prierezu.
Súčinitele pre krútenie obdĺžnikových prierezov α, β, γ nájdeme v strojníckych tabuľkách.

Kontrolné otázky:

1. Ako prebieha napätie pri prútoch obdĺžnikového prierezu pri namáhaní krútením a v ktorých miestach je nulové a maximálne napätie.
2. Aký je rozdiel medzi namáhaním krútením prúta s kruhovým a obdĺžnikovým prierezom.
3. Aký je vzťah pre výpočet uhla skrútenia prúta s obdĺžnikovým prierezom.

8.9 SKRÚCANÉ PRUŽINY

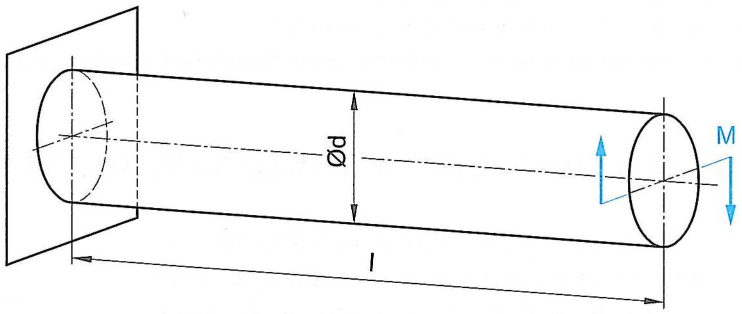
Pružiny slúžia na:

a) tlmenie rázov,
b) vykonávanie práce – tvoria hnací element (hodinové pružiny),
c) vyvodzovanie sily (poistné ventily),
d) z nameranej deformácie sa určuje sila (silomery).

Podľa druhu namáhania poznáme *ohýbané pružiny* (zväzok pružníc) a *skrúcané pružiny* (skrutné tyče a vinuté pružiny).

8.9.1 Skrúcaná valcová priama pružina – skrutná tyč

Princíp torznej tyče je na *obr. 8.8.* Z obrázka vidno, že torzná tyč nie je nič iné ako hriadeľ namáhaný krútením, ale hodnoty dovoleného napätia a uhly skrútenia sú podstatne väčšie.



Obr. 8.8

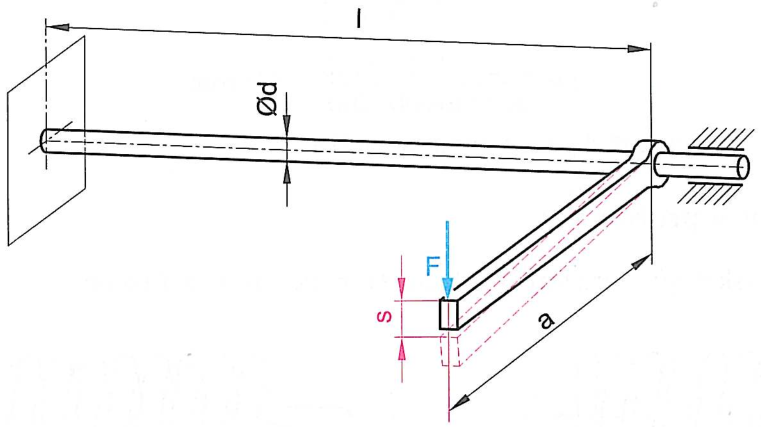
Pri výpočte vychádzame zo základnej pevnostnej rovnice

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_{Dk}$$

z ktorej po úprave dostaneme:

$$M_k \le W_k \cdot \tau_{Dk} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cdot \tau_{Dk}$$

Konštrukčne býva skrutná tyč na jednom konci upevnená pevne k rámu napr. vozidla a druhý koniec je pripevnený na vahadle, ktoré prenáša zaťaženie na skrutnú tyč. Schematicky je to znázornené na *obr. 8.9.*



Obr. 8.9

Pre zdvih s platí:

$$arc\ \varphi = \widehat{\varphi} = \frac{s}{a}$$

Ak do predchádzajúcej rovnice dosadíme deformačnú podmienku za $\widehat{\varphi}$:

$$\widehat{\varphi} = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p}$$

dostaneme po úprave vzťah na výpočet zdvihu:

$$s = \frac{M_k \cdot l \cdot a}{G \cdot J_p}$$

PRÍKLAD

Vypočítajte priemer a dĺžku skrutnej tyče, ktorá je z materiálu s $\tau_{Dk} = 500$ MPa. Tyč je uchytená vo vahadle s dĺžkou ramena $a = 200$ mm a maximálny zdvih $s = 100$ mm sa dosiahne pri sile $F = 2\,500$ N.

Riešenie:

Z pevnostnej rovnice vyrátame priemer torznej tyče a z deformačnej rovnice vypočítame dĺžku tyče. Pretože ide o dynamické namáhanie, zvýšime veľkosť krútiaceho momentu približne 1,5-krát.

Krútiaci moment:

$$M_k = 1{,}5 \cdot F \cdot a$$

$$M_k = 1{,}5 \cdot 2\,500 \cdot 200 = 750\,000 \text{ Nmm}$$

Priemer torznej tyče:

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_k}{\pi \cdot \tau_{Dk}}}$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 750\,000}{\pi \cdot 500}} = 19{,}69 \text{ mm}$$

Zvolíme najbližší vyšší normalizovaný priemer $d_{sk} = 20$ mm.

Dĺžku vypočítame zo vzťahu:

$$s = \frac{M_k \cdot l \cdot a}{G \cdot J_p}$$

a po úprave:

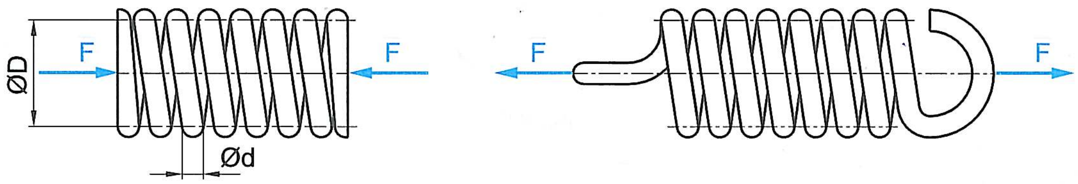
$$l = \frac{\pi \cdot d^4 \cdot G \cdot s}{32 \cdot M_k \cdot a}$$

$$l = \frac{\pi \cdot 20^4 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 100}{32 \cdot 750\,000 \cdot 200} = 838 \text{ mm}$$

Pri relatívne malom priemere je dĺžka tyče pomerne veľká.

8.9.2 Skrutkovitá valcová pružina

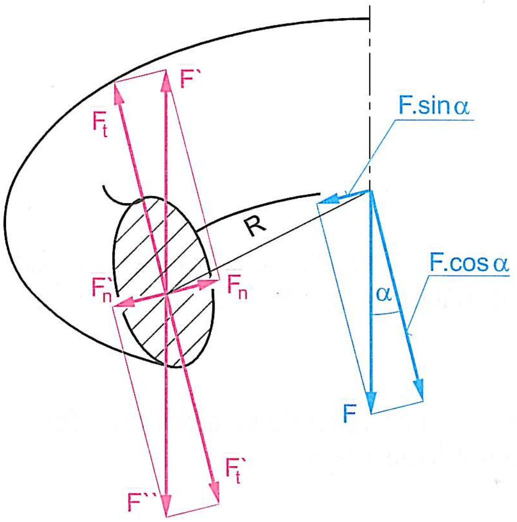
Sú to najčastejšie sa vyskytujúce pružiny. Základné tvary pružín vidieť na *obr. 8.10.*



a) tlačná pružina b) ťažná pružina

Obr. 8.10

Ťažná pružina má vytiahnuté oká na zavesenie pružiny a tlačná má najčastejšie zabrúsené konce do roviny. Pri zisťovaní napätia pôsobiaceho v priereze pružiny postupujeme takto:



Obr. 8.11

1. Vedieme kolmý rez na os drôtu pružiny. Rovina rezu je kolmá na skrutkovicu, ktorej uhol stúpania je α.
2. Rozdelíme silu F na dve zložky:
   a) silu kolmú na rovinu rezu $F \cdot \sin\alpha$,
   b) silu rovnobežnú s rovinou rezu $F \cdot \cos\alpha$.
3. Aby vznikla v rovine rezu rovnováha, musíme k nej pripojiť sily a momenty, ktoré nahradia pôsobenie odstránenej časti pružiny:
   a) sila $F_t = F \cdot \cos\alpha$ – namáha prierez šmykom,
   b) sila $F_n = F \cdot \sin\alpha$ – namáha prierez ťahom alebo tlakom,
   c) moment $M_o = R \cdot F_n = R \cdot F \cdot \sin\alpha$ – namáha prierez ohybom,
   d) moment $M_k = R \cdot F = R \cdot F_t \cdot \cos\alpha$ – namáha prierez krútením,

Pri presnom riešení zisťujeme, že v priereze sa vyskytuje namáhanie v ťahu (pri ťažnej pružine) alebo v tlaku (pri tlačnej pružine), v šmyku, v krútení a v ohybe. Z predchádzajúcich rovníc vyplýva, že čím je menšie stúpanie skrutkovice, tým menšie je namáhanie v ťahu (tlaku) a v ohybe. Rozbor veľkosti napätí ukazuje, že najväčší podiel na namáhaní pružiny nesie namáhanie v krútení. Preto sa praktický výpočet skrutkovitej valcovej pružiny robí z napätia v krútení. Vplyv ostatných druhov namáhaní je zahrnutý v opravnom koeficiente K.

$$\tau = \frac{M_k \cdot K}{W_k} = \frac{16 \cdot F \cdot R \cdot K}{\pi \cdot d^3} \le \tau_{Dk}$$

Korekčný súčiniteľ napätia v krútení K závisí od pomeru vinutia i:

$$K = \frac{i + 0,2}{i - 1}$$

kde

$$i = \frac{D}{d}$$

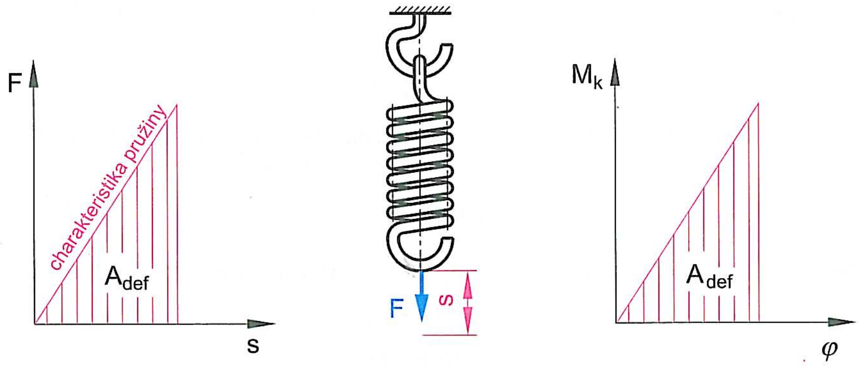
D – priemer vinutia pružiny (stredný priemer) [mm]
d – priemer drôtu pružiny [mm]

Pomer vinutia sa pohybuje v intervale $4 \leq i \leq 16$.
Zavedením priemeru vinutia pružiny D do základného vzťahu a jeho úpravou dostaneme:

$$d = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{F \cdot D \cdot K}{\pi \cdot \tau_{Dk}}}$$

Predĺženie pružiny vyrátame z deformačnej práce, ktorej veľkosť pri predĺžení o hodnotu s predstavuje:

$$A_{def} = \frac{F \cdot s}{2}$$



Obr. 8.12

Táto práca sa musí rovnať energii, ktorá vznikne skrúcaním prúta kruhového prierezu. Podľa už odvodeného vzťahu platí:

$$A_{def} = \frac{M_k \cdot \widehat{\varphi}}{2} = \frac{M_k^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot J_p}$$

Ak za l dosadíme:

$$l = \pi \cdot D \cdot n$$

kde n je počet závitov a urobíme porovnanie práce a energie, dostaneme po úprave vzťah pre predĺženie pružiny:

$$\frac{F \cdot s}{2} = \frac{\left(F \cdot \frac{D}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot D \cdot n}{2 \cdot G \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32}}$$

$$s = \frac{8 \cdot F \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}$$

Poznámka:

Zo vzťahu vyplýva, že predĺženie pružiny rastie s treťou mocninou priemeru vinutia a štvrtou mocninou priemeru drôtu. Preto veľmi malá zmena pri zaokrúhľovaní na normalizované rozmery môže významne ovplyvniť predĺženie pružiny alebo jej počet závitov.

Ak odvodený vzťah napíšeme v tvare:

$$F = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n} \cdot s$$

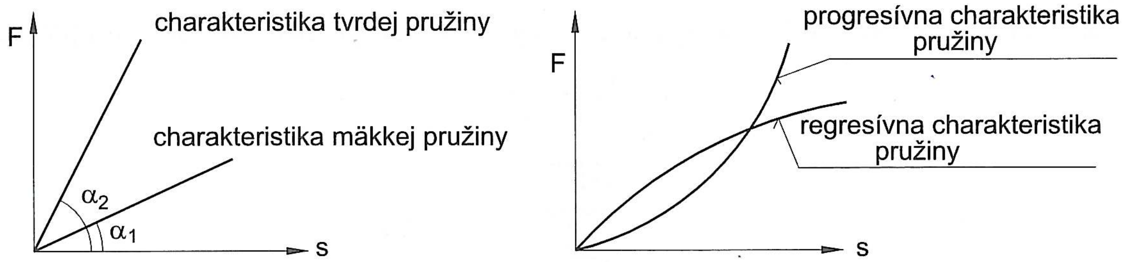
potom výraz $\frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n} = k$ sa nazýva pružinová konštanta a silu môžeme písať v tvare:

$$F = k \cdot s$$

Táto rovnica je rovnicou priamky a vyjadruje závislosť medzi silou a predĺžením pružiny. Tejto závislosti hovoríme charakteristika pružiny. Pružinová konštanta sa nazýva aj tuhosť pružiny

$$k = \frac{F}{s} = \operatorname{tg} \alpha$$

čo je vlastne sila potrebná na stlačenie pružiny o 1 mm a rozmer je Nmm^{-1}. Uhol α zviera charakteristika pružiny s osou x. Čím je tuhosť pružiny väčšia, tým je charakteristika pružiny strmšia.



a) charakteristiky valcových pružín

a) charakteristiky pružín s nerovnakým priemerom vinutia

Obr. 8.13

Počet činných závitov pružiny vypočítame zo vzťahu, ktorý je odvodený z výrazu pre predĺženie pružiny:

$$n = \frac{G \cdot d^4 \cdot s}{8 \cdot F \cdot D^3}$$

Ak do výrazu:

$$F \cdot \frac{D}{2} = M_k$$

dosadíme nerovnosť $M_k \leq W_k \cdot \tau_{Dk}$, dostaneme po úprave vzťah:

$$n \geq \frac{G \cdot d \cdot s}{\pi \cdot D^2 \cdot \tau_{Dk}}$$

Tento vzťah má výhodu, že pri známom priemere drôtu pružiny, známej deformácii a veľkosti dovoleného napätia, nám umožňuje určiť počet závitov pružiny. Odvodené vzťahy platia pre tlačné aj ťažné pružiny. Pri tlačnej pružine sa na deformácii nepodieľajú koncové – záverné závity, ktorých hodnota predstavuje na každej strane obyčajne 3/4 závitu, teda celkový podiel záverných závitov na pružine je zvyčajne 1,5 závitu. Pri tlačnej pružine musíme vypočítať aj voľnú dĺžku pružiny a to z podmienky, aby pri maximálnom zaťažení mala pružina minimálnu vôľu medzi závitmi δ. Jej hodnota sa volí:

$$\delta = (0{,}1 \div 0{,}2) \cdot d$$

Minimálna hodnota nesmie poklesnúť pod $\delta_{min} = 0{,}5$ mm. Potom celková dĺžka nezaťaženej pružiny

$$l_0 = n \cdot d + (n-1) \cdot \delta + s_{max}$$

Poznámka:

Lineárne charakteristiky pružín sú iba pre valcovite vinuté pružiny. Pre pružiny vinuté do kužeľa alebo do súdočka nie je charakteristika pružiny priamková ale krivková. Vtedy hovoríme o progresívnych alebo regresívnych charakteristikách pružiny.

PRÍKLAD

Vypočítajte počet závitov pružiny s priemerom vinutia $D = 60$ mm a dĺžku pružiny vo voľnom stave, ak pri zaťažení $F = 700$ N je stlačenie pružiny $s = 60$ mm. Dovolené napätie v krútení je $\tau_{Dk} = 500$ MPa.

Riešenie:

Najskôr vyrátame predbežný priemer drôtu iba z čistého namáhania v krútení:

$$d = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{F \cdot D}{\pi \cdot \tau_{Dk}}}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{700 \cdot 60}{\pi \cdot 500}} = 5{,}98\ \text{mm}$$

Najbližší vyšší normalizovaný priemer je podľa strojníckych tabuliek $d_{sk} = 6{,}3$ mm. Pretože sme pri počítaní priemeru pružiny nebrali do úvahy ostatné druhy namáhania, musíme kontrolovať veľkosť skutočného napätia v krútení:

$$\tau = \frac{8 \cdot F \cdot D \cdot K}{\pi \cdot d^3}$$

Najskôr ale vypočítame veľkosť korekčného súčiniteľa:

$$K = \frac{i + 0{,}2}{i - 1}$$

pomer vinutia:

$$i = \frac{D}{d}$$

$$i = \frac{60}{6{,}3} = 9{,}52$$

$$K = \frac{9{,}52 + 0{,}2}{9{,}52 - 1} = 1{,}14$$

$$\tau = \frac{8 \cdot 700 \cdot 60 \cdot 1{,}14}{\pi \cdot 6{,}3^3} = 487{,}61\ \text{MPa} \le \tau_{Dk}$$

Počet činných závitov:

$$n = \frac{s \cdot G \cdot d^4}{8 \cdot F \cdot D^3}$$

$$n = \frac{60 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 6{,}3^4}{8 \cdot 700 \cdot 60^3} = 6{,}25\ \text{závitu}$$

Celkový počet závitov:

$$n_c = n + 15$$

$$n_c = 6{,}25 + 1{,}5 = 7{,}75\ \text{závitu}$$

Celková dĺžka nezaťaženej pružiny:

$$l_0 = n \cdot d + (n - 1) \cdot \delta + s_{max}$$

$$\delta = 0{,}1 \cdot d$$

$$\delta = 0{,}1 \cdot 6{,}3 = 0{,}63$$

$$l_0 = 7{,}75 \cdot 6{,}3 + (7{,}75 - 1) \cdot 0{,}63 + 60 = 113{,}08\ \text{mm}$$

Zhrnutie:

Pružina je v podstate akumulátor energie. Podľa prevládajúceho druhu namáhania poznáme ohýbané a skrúcané pružiny. Medzi skrúcané pružiny patrí skrutná tyč a skrutkovitá (valcová a kužeľová) vinutá pružina. Pri riešení vinutých pružín vychádzame z namáhania krútením. Vplyvy ostatných druhov namáhania nahrádzame korekčným súčiniteľom, ktorého veľkosť závisí od pomeru priemeru drôtu a priemeru vinutia pružiny. Pri pružinových oceliach sú vysoké dovolené napätia v krútení.

Kontrolné otázky:

1. Akú funkciu majú pružiny?
2. Ako vypočítame priemer, dĺžku a uhol skrútenia skrutnej tyče?
3. Aké druhy namáhania pôsobia v priereze vinutej skrutkovitej pružiny, a ktorý druh namáhania sa najviac podieľa na namáhaní pružiny?
4. Ako vypočítame priemer, skrátenie (predĺženie), počet závitov a voľnú dĺžku skrutkovitej vinutej pružiny?
5. Čo je to charakteristika pružiny?
6. Z akých závitov sa skladá pružina?

9 ZLOŽENÉ NAMÁHANIE

MECHANIKA

9.1 VZNIK ZLOŽENÉHO NAMÁHANIA

Ak na namáhanú súčiastku pôsobia súčasne aspoň dva druhy namáhaní, dochádza k vzniku zloženého namáhania. Môžu pritom vzniknúť nasledujúce kombinácie namáhaní:

a) kombinácia namáhaní, ktoré vytvárajú normálové napätia – ťah (tlak) spolu s ohybom, ohyb s ohybom (šikmý ohyb),
b) kombinácie namáhaní vytvárajúce tangenciálne napätia,
c) kombinácie namáhaní vytvárajúcich normálové a tangenciálne napätia – namáhanie v krútení súčasne s ohybom.

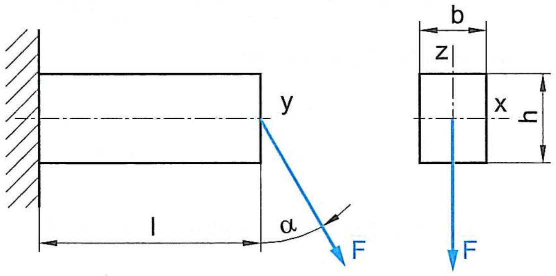
Problém sa rieši rozkladom celkového namáhania na jednotlivé druhy, pre ktoré vyriešime priebeh napätí a deformácie. Z čiastočných napätí hľadáme výsledné napätia alebo deformácie takto:

1. Pokiaľ sú napätia rovnakého druhu (všetky sú normálové alebo tangenciálne) ich účinky sa jednoducho algebricky zrátajú v každom bode prierezu (metóda skladania účinkov).
2. Pokiaľ napätia nie sú rovnakého druhu (normálové spolupôsobia s tangenciálnymi napätiami) účinky sa nedajú sčítať ani algebricky a ani vektorovo. V týchto prípadoch využijeme niektorú z teórií pevnosti.

9.2 KOMBINÁCIA NAMÁHANÍ VYTVÁRAJÚCICH NORMÁLOVÉ NAPÄTIA

9.2.1 Ťah (tlak) a ohyb

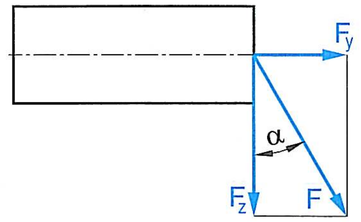
Máme riešiť príklad podľa obrázka.



Obr. 9.1

Silu F rozložíme do osí y a z.

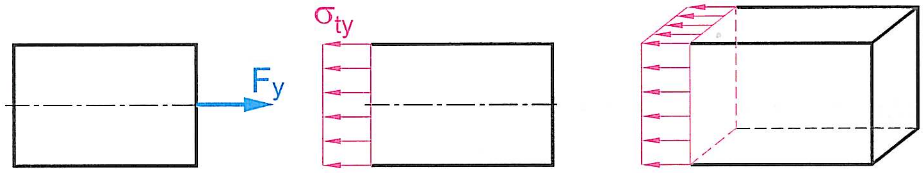
$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$
$$F_z = F \cdot \cos \alpha$$



Obr. 9.2

Účinok sily F_y vyvoláva v priereze napätie v ťahu, čo je normálové napätie. Jeho hodnota je v každom mieste prierezu namáhanej súčiastky rovnaká:

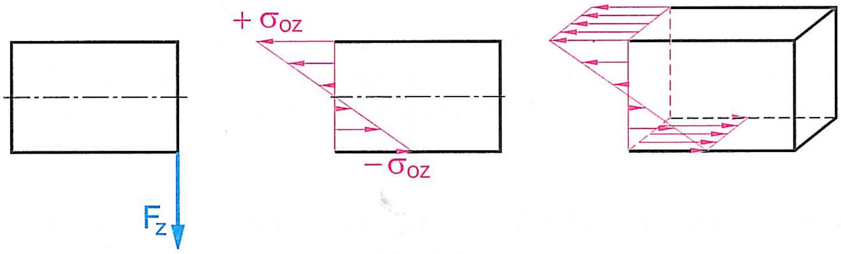
$$\sigma_{ty} = \frac{F_y}{S} = \frac{F \cdot \sin\alpha}{b \cdot h}$$



Obr. 9.3

Účinok sily F_z vyvolá v danej súčiastke namáhanie ohybom, teda opäť normálové napätie, ktoré sa skladá z ťahového a tlakového napätia. Pre jednoznačnosť riešenia budeme ťahové napätie označovať znamienkom + a tlakové znamienkom –. Hodnota napätí sa pozdĺž súčiastky mení a mení sa aj po priereze. Najväčšia hodnota napätí bude v mieste votknutia. V okrajových vláknach hornej časti bude ťahové a v dolnej časti tlakové napätie, ktorých hodnota:

$$\sigma_{oz} = \pm\frac{M_o}{W_{ox}} = \frac{F_z \cdot l}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = \frac{6 \cdot F \cdot l \cdot \cos\alpha}{b \cdot h^2}$$



Obr. 9.4

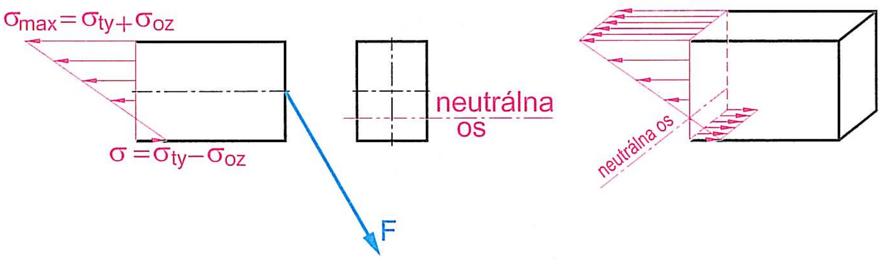
Účinky jednotlivých druhov namáhaní sa sčítajú, pretože ide o namáhanie rovnakého druhu – normálové. V mieste votknutia bude maximálna hodnota napätia v horných vláknach:

$$\sigma_{max} = \sigma_{ty} + \sigma_{oz} = \frac{F \cdot \sin\alpha}{b \cdot h} + \frac{6 \cdot F \cdot l \cdot \cos\alpha}{b \cdot h^2}$$

Hodnota normálového napätia v spodných vláknach prierezu je:

$$\sigma = \sigma_{ty} - \sigma_{oz} = \frac{F \cdot \sin\alpha}{b \cdot h} - \frac{6 \cdot F \cdot l \cdot \cos\alpha}{b \cdot h^2}$$

a podľa výsledného znamienka môže vzniknúť napätie v tlaku – alebo ťahu +.



Obr. 9.5

PRÍKLAD

Urobte kontrolu nebezpečného prierezu podľa *obr. 9.1*, ak $F = 2\,000$ N, $\alpha = 30°$, $b = 15$ mm, $h = 30$ mm, $l = 200$ mm a $\sigma_{Dt} = 150$ MPa.

Riešenie:

Podľa predchádzajúceho rozboru platí:

$$\sigma_{max} = \sigma_{ty} + \sigma_{oz} = \frac{F \cdot \sin\alpha}{b \cdot h} + \frac{6 \cdot F \cdot l \cdot \cos\alpha}{b \cdot h^2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{F}{b \cdot h} \cdot \left(\sin\alpha + \frac{6 \cdot l \cdot \cos\alpha}{h} \right)$$

$$\sigma_{max} = \frac{2000}{15 \cdot 30} \cdot \left(\sin 30^\circ + \frac{6 \cdot 200 \cdot \cos 30^\circ}{30} \right)$$

$$\sigma_{max} = 156{,}2 \text{ MPa} > \sigma_{Dt} = 150 \text{ MPa} \text{ – nevyhovuje.}$$

Aké sú možnosti vytvorenia správnej pevnostnej podmienky:

1. Navrhnúť materiál s vyššou hodnotou σ_{Dt}.
2. Zmeniť rozmery – a) zväčšiť hodnotu b alebo h,
   b) zmenšiť dĺžku l.

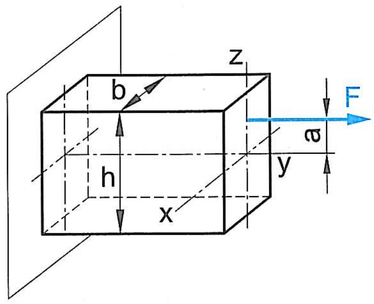
Po urobení opravy opäť preveríme platnosť pevnostnej podmienky.

Poznámka:

V tomto prípade zanedbávame šmykové namáhanie, pretože vyvolané tangenciálne napätie je pomerne malé a maximálne je v tom mieste, kde je normálové napätie nulové. Nemohli by sme ho zanedbať pri veľmi krátkych nosníkoch a na voľnom konci nosníka.

9.2.2 Excentrický ťah

Ide o podobný spôsob kombinovaného namáhania ako v predchádzajúcom prípade. Vzniká vtedy, ak ťahová sila nepôsobí v osi prúta, ale leží na osi súmernosti, posunutá od ťažiska prierezu o vzdialenosť a.



Obr. 9.6

Osová sila spôsobuje namáhanie ťahom:

$$\sigma_{ty} = \frac{F}{S}$$

Posunutie pôsobiska sily o vzdialenosť a od osi spôsobuje ohybový moment:

$$M_{ox} = F \cdot a$$

a ten vyvolá ohybové napätie, ktoré má po celej dĺžke nosníka rovnakú hodnotu:

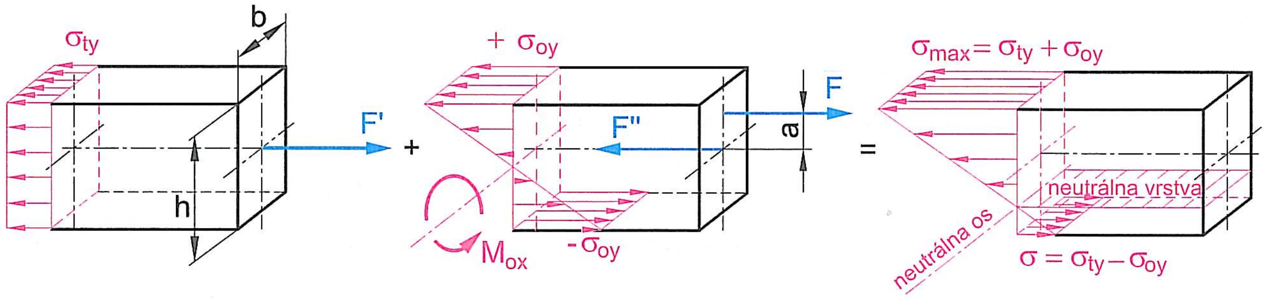
$$\sigma_{oy} = \frac{M_{ox}}{W_{ox}} = \frac{6 \cdot F \cdot a}{b \cdot h^2}$$

Pozdĺž nosníka sa napätie nemení. Jeho maximálna hodnota je v horných vláknach prierezu. Je súčtom ťahového napätia a ťahovej časti ohybového napätia:

$$\sigma_{max} = \sigma_{ty} + \sigma_{oy}$$

Neutrálna os aj neutrálna vrstva sú posunuté. V dolných vláknach bude napätie rovnajúce sa súčtu ťahového napätia a tlakovej časti ohybového napätia:

$$\sigma = \sigma_{ty} - \sigma_{oy}$$



Obr. 9.7

Poznámka:

Pri návrhovom výpočte vedie priamy výpočet rozmerov na rovnicu tretieho rádu. Keď poznáme veľkosť sily, dovolené napätie v ohybe a máme vyrátať prierezové rozmery nosníka, postupujeme tak, že najskôr vyrátame rozmery z namáhania v ohybe, ktoré o málo zväčšíme a pre takto navrhnuté rozmery urobíme kontrolu prierezových rozmerov na zložené namáhanie.

PRÍKLAD

Vyrátajte rozmery nosníka podľa *obr. 9.6*, ak sila $F = 5000$ N, $a = 10$ mm a $\sigma_{Dt} = 150$ MPa ak $\frac{h}{b} = 3$.

Riešenie:

Najskôr vyrátame rozmery iba z namáhania v ohybe.

$$\sigma_{oy} = \frac{M_{ox}}{W_{ox}} = \frac{6 \cdot F \cdot a}{b \cdot h^2} = \frac{6 \cdot F \cdot a}{b \cdot (3 \cdot b)^2} \leq \sigma_{Dt}$$

Po úprave:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot F \cdot a}{3 \cdot \sigma_{Dt}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 10}{3 \cdot 150}} = 6{,}06 \text{ mm}$$

Prierezové rozmery skutočného nosníka navrhneme o niečo väčšie:

$$b_{sk} = 7 \text{ mm}$$

$$h_{sk} = 21 \text{ mm}$$

Kontrola navrhnutých rozmerov:

$$\sigma_{max} = \sigma_{ty} + \sigma_{oy} = \frac{F}{b \cdot h} + \frac{6 \cdot F \cdot a}{b \cdot h^2}$$

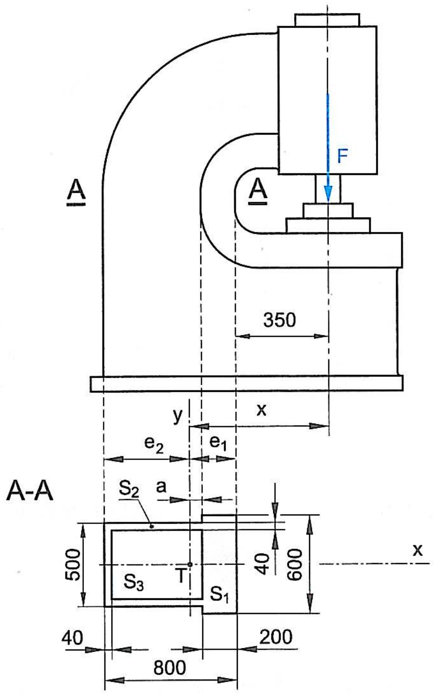
$$\sigma_{max} = \frac{F}{b \cdot h}\left(1 + \frac{6 \cdot a}{h}\right)$$

$$\sigma_{max} = \frac{5000}{7 \cdot 21}\left(1 + \frac{6 \cdot 10}{21}\right) = 131{,}2 \text{ MPa} \leq 150 \text{ MPa}$$

Navrhnuté rozmery vyhovujú a zadané zaťaženie prenesú.

PRÍKLAD

Stojan lisu je vyrobený z liatiny 42 2435 a má tvar podľa *obr. 9.8* maximálna lisovacia sila je $F = 1{,}5 \cdot 10^6$ N. Vyrátajte mieru bezpečnosti v kritickom priereze.



Obr. 9.8

Riešenie:

1. Určenie kritického prierezu a polohy neutrálnej osi (poloha ťažiska)

Kritický prierez je v mieste rezu A–A. Celkový prierez sa skladá z jednoduchých plôch S_1, S_2, S_3 a má obsah:

$$S = (200\cdot 600 + 500\cdot 600 - 420\cdot 560) = 184\,800 \text{ mm}^2$$

Vzdialenosť ťažiska od krajného vlákna prierezu vyrátame zo vzťahu:

$$e_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i \cdot y_{Ti}}{S}$$

$$e_1 = \frac{200\cdot 600\cdot 100 + 500\cdot 600\cdot 500 - 420\cdot 560\cdot 480}{184\,800} = 265{,}7 \text{ mm}$$

Podľa *obr. 9.8* je vzdialenosť druhého krajného vlákna od ťažiska prierezu:

$$e_2 = 800 - e_1$$

$$e_2 = 800 - 265{,}7$$

$$e_2 = 800 - 534{,}3 \text{ mm}$$

Vzdialenosť ťažiska od vektorovej priamky zaťažujúcej sily:

$$x = 615{,}7 \text{ mm}$$

2. Výpočet kvadratického momentu kritického prierezu

$$J_y = \frac{600\cdot 200^3}{12} + 600\cdot 200\cdot 165{,}7^2 + \frac{500\cdot 600^3}{12} + 500\cdot 600\cdot 234{,}3^2 - \frac{420\cdot 560^3}{12} - 420\cdot 560\cdot 214{,}3^2 = 1{,}22\cdot 10^{10} \text{ mm}^4$$

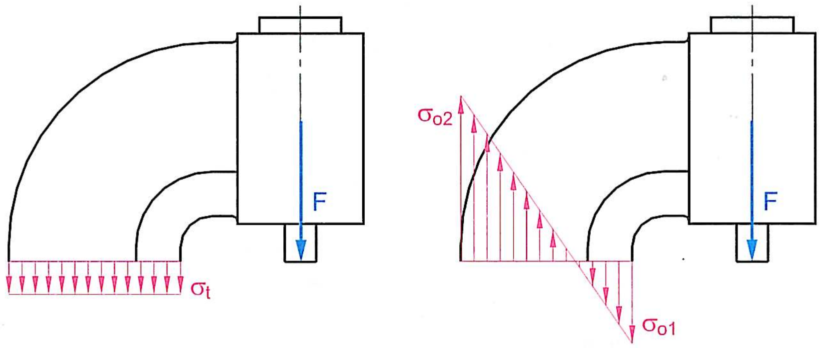
3. Výpočet prierezových modulov

$$W_1 = \frac{J_y}{e_1} = \frac{1{,}22\cdot 10^{10}}{265{,}7} = 4{,}598\cdot 10^7 \text{ mm}^3$$

$$W_2 = \frac{J_y}{e_2} = \frac{1{,}22\cdot 10^{10}}{534{,}3} = 2{,}286\cdot 10^7 \text{ mm}^3$$

4. Výpočet napätia v ťahu

$$\sigma_t = \frac{F}{S} = \frac{1{,}5\cdot 10^6}{184800} = 8{,}12\ \text{MPa}$$



priebeh napätia v ťahu

priebeh napätia v ohybe

Obr. 9.9

5. Výpočet ohybového napätia

$$\sigma_{o1} = \frac{M_o}{W_1} = \frac{F\cdot x}{W_1} = \frac{1{,}5\cdot 10^6\cdot 615{,}7}{4{,}598\cdot 10^7} = 20{,}09\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{o2} = \frac{-M_o}{W_2} = \frac{-F\cdot x}{W_2} = \frac{-1{,}5\cdot 10^6\cdot 615{,}7}{2{,}286\cdot 10^7} = -40{,}40\ \text{MPa}$$

6. Výpočet výsledného napätia

Maximálne napätie v ťahu:

$$\sigma_{t\max} = \sigma_t + \sigma_{o1} = 8{,}12 + 20{,}09 = 28{,}21\ \text{MPa}$$

Maximálne napätie v tlaku:

$$\sigma_{d\max} = \sigma_t - \sigma_{o2} = 8{,}12 - 40{,}40 = -32{,}28\ \text{MPa}$$

7. Výpočet miery bezpečnosti

Pre daný materiál je minimálna pevnosť v ťahu $\sigma_{Pt} = 350$ MPa. Miera bezpečnosti je:

$$k = \frac{\sigma_{Pt}}{\sigma_{t\max}} = \frac{350}{28{,}21} = 12{,}41$$

Navrhnutý prierez je čiastočne predimenzovaný, ale vzhľadom na to, že pri práci lisu dochádza aj k rázovým silám, ktoré môžu dosiahnuť až dvojnásobok lisovacej sily, považujeme tento prierez za dostatočne dimenzovaný. Mieru bezpečnosti v tlaku sme nekontrolovali preto, lebo sivá liatina má v tlaku oveľa vyššie hodnoty medze pevnosti ako v ťahu.

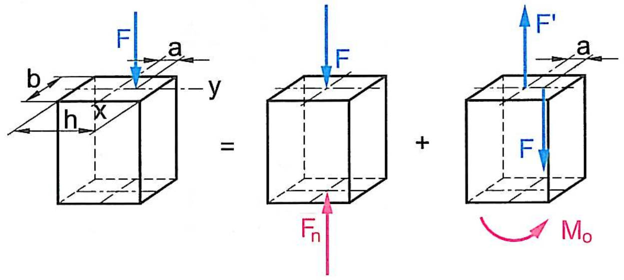
Zhrnutie:

Pri zloženom namáhaní rozložíme pôsobiacu silu na také zložky, ktoré spôsobujú jednoduché namáhanie a účinky od týchto zložiek zrátame.

1. *V prípade ťahu a ohybu zrátame v riešenom mieste napätie vyvolané zložkou sily spôsobujúcou namáhanie ťahom a napätie vyvolané zložkou sily spôsobujúcou ohyb. Ohybové napätie je v každom mieste prierezu nosníka iné. Dbáme na to, aby sme správne určili, v ktorom mieste prierezu vyvolá ohyb ťahové a v ktorom tlakové napätia. V každom bode prierezu bude iná hodnota napätia.*
2. *Excentrický ťah je zložené namáhanie, ktoré sa skladá zo zložky ťahového a ohybového napätia. Obidva druhy napätí sú v každom mieste prierezu rovnaké.*

9.2.3 Excentrický tlak

Riešenie tohto druhu namáhania je zhodné s excentrickým ťahom. Podmienkou je, že výška súčiastky nesmie byť príliš veľká, aby nedochádzalo k namáhaniu vo vzpere.



Obr. 9.10

Napätie v tlaku (nezávisí od vzdialenosti sily od ťažiska prierezu):

$$\sigma_d = \frac{F}{S}$$

Napätie v ohybe:

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} = \frac{F \cdot a}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = \frac{6 \cdot F \cdot a}{b \cdot h^2}$$

Toto napätie rastie so vzdialenosťou a. Môžu nastať tri prípady:

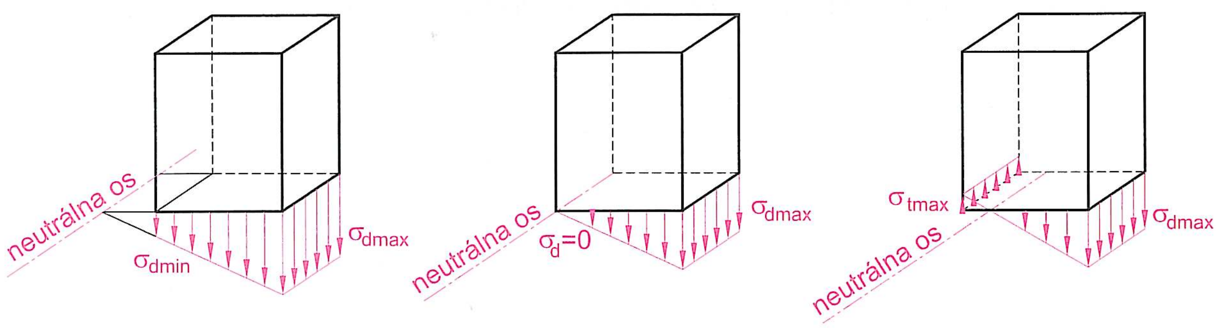
a) Napätie je v celom priereze iba tlakové. Neutrálna os prechádza mimo prierez súčiastky.
b) Napätie je v celom priereze tlakové a v jednom okrajovom vlákne alebo na jednej jeho hrane sa rovné nule. Neutrálna os leží na tomto vlákne (na hrane).
c) Napätie sa po priereze mení z tlakového na ťahové. Neutrálna os sa nachádza v priereze.

Pri niektorých materiáloch (murivo, betón) nesmie vzniknúť v priereze napätie v ťahu. Musí sa preto obmedziť vzdialenosť pôsobiska sily F od ťažiska prierezu tak, aby v namáhanom priereze nevzniklo ťahové napätie. Takýto stav nastane, ak bude dodržaná podmienka:

$$|\sigma_d| = |\sigma_o|$$

$$\frac{F}{S} = \frac{M_o}{W_o}$$

$$\frac{F}{S} = \frac{F \cdot a_{max}}{W_o}$$



Obr. 9.11

Po úprave:

$$a_{max} = \frac{W_o}{S}$$

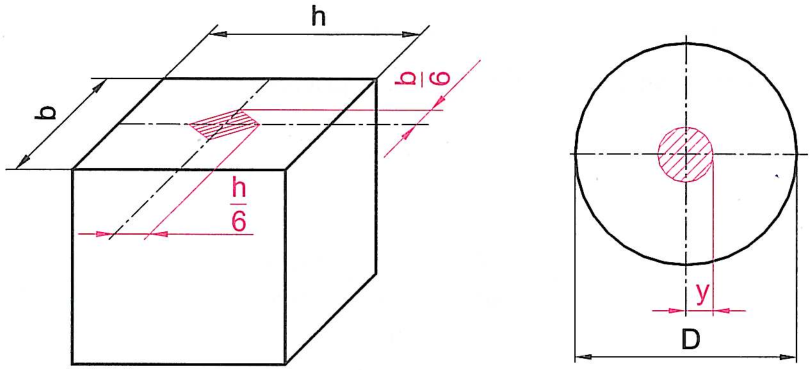
Pre obdĺžnikový prierez vyrátame tieto vzdialenosti zvlášť pre každú stranu.

a) v osi x:

$$y_{max} = \frac{W_o}{S} = \frac{\frac{b \cdot h^2}{6}}{b \cdot h} = \frac{h}{6}$$

b) v osi y:

$$x_{max} = \frac{W_o}{S} = \frac{\frac{b^2 \cdot h}{6}}{b \cdot h} = \frac{b}{6}$$



Obr. 9.12

Pre kruhový prierez platí vo všetkých smeroch vzťah:

$$y_{max} = \frac{W_o}{S} = \frac{\frac{\pi \cdot d^3}{32}}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}}$$

$$y_{max} = \frac{d}{8}$$

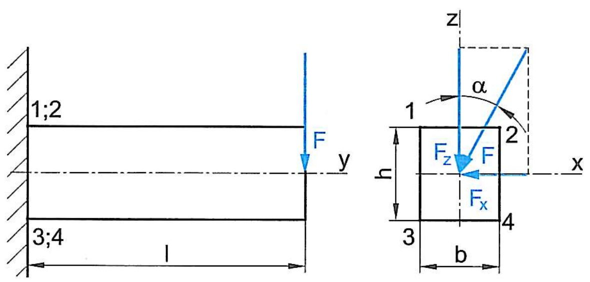
Pokiaľ bude pôsobiť sila vo vyšrafovanej ploche, nevznikne v priereze ťahové napätie. Tejto ploche hovoríme jadro prierezu.

9.2.4 Šikmý ohyb

Vzniká vtedy, ak vektorová priamka zaťažujúcej sily leží v rovine prierezu, prechádza ťažiskom prierezovej plochy, ale neleží na osi súmernosti prierezu. Tento prípad riešime tak, že zaťažujúcu silu rozložíme na jednotlivé zložky pôsobiace vo vyznačených osiach a účinky jednotlivých síl algebricky zrátame.

$$F_x = F \cdot \sin \alpha$$

$$F_z = F \cdot \cos \alpha$$



Obr. 9.13

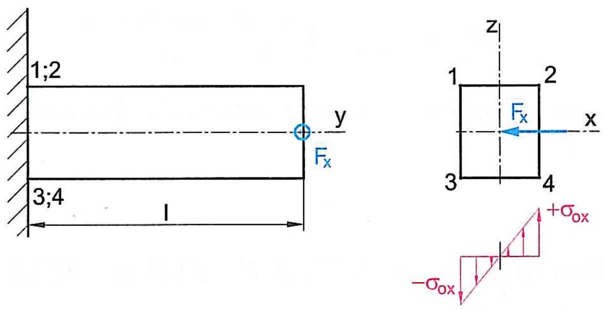
Ohyb budeme riešiť vo dvoch rovinách v mieste votknutia, pretože v tomto mieste je najväčšie napätie od oboch zložiek síl.

a) Napätie od zložky F_x v mieste votknutia:

$$\sigma_{ox} = \frac{M_{ox}}{W_{oz}}$$

$$M_{ox} = F_x \cdot l = F \cdot l \cdot \sin\alpha$$

$$\sigma_{ox} = \frac{6 \cdot F \cdot l \cdot \sin\alpha}{b^2 \cdot h}$$



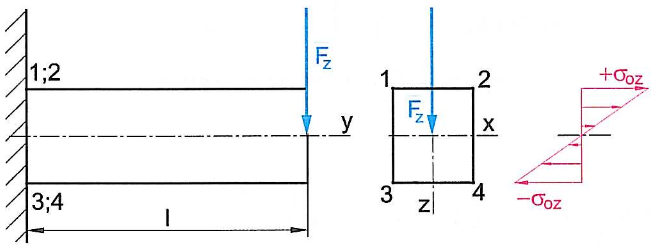
Obr. 9.14

b) Napätie od zložky F_z v mieste votknutia:

$$\sigma_{oz} = \frac{M_{oz}}{W_{ox}}$$

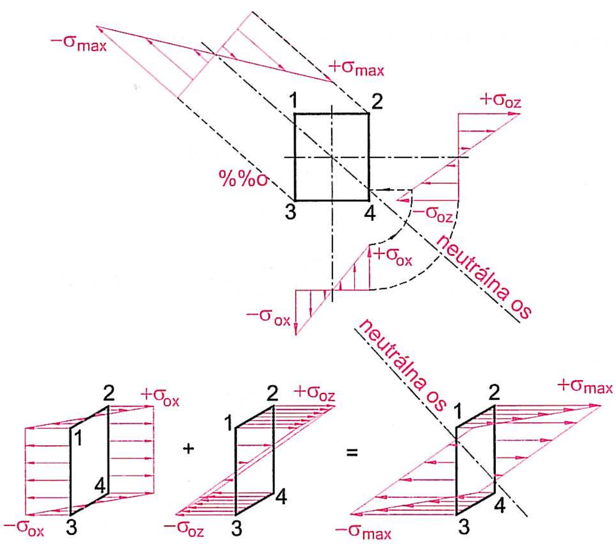
$$M_{oz} = F_z \cdot l = F \cdot l \cdot \cos\alpha$$

$$\sigma_{oz} = \frac{6 \cdot F \cdot l \cdot \cos\alpha}{b \cdot h^2}$$



Obr. 9.15

Celkové napätie v bodoch (*1, 2, 3, 4*) je súčtom jednotlivých zložiek napätí.



Obr. 9.16

V bode *2* vznikne ťahové napätie a v bode *3* tlakové. Tieto napätia sú maximálne a ich hodnotu dostaneme zo vzťahu:

$$\sigma_{max} = \pm\left(\frac{6 \cdot F \cdot l \cdot \sin\alpha}{b^2 \cdot h} + \frac{6 \cdot F \cdot l \cdot \cos\alpha}{h^2 \cdot b}\right)$$

$$\sigma_{max} = \pm\frac{6 \cdot F \cdot l}{b \cdot h} \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{b} + \frac{\cos\alpha}{h}\right)$$

Napätia, ktoré vzniknú v bodoch *1* a *4* vyrátame:

$$\sigma = \pm\frac{6 \cdot F \cdot l}{b \cdot h} \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{b} - \frac{\cos\alpha}{h}\right)$$

Zaujíma nás aj rozloženie napätia po priereze. Neutrálna os sa dostáva do novej polohy a táto poloha sa určí výpočtom alebo graficky *(obr. 9.16)*.

PRÍKLAD

Vyrátajte rozmery prierezu nosníka podľa *obr. 9.13*, ak $F = 3$ kN, $\alpha = 30°$, $l = 1$ m, $\sigma_{Do} = 100$ MPa a pomer $\frac{b}{h} = 0,5$. Vyrátajte aj celkový priehyb nosníka.

Riešenie:

Sila F pôsobí v rovine prierezu, prechádza ťažiskom prierezu, ale nepôsobí v osi súmernosti, preto ide o šikmý ohyb. Podľa predchádzajúceho rozboru môžeme pre maximálne napätie napísať:

$$\sigma_{o\,max} = \frac{6 \cdot F \cdot l}{b \cdot h} \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{h} + \frac{\sin\alpha}{b}\right) \le \sigma_{Do}$$

Ak dosadíme za $h = 2b$, dostaneme po úprave výraz:

$$\sigma_{Do} \ge \frac{6 \cdot F \cdot l}{4 \cdot b^3} \cdot (\cos\alpha + 2 \cdot \sin\alpha)$$

Z toho vyjadríme

$$b \ge \sqrt[3]{\frac{6 \cdot F \cdot l}{4 \cdot \sigma_{Do}} \cdot (\cos\alpha + 2 \cdot \sin\alpha)}$$

$$b \ge \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 3000 \cdot 1000}{4 \cdot 100} \cdot (\cos 30° + 2 \cdot \sin 30°)} = 43,79 \text{ mm}$$

Podľa STN 42 5522 navrhneme skutočné prierezové rozmery nosníka $b_{sk} = 50$ mm a $h_{sk} = 100$ mm.

Priehyb v osi x

$$y_x = \frac{l^3 \cdot F \cdot \sin\alpha}{3 \cdot E \cdot J_z} = \frac{l^3 \cdot F \cdot \sin\alpha}{\frac{3 \cdot E \cdot b^3 \cdot h}{12}}$$

$$y_x = \frac{12 \cdot 1000^3 \cdot 3000 \cdot \sin 30°}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 50^3 \cdot 100} = 2,29 \text{ mm}$$

Priehyb v osi y

$$y_z = \frac{l^3 \cdot F \cdot \cos\alpha}{3 \cdot E \cdot J_x} = \frac{l^3 \cdot F \cdot \cos\alpha}{\frac{3 \cdot E \cdot h^3 \cdot b}{12}}$$

$$y_z = \frac{12 \cdot 1000^3 \cdot 3000 \cdot \cos 30°}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 100^3 \cdot 50} = 0,99 \text{ mm}$$

Celkový priehyb

$$y_c = \sqrt{y_x^2 + y_z^2}$$

$$y_c = \sqrt{2,29^2 + 0,99^2} = 2,49 \text{ mm}$$

Zhrnutie:

Pri riešení šikmého ohybu rozložíme zaťažujúcu silu na zložky pôsobiace v osiach súradnicovej sústavy. Vyriešime napätia, ktoré tieto zložky síl spôsobujú v riešenom priereze. Výsledné napätie je algebrickým súčtom jednotlivých napätí pôsobiacich v danom bode riešeného prierezu.

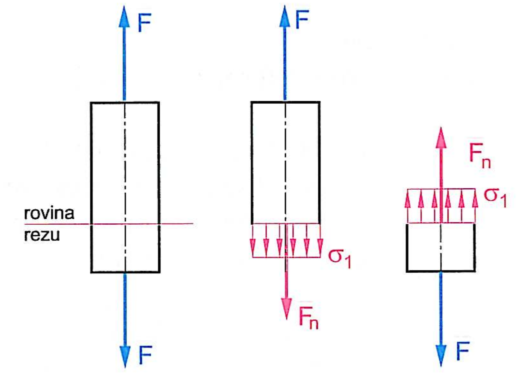
KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Čo rozumieme pod pojmom zložené namáhanie?
2. Aké prípady zloženého namáhania môžu nastať kombináciou normálových napätí?
3. Kedy nastane ťah a ohyb, excentrický ťah, excentrický tlak, šikmý ohyb?
4. Na ktorej strane prierezu bude pri excentrickom ťahu (tlaku) maximálne napätie?
5. Čo je to jadro prierezu pri excentrickom tlaku a z akého dôvodu ho zisťujeme?
6. Z akej podmienky vyrátame jadro prierezu?
7. Prečo musí pri excentrickom ťahu pôsobiť sila v osi súmernosti prierezu?
8. Ako postupujeme v zisťovaní výsledného napätia pri kombinácii normálových napätí?
9. Prečo pri výpočte prierezu zaťaženého ťahom a ohybom vyrátame najskôr predbežné rozmery prierezu z ohybového namáhania a až po úprave – zväčšení rozmerov, navrhnutý prierez kontrolujeme na výsledné napätie?

9.3 KOMBINÁCIA NORMÁLOVÝCH A TANGENCIÁLNYCH NAPÄTÍ – JEDNOOSOVÝ A DVOJOSOVÝ STAV NAPÄTOSTI

9.3.1 Jednoosový stav napätosti

Doteraz sme riešili napätia iba v rovinách kolmých na os prútu. Nepôsobilo v nich žiadne tangenciálne napätie. Pri skutočných súčiastkach nastávajú často prípady, že v rovine, v ktorej zisťujeme pôsobenie napätí sa vyskytujú napätia rôzneho druhu, normálové aj tangenciálne. Existujú pritom také roviny (prierezy), kde sa tangenciálne napätia nevyskytujú. Takej rovine, v ktorej nepôsobí žiadne tangenciálne napätie hovoríme hlavná rovina a normálovým napätiam, ktoré v nich pôsobia hovoríme hlavné napätia. Hlavné napätia sú v týchto rovinách maximálne a označujeme ich σ_1 (σ_2, σ_3). V hlavnej rovine sa teda šmykové napätie rovná nule.



Obr. 9.17

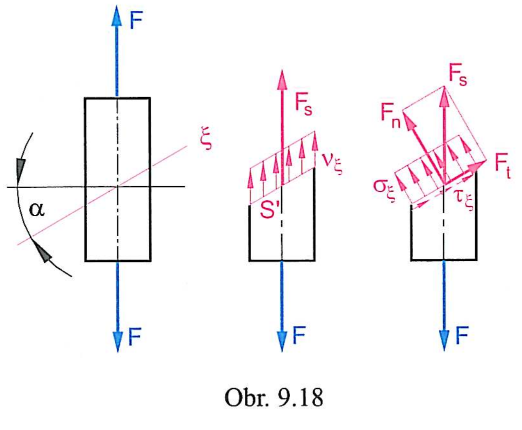
Ak vedieme rovinu rezu ξ pod uhlom α, vznikne v nej napätie:

$$v_\xi = \frac{F}{S'}$$

kde

$$S' = \frac{S}{\cos\alpha}$$

$$v_\xi = \frac{F \cdot \cos\alpha}{S} = \sigma_1 \cdot \cos\alpha$$



Obr. 9.18

Normálová zložka sily F_n – pôsobiaca kolmo na rovinu ξ potom je:

$$F_n = F \cdot \cos \alpha$$

a tangenciálna zložka sily F_t – pôsobiaca v rovine ξ je:

$$F_t = F \cdot \sin \alpha$$

Normálové, resp. tangenciálne napätie, ktoré v rovine ξ vznikne vyjadríme:

$$\sigma_\xi = \frac{F_n}{S'} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{\dfrac{S}{\cos \alpha}} = \frac{F}{S} \cdot \cos^2 \alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\xi = \frac{F_t}{S'} = \frac{F \cdot \sin \alpha}{\dfrac{S}{\cos \alpha}} = \frac{F}{S} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

Zistime teraz, pod akým uhlom α musí byť vedená rovina ξ, aby bolo tangenciálne napätie nulové. Inak povedané, hľadáme uhol hlavnej roviny. Zo vzťahu pre normálové napätie vyplýva, že hlavná rovina je pod uhlom $\alpha = 0$ a napätie σ_ξ je v nej maximálne, ak:

$$\sigma_{\xi\max} = \sigma_1$$

Druhá rovina, ktorá nás bude zaujímať je tá, v ktorej je maximálna hodnota tangenciálneho napätia. Zo vzťahu pre tangenciálne napätie vyplýva, že maximálna hodnota tangenciálneho napätia bude v rovine pod uhlom $\alpha = 45°$, teda:

$$\tau_{\xi\max} = \frac{\sigma_1}{2}$$

Poznámka:

Pri niektorých druhoch ocelí môžeme na vyleštenom povrchu pozorovať pri zaťažení prekračujúcom medzu klzu pod uhlom 45° čiary. V tomto smere dochádza ku sklzu kryštálov.

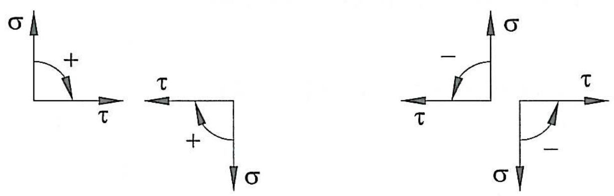
Materiál je charakterizovaný dvomi vlastnosťami:

– súdržnosťou,
– odporom proti deformácii v šmyku.

Normálové napätia odporujú snahe vonkajších síl odtrhnúť jednu časť od druhej. Sú prejavom súdržnosti materiálu a sú charakteristické pre krehké materiály.

Tangenciálne napätia vyjadrujú odpor materiálu proti šmyku, teda proti vzájomnému posunutiu. Sú charakteristické pre húževnaté materiály.

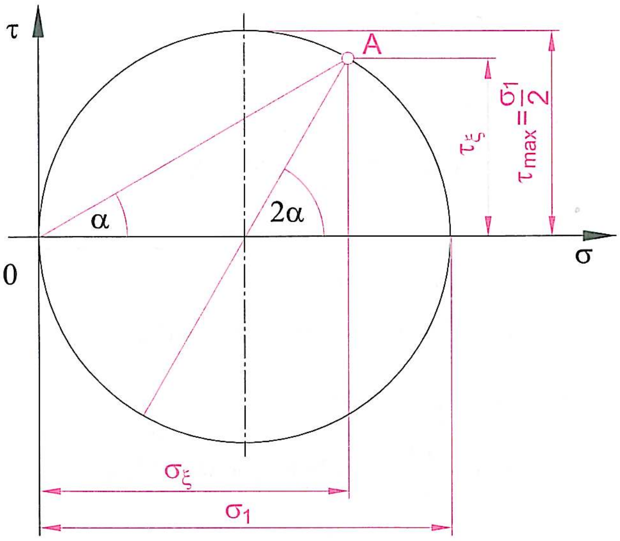
Určenie znamienka normálových napätí je pomerne jednoduché. Ak napätie smeruje von z prierezu – je kladné, ak smeruje do prierezu je záporné. Určenie orientácie tangenciálnych napätí je komplikovanejšie. Platí dohoda, že tangenciálne napätie je kladné vtedy, ak je zhodné so smerom normálového napätia pri jeho pootočení o 90° v smere otáčania hodinových ručičiek.



Obr. 9.19

9.3.2 Mohrova kružnica napätí

Mohrova kružnica napätí je kružnica, ktorej súradnice každého bodu odpovedajú normálovému a tangenciálnemu napätiu v určitej rovine.



Obr. 9.20

Postup konštrukcie Mohrovej kružnice:

- zvolíme si súradnicovú sústavu σ a τ,
- na osi σ vyznačíme veľkosť hlavného napätia σ_1, nad ktorým ako nad priemerom opíšeme kružnicu s polomerom $\frac{\sigma_1}{2}$,
- pre ľubovoľnú rovinu ξ zostrojíme bod Mohrovej kružnice tak, že zo stredu kružnice vedieme priamku pod uhlom 2α v smeru natočenia roviny ξ od hlavnej roviny, ktorá pretne kružnicu v bode A.

Platí:

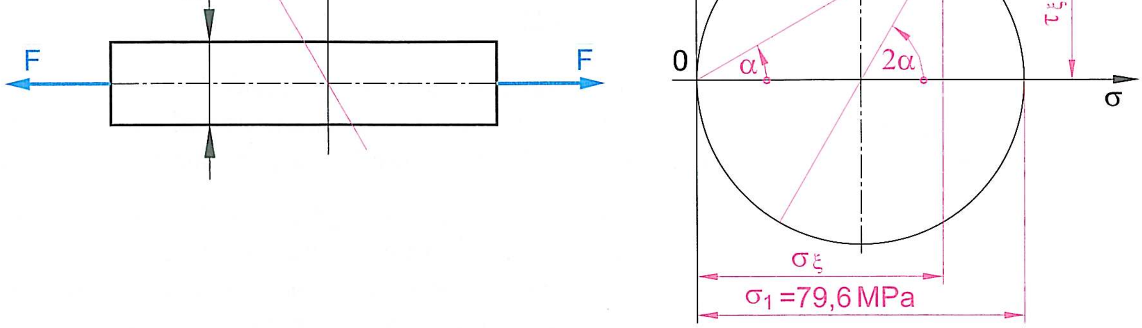
1. Body Mohrovej kružnice odpovedajúce dvom na seba kolmým rovinám ležia na tom istom priemere Mohrovej kružnice.
2. Vo dvoch na seba kolmých rovinách sú tangenciálne napätia rovnako veľké, ale líšia sa znamienkom.
3. Súčet normálových napätí v dvoch na seba kolmých rovinách je konštantný:

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = \sigma_1$$

PRÍKLAD

Zistite graficky a skontrolujte výpočtom veľkosť normálových a tangenciálnych napätí na skúšobnej tyčke v rovine ξ pod uhlom $\alpha = 30°$, ak sila $F = 25$ kN a priemer tyče $d = 20$ mm.

Hlavné napätie:



Obr. 9.21

$$\sigma_1 = \frac{F}{S}$$

$$\sigma_1 = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{4 \cdot 25\,000}{\pi \cdot 20^2} = 79{,}6 \text{ MPa}$$

napätia v rovine ξ:

$$\sigma_\xi = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\sigma_\xi = 79{,}6 \cdot \cos^2 30° = 59{,}7 \text{ MPa}$$

$$\tau_\xi = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

$$\tau_\xi = \frac{79{,}6}{2} \cdot \sin\left(2 \cdot 30°\right) = 34{,}5 \text{ MPa}$$

9.3.3 Dvojosový stav napätosti

Vzniká vtedy, ak pôsobí napätie v ťahu alebo v tlaku v dvoch na seba kolmých smeroch. Tento stav nastáva napríklad v stenách tenkostenných tlakových nádob s vnútorným pretlakom. Analogicky, ako pri jednoosovej napätosti sa na zisťovanie normálových a tangenciálnych napätí v rôznych rovinách využíva Mohrova kružnica.

PRÍKLAD

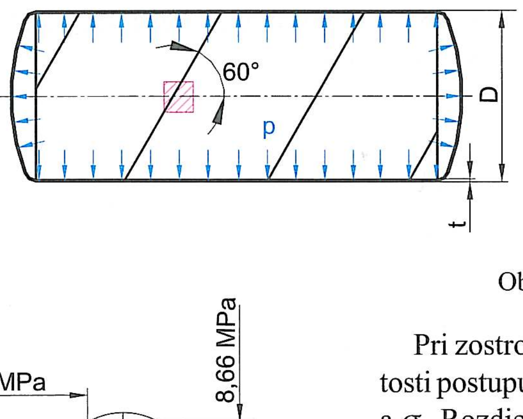
V tlakovej nádobe s priemerom $D = 2\,000$ mm a hrúbkou steny $t = 2$ mm pôsobí tlak $p = 80$ kPa. Nádoba je vyrobená zváraním zo špirálovo skružených plechov pod uhlom $\alpha = 60°$. Zistite veľkosti hlavných napätí, normálové a tangenciálne napätia v mieste zvaru.

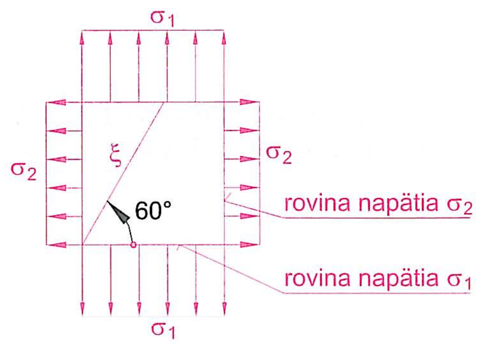
Riešenie:

Výpočtové vzťahy pre napätia v pozdĺžnom a priečnom smere sme odvodili v kapitole 3.

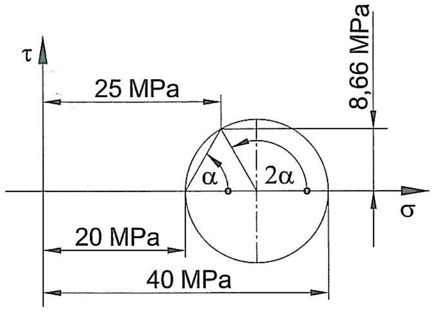
$$\sigma_1 = \frac{d \cdot p}{2 \cdot t}$$

$$\sigma_2 = \frac{d \cdot p}{4 \cdot t}$$





Obr. 9.22



Obr. 9.23

Pri zostrojovaní Mohrovej kružnice napätí pre dvojosový stav napätosti postupujeme tak, že na os σ nanesieme veľkosti hlavných napätí σ_1 a σ_2. Rozdiel napätí $\sigma_1 - \sigma_2$ predstavuje priemer Mohrovej kružnice.

Normálové a tangenciálne napätia v danej rovine zistíme, ak zo stredu kružnice vedieme priamku pod uhlom 2α v smere, v ktorom je rovina ξ sklonená od hlavnej roviny väčšieho z napätí σ_1. Veľkosti normálových a tangenciálnych napätí zistíme podobne ako pri jednoosovej napätosti.

$$\sigma_\xi = \sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)\cdot\cos^2\alpha$$

$$\sigma_\xi = 20 + (40 - 20)\cdot\cos^2 60° = 25\ \text{MPa}$$

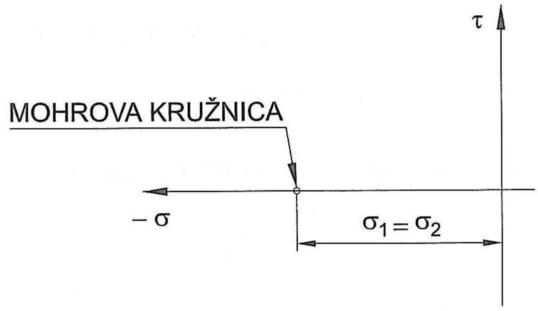
$$\tau_\xi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cdot\sin 2\alpha$$

$$\tau_\xi = \frac{40 - 20}{2}\cdot\sin\left(2\cdot 60°\right) = 8{,}66\ \text{MPa}$$

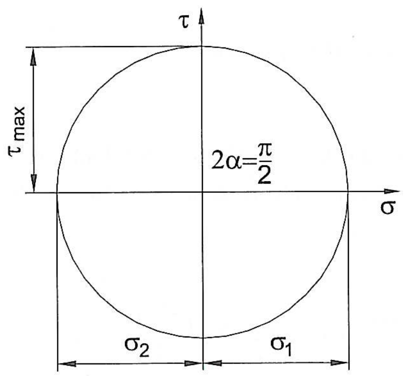
Osobitný prípad dvojosového stavu napätosti nastane vtedy, keď je súčiastka podrobená hydrostatickému tlaku. Napätia vo všetkých rovinách sú rovnako veľké a nezávislé od uhla α. Platí:

$$\sigma_1 = \sigma_2$$

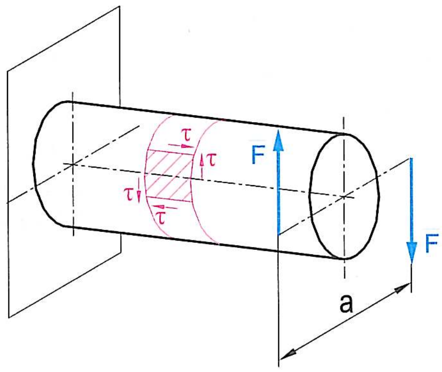
Tangenciálne napätia sú vo všetkých rovinách nulové. V tomto prípade Mohrova kružnica prechádza do bodu.



Obr. 9.24



Obr. 9.25



Obr. 9. 26

Iný zvláštny prípad dvojosového stavu napätosti nastane vtedy, ak sú normálové napätia rovnako veľké ale opačne orientované. V rovine orientovanej pod uhlom $\alpha = 45°$ nepôsobia žiadne normálové ale iba šmykové napätia.

$$\sigma_1 = 0 \quad \text{a} \quad \tau_{max} = \sigma_1 = \sigma_2$$

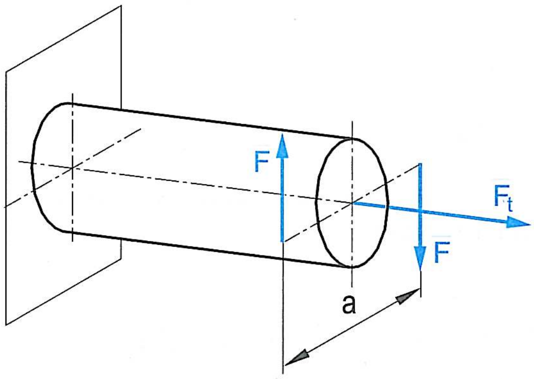
Napätosť, ktorá v stenách elementárnej kocky vyvolá iba šmykové napätia, sa nazýva čistý šmyk.

Takýto stav napätosti sa v praxi vyskytuje zriedkavo a stretávame sa s ním iba pri skrúcaní tenkostennej rúrky.

Zhrnutie:

Dvojosový stav napätosti nastane vtedy, ak sa v dvoch na seba kolmých smeroch vyskytujú iba normálové napätia. Takýto prípad môžeme riešiť výpočtom alebo pomocou Mohrovej kružnice. Zvláštne stavy napätostí nastávajú v prípade rovnosti normálových napätí. Ak majú rovnaký zmysel, Mohrova kružnica prechádza do bodu, ak majú opačný zmysel, v rovine pod uhlom $\alpha = 45°$ nastáva prípad čistého šmyku.

9.4 TEÓRIE PEVNOSTI – LOMOVÉ TEÓRIE



Obr. 9.27

PRÍKLAD

Zistime, aké najväčšie napätie vznikne v prúte zaťaženom podľa *obr. 9.27*.

Ide o kombináciu namáhania v ťahu a v krútení. Tieto dva druhy namáhaní vyvolávajú nesúrodé napätia – normálové a tangenciálne napätia. Na zistenie ich spoločného, výsledného účinku použijeme Mohrovu kružnicu napätí.

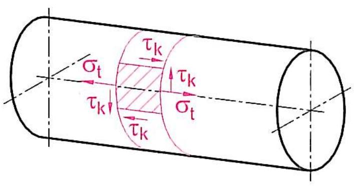
Riešenie:

Sila F_t vyvoláva normálové napätie (napätie v ťahu).

$$\sigma_t = \frac{F_t}{S} = \frac{4 \cdot F_t}{\pi \cdot d^2}$$

Silová dvojica $F \cdot a$ vyvoláva krútiaci moment spôsobujúci tangenciálne napätie (napätie v krútení).

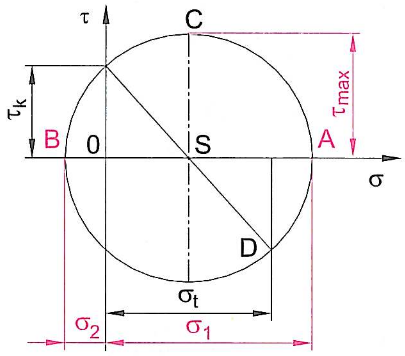
$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} = \frac{16 \cdot M_k}{\pi \cdot d^3}$$



Obr. 9. 28

Na *obr. 9.28* je znázornený element plochy z povrchu valca, kde pôsobia najväčšie tangenciálne napätia.

Znázornenie na Mohrovej kružnici je na *obr. 9.29*.



Obr. 9. 29

Podľa dohovoru je orientácia tangenciálneho napätia z *obr. 9.28* oproti normálovému napätiu záporná, preto je τ_k pod osou. Zo zobrazenia na Mohrovej kružnici je zrejmé, že:

$$\sigma_1 = \overline{OA} = \overline{OS} + \overline{SD} = \frac{\sigma_t}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_t}{2}\right)^2 + \tau_k^2}$$

$$\sigma_2 = \overline{OB} = \overline{OS} - \overline{SD} = \frac{\sigma_t}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_t}{2}\right)^2 + \tau_k^2}$$

Po úprave:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_t}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_t^2 + 4 \cdot \tau_k^2}$$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_t^2 + 4 \cdot \tau_k^2}$$

V normálovom napätí σ_1 je teda zahrnuté spoločné pôsobenie normálového a tangenciálneho napätia.

V technickej praxi sa vyskytujú materiály (najčastejšie kovy), ktoré môžu byť húževnaté alebo tvrdé a veľmi pevné. V prvom prípade sa na porušení súdržnosti podieľajú šmykové napätia a v druhom prípade normálové. Nájsť správny podiel, ktorá zložka sa akou mierou podieľa na porušení súdržnosti sa dá experimentálne (čo je síce možné, ale časovo a ekonomicky veľmi náročné) alebo teoreticky. Preto sa vyvinulo niekoľko teórií, ktoré vychádzajú z rovnakého princípu – hľadajú také veľké normálové napätie – redukované napätie, ktoré v danom mieste vyvodí rovnaké účinky ako spoločné pôsobenie normálových a tangenciálnych napätí.

9.4.1 Teória maximálnych normálových napätí (Lamé, Clapeyrom, Maxwell)

Podľa tejto teórie dôjde pri zloženom stave napätosti k porušeniu materiálu vtedy, ak σ_{max} dosiahne hodnotu, pri ktorej dochádza k porušeniu materiálu za jednoduchého ťahu (tlaku). Vzťah pre redukované napätie je zhodný s odvodenou rovnicou.

$$\sigma_{red} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \le \sigma_D$$

V prípade, že $\sigma_{t(d)} = 0$ platí:

$$\sigma_{red} = \pm\tau \le \sigma_D$$

Pomer medzi dovolenou hodnotou normálového a tangenciálneho napätia sa vyjadruje súčiniteľom:

$$\varphi = \frac{\sigma_D}{\tau_D} \le 1$$

Táto teória sa dá použiť iba pre materiály, pre ktoré platí $\sigma_D = \tau_D$. Uvedenú podmienku spĺňajú iba veľmi krehké materiály.

9.4.2 Teória najväčších pomerných deformácií (Bach, St. Venant)

Táto teória predpokladá, že k porušeniu materiálu dôjde v dôsledku maximálneho pomerného predĺženia alebo skrátenia. Z tohto predpokladu bol odvodený vzťah:

$$\sigma_{red} = 0,35 \cdot \sigma \pm 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

Súčiniteľ φ je v tomto prípade:

$$\varphi = \frac{\sigma_D}{\tau_D} \le 1,3$$

Táto teória sa s dostatočnou presnosťou uplatňuje pri krehkých materiáloch.

9.4.3 Teória maximálnych šmykových napätí (Mohr, Guest, Coulomb)

Podľa tejto teórie dôjde k porušeniu súdržnosti materiálu, ak dosiahne maximálne tangenciálne napätie veľkosť, pri ktorej sa materiál poruší prostým ťahom. Pri jednoosovom stave napätosti platí:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_D}{2}$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \le \sigma_{Dt}$$

$$\varphi = \frac{\sigma_D}{\tau_D} \le 2$$

Táto teória má dve obmedzenia:

1. Polomer Mohrovej kružnice $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$. Ak by mala byť táto podmienka splnená v každom prípade, nezáležalo by na veľkosti jednotlivých hlavných napätí σ_1, σ_2, ale iba na ich rozdieloch. V praxi to nie je možné, lebo σ_1 by mohla mať ľubovoľne veľkú hodnotu.
2. Ak $\sigma_1 = \sigma_2$ prejde Mohrova kružnica do bodu. Tangenciálne napätia sa tu nenachádzajú.

Táto teória platí (s prihliadnutím na tieto podmienky) pre húževnaté materiály.

9.4.4 Teória celkovej energie napätosti (Beltrami – Haigh)

Podľa tejto hypotézy dochádza k porušeniu materiálu nezávisle od napätosti vtedy, keď celková energia napätosti dosiahne hodnotu celkovej energie jednoduchého ťahu, pri ktorej nastáva porušenie materiálu.

V tejto teórii sa uvažuje o celkovej objemovej hustote energie, ktorá sa skladá z dvoch častí:

a) z časti spôsobujúcej zmenu tvaru,
b) z časti spôsobujúcej zmenu objemu.

Pre dvojosovú napätosť je celková hustota energie:

$$w_c = \frac{1}{2}\varepsilon_1 \cdot \sigma_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 \cdot \sigma_2$$

Po úprave:

$$w_c = \frac{\sigma_1^2}{2 \cdot E} + \frac{\sigma_2^2}{2 \cdot E}$$

Táto nesmie prekročiť objemovú hustotu energie pre jednoduchý ťah, ktorá odpovedá napätiu σ_{Dt}:

$$w_c = \frac{\sigma_1^2}{2 \cdot E} + \frac{\sigma_2^2}{2 \cdot E} \le \frac{\sigma_{Dt}^2}{2 \cdot E}$$

po úprave dostaneme:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \le \sigma_{Dt}$$

Ak vyjadríme odvodený vzťah pomocou napätí pôsobiacich v danej (nie v hlavnej) rovine, dá sa pre oceľ odvodiť vzťah:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 2{,}6 \cdot \tau^2} \le \sigma_{Dt}$$

Pre tento vzťah platí:

$$\varphi = \frac{\sigma_D}{\tau_D} \le 1{,}61$$

Táto hypotéza zodpovedá v skutočnosti pre húževnaté materiály pri napätosti, ktorá spôsobuje zmenu objemu. Nedá sa použiť pre súčiastky zaťažené všestranným napr. vysokým hydrostatickým tlakom, pretože materiál vysoké tlaky vydrží.

9.4.5 Teória energie napätosti šmykových napätí HMH (Huber, Misses, Hencky)

Podľa tejto teórie dochádza k porušeniu materiálu nezávisle od zloženej napätosti vtedy, keď energia napätosti pre zmenu tvaru prekročí hodnotu energie napätosti pre zmenu tvaru jednoosovej napätosti, pri ktorej nastáva porucha. Pretože tvar môžu meniť iba šmykové napätia, túto teóriu nazývame aj energetickou teóriou šmykových napätí. Pre rovinný stav napätosti sa dá odvodiť:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \le \sigma_{Dt}$$

Toto je vyjadrenie piatej teórie pomocou hlavných napätí. Ak vyjadríme hlavné napätia pomocou napätí pôsobiacich v danej rovine dá sa odvodiť vzťah:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \le \sigma_{Dt}$$

Pre tento vzťah platí:

$$\varphi = \frac{\sigma_D}{\tau_D} \le 1{,}73$$

Skúšky ukázali, že táto teória dáva najpresnejšie výsledky pre húževnaté materiály. Výnimkou je iba všestranný ťah, kedy by podľa tejto teórie materiál vydržal nekonečne veľké napätie.

9.4.6 Využitie teórií

Na zistenie veľkosti redukovaného napätia σ_{red} nahrádzajúceho spoločné pôsobenie normálového a tangenciálneho napätia v danej rovine predpisuje norma pre húževnaté materiály použitie piatej teórie HMH. Dovolené napätie volíme s ohľadom na spôsob zaťaženia. Často sa stáva, že normálové napätie má charakter striedavého spôsobu zaťaženia a šmykové zase statického alebo miznúceho (prípad hybných hriadeľov). Preto musíme urobiť určitú korekciu vzťahu na výpočet σ_{red}. Túto korekciu robíme zavedením Bachovho opravného súčiniteľa, čím vzťah pre výpočet redukovaného napätia nadobudne tvar:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot (\alpha_B \cdot \tau)^2} \leq \sigma_{Dt}$$

Bachov opravný súčiniteľ je vyjadrený

$$\alpha_B = \frac{\sigma_D \text{ pre daný spôsob zaťaženia}}{\varphi \cdot \tau_D \text{ pre daný spôsob zaťaženia}}$$

kde

$$\varphi = \frac{\sigma_D}{\tau_D}$$

PRÍKLAD

Vypočítajte hodnotu Bachovho opravného súčiniteľa, pre piatu teóriu HMH hriadeľa z materiálu E295 podľa EN 1027-1 (pôvodne 11 500), ktorý je namáhaný ohybom a statickým (miznúcim) spôsobom krútenia.

Riešenie:

1. Najskôr vyrátame hodnotu súčiniteľa pre statický spôsob zaťaženia krútením.

Otáčajúci sa hriadeľ, v ktorom je vyvolané ohybové napätie, je vždy zaťažený striedavým spôsobom, pretože pri otáčaní je každá povrchová priamka namáhaná ťahom aj tlakom.

$$\alpha_B = \frac{\sigma_{D,III}}{\varphi \cdot \tau_D}$$

Po dosadení:

$$\sigma_{D,III} = c_{III} \cdot \sigma_D$$

a za:

$$\varphi = \frac{\sigma_D}{\tau_D}$$

dostaneme po úprave:

$$\alpha_B = c_{III}$$

Pre daný materiál nájdeme v strojníckych tabuľkách hodnotu $\alpha_B = c_{III} = 0{,}65$.

2. Bachov opravný súčiniteľ pre miznúci spôsob zaťaženia krútením.

$$\alpha_B = \frac{\sigma_{D,III}}{\varphi \cdot \tau_{D,II}}$$

$$\varphi = \frac{\sigma_D}{\tau_D}$$

pričom:

$$\sigma_{D,III} = c_{III} \cdot \sigma_D \qquad \tau_{D,II} = c_{II} \cdot \tau_D$$

Po dosadení a úprave dostaneme:

$$\alpha_B = \frac{c_{III}}{c_{II}}$$

Ak dosadíme tabuľkové hodnoty pre daný materiál $c_{II} = 0{,}85$ a $c_{III} = 0{,}65$, dostaneme:

$$\alpha_B = \frac{0{,}65}{0{,}85} = 0{,}76$$

PRÍKLAD

Aké bude redukované napätie podľa piatej teórie HMH v súčiastke z materiálu E355 podľa EN 1027-1 (pôvodne 11 600) v mieste, kde spoločne pôsobí striedavé normálové napätie s veľkosťou $\sigma = 52$ MPa a miznúce tangenciálne napätie $\tau = 28$ MPa.

Riešenie:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\cdot\left(\alpha_B \cdot \tau\right)^2}$$

Podľa predchádzajúceho príkladu platí:

$$\alpha_B = \frac{c_{III}}{c_{II}}$$

V strojníckych tabuľkách nájdeme pre daný materiál hodnoty:

$$c_{II} = 0{,}75,$$

$$c_{III} = 0{,}60$$

Potom:

$$\alpha_B = \frac{0{,}60}{0{,}75} = 0{,}8$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{52^2 + 3\cdot\left(0{,}8\cdot 28\right)^2} = 64{,}9 \text{ MPa}$$

Zhrnutie:

Pri riešení účinku kombinovaného namáhania v priereze, v ktorom pôsobia spoločne normálové aj tangenciálne napätia, výsledné napätie nemôžeme vyrátať ani algebrickým ani vektorovým súčtom. Obe napätia nahradíme jedným – redukovaným napätím, ktorého účinok je rovnaký ako spoločné pôsobenie obidvoch napätí. Najčastejšie sa používa teória HMH, ktorá platí pre húževnaté materiály a najlepšie vyhovuje pre bežné konštrukčné ocele. Veľkosť redukovaného napätia je daná vzťahom:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\cdot\left(\alpha_B \cdot \tau\right)^2}$$

Tento spôsob výpočtu redukovaného napätia je predpísaný aj normou STN pre húževnaté materiály. V prípade, že normálové napätie má iný spôsob zaťaženia ako tangenciálne, použijeme Bachov opravný súčiniteľ α_B.

KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Prečo normálové a tangenciálne napätia nemôžeme sčítať ani algebricky ani vektorovo?
2. Prečo zavádzame pojem redukovaného napätia a aký je jeho význam?
3. Ako vyrátame redukované napätie podľa teórie HMH?
4. Prečo zavádzame Bachov opravný súčiniteľ?

9.5 OHYB A KRÚTENIE HRIADEĽOV KRUHOVÉHO PRIEREZU

Ide o najčastejšie vyskytujúci sa prípad kombinovaného namáhania v technickej praxi. Pri výpočte hriadeľov obyčajne poznáme alebo vieme vyrátať ohybový a krútiaci moment, materiál a spôsob zaťaženia. Na výpočet použijeme vzťah:

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_{\text{o}}^2 + 3\cdot\left(\alpha_{\text{B}}\cdot\tau_{\text{k}}\right)^2} \leq \sigma_{\text{Do,III}}$$

ohybový moment vyrátame podľa:

$$\sigma_{\text{o}} = \frac{M_{\text{o}}}{W_{\text{o}}}$$

a krútiaci moment

$$\tau_{\text{k}} = \frac{M_{\text{k}}}{W_{\text{k}}}$$

Prierezové moduly v ohybe a v krútení vyrátame pre daný priemer zo vzťahov:

$$W_{\text{o}} = \frac{\pi\cdot d^3}{32} \quad \text{a} \quad W_{\text{k}} = \frac{\pi\cdot d^3}{16}$$

Pri porovnaní týchto vzťahov vidíme, že:

$$W_{\text{k}} = 2\cdot W_{\text{o}}$$

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{o}}}{W_{\text{o}}}\right)^2 + 3\cdot\left(\alpha_{\text{B}}\cdot\frac{M_{\text{k}}}{2\cdot W_{\text{o}}}\right)^2} \leq \sigma_{\text{Do,III}}$$

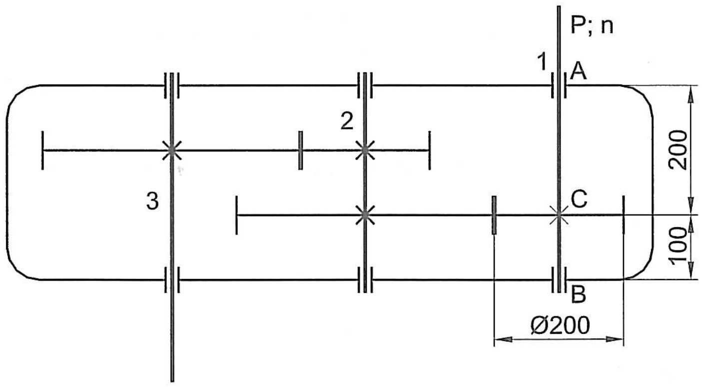
$$W_{\text{o}}\cdot\sigma_{\text{red}} = \sqrt{M_{\text{o}}^{\ 2} + 0,75\cdot\left(\alpha_{\text{B}}\cdot M_{\text{k}}\right)^2} \leq W_{\text{o}}\cdot\sigma_{\text{Do,III}}$$

takýmto spôsobom dostaneme redukovaný moment, ktorého účinok je rovnaký ako spoločné pôsobenie M_{o} a M_{k}.

$$M_{\text{o red}} = \sqrt{M_{\text{o}}^2 + 0,75\cdot\left(\alpha_{\text{B}}\cdot M_{\text{k}}\right)^2}$$

PRÍKLAD

Vyrátajte minimálne priemery vstupného hriadeľa na *obr. 9.30,* ktorý prenáša výkon P = 5 kW statickým spôsobom pri otáčkach n = 500 min^{-1}, ak je vyrobený z materiálu označenom E355 podľa EN 1027-1 (podľa pôvodnej STN 11 600).



Obr. 9.30

Rozbor:

Hriadeľ rozdelíme na úseky:

a) Od voľného konca po stred ložiska A – **úsek a**.

V tejto časti nepredpokladáme iné doplnkové namáhanie ako namáhanie krútením. V tomto úseku sa prenáša iba krútiaci moment M_{k}.

b) Od stredu ložiska A po stred kolesa C – **úsek b**.
V tejto časti pôsobia spoločne na hriadeľ ohybový M_o aj krútiaci moment M_k.

c) Od stredu kolesa C po stred ložiska B – **úsek c**.
V tejto časti krútiaci moment nepôsobí. Zaťaženie je spôsobované iba ohybovým momentom M_o.

Z rozboru vyplýva, že v každom zo skúmaných úsekov budú rôzne minimálne priemery.

Riešenie:

a) **úsek a**

V tomto úseku pôsobí iba namáhanie krútením. Napätie v krútení vyrátame:

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_{Dk}$$

Pre materiál 11 600 nájdeme v strojníckych tabuľkách hodnoty dovoleného napätia v krútení $\tau_{Dk} = 105 \div 145$ MPa. Pri dimenzovaní volíme obyčajne nižšiu hodnotu $\tau_{Dk} = 105$ MPa. Krútiaci moment vyrátame zo vzťahu:

$$M_k = \frac{P}{\omega}$$

V prípade, že výkon P je vo W a otáčky n sú zadané v min^{-1} je výhodné použiť vzťah pre priamy výpočet krútiaceho momentu:

$$M_k = \frac{30 \cdot P}{\pi \cdot n}$$

$$M_k = \frac{30 \cdot 5\,000}{\pi \cdot 500} = 95,49 \text{ Nm}$$

$$\tau_{Dk} \geq \frac{16 \cdot M_k}{\pi \cdot d_a^3}$$

Po úprave dostaneme vzťah pre výpočet priemeru hriadeľa v úseku a. Ak chceme, aby výsledná hodnota priemeru bola v mm, musíme dosadiť krútiaci moment v Nmm a dovolené napätie v MPa.

$$d_a \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_k}{\pi \cdot \tau_{Dk}}}$$

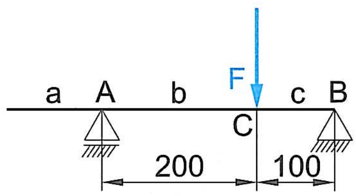
$$d_a \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 95\,490}{\pi \cdot 105}} = 16,7 \text{ mm}$$

b) **úsek b**

V tomto úseku spoločne pôsobia ohybový a krútiaci moment a ich spoločný účinok vyjadríme pomocou redukovaného momentu.

$$M_{o\,red} = \sqrt{M_o^2 + 0,75 \cdot (\alpha_B \cdot M_k)^2}$$

V tomto vzťahu nepoznáme zatiaľ hodnotu ohybového momentu M_o a Bachov opravný súčiniteľ α_B. Ohybový moment vyrátame podľa schémy na *obr. 9.31.*



Obr. 9.31

Ohybový moment na hriadeli spôsobuje sila F, ktorej veľkosť je:

$$M_k = F \cdot \frac{D}{2}$$

z toho:

$$F = \frac{2 \cdot M_k}{D}$$

$$F = \frac{2 \cdot 95,49}{0,2} = 954,9 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0; \qquad F_A - F + F_B = 0$$

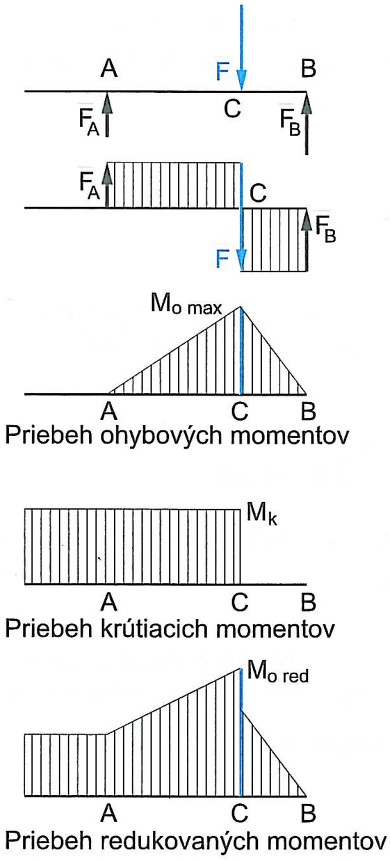
$$\sum M_A = 0; \qquad -200 \cdot F + 300 \cdot F_B = 0$$

$$F_B = \frac{200}{300} \cdot F$$

$$F_B = \frac{2}{3} \cdot 954,9 = 636,6 \text{ N}$$

$$F_A = F - F_B$$

$$F_A = 954,9 - 636,6 = 318,3 \text{ N}$$



Obr. 9.32

Maximálny ohybový moment je v bode C a jeho hodnota je:

$$M_{oC} = 200 \cdot F_{RA}$$

$$M_{oC} = 200 \cdot 318,3 = 63\,660 \text{ Nmm}$$

Pre prípad, keď krútiaci moment pôsobí na hriadeľ staticky, sme odvodili Bachov opravný súčiniteľ:

$$\alpha_B = c_{III}$$

Pre materiál 11 600 je $c_{III} = 0,60$.

Redukovaný moment:

$$M_{o\,red} = \sqrt{63660^2 + 0,75 \cdot (0,65 \cdot 95490)^2}$$

$$M_{o\,red} = 80\,712 \text{ Nmm}$$

Z pevnostnej rovnice pre ohyb:

$$\sigma_{DoIII} \geq \frac{M_{o\,red}}{W_o} = \frac{32 \cdot M_{o\,red}}{\pi \cdot d_b^3}$$

$$d_b \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{o\,red}}{\pi \cdot \sigma_{DoIII}}}$$

Pre materiál 11 423 nájdeme v strojníckych tabuľkách $\sigma_{DoIII} = 85$ MPa.

$$d_b \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 80\,712}{\pi \cdot 85}} = 21,3 \text{ mm}$$

c) **úsek c**

V tomto úseku pôsobí iba ohybový moment, preto minimálny priemer v tomto úseku vyrátame z maximálneho ohybového momentu. Tento maximálny moment M_{oC} pôsobí v bode C.

$$\sigma_{DoIII} \geq \frac{M_{oC}}{W_o} = \frac{32 \cdot M_{oC}}{\pi \cdot d_c^3}$$

$$d_c \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 63600}{\pi \cdot 85}} = 19{,}7 \text{ mm}$$

Všetky vypočítané priemery sú informatívne. Na konštrukciu skutočného hriadeľa treba k týmto priemerom prirátať napr. hĺbky drážok pre perá, drážkovanie a pod. a tieto rozmery upraviť tak, ako to určuje STN.

Zhrnutie:

Hriadele namáhané ohybom a krútením sa rátajú na základe piatej teórie pevnosti podľa vzťahu:

$$M_{o\,red} = \sqrt{M_o^2 + 0{,}75 \cdot \left(\alpha_B \cdot M_k\right)^2}$$

Na výpočet priemeru hriadeľa v danom mieste musíme poznať veľkosť ohybového a krútiaceho momentu a to, akým spôsobom zaťažuje krútiaci moment hriadeľ (statickým, miznúcim alebo striedavým spôsobom).

KONTROLNÉ OTÁZKY:

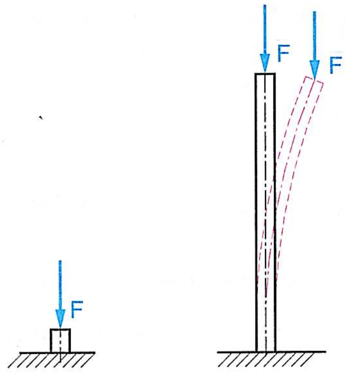
1. Aký je význam redukovaného ohybového momentu pri namáhaní hybného hriadeľa zaťaženého ohybom a krútením?
2. Možno vyrátať redukovaný ohybový moment pre iné ako kruhové prierezy?

10 NAMÁHANIE NA VZPER

10.1 ZÁKLADNÉ POJMY

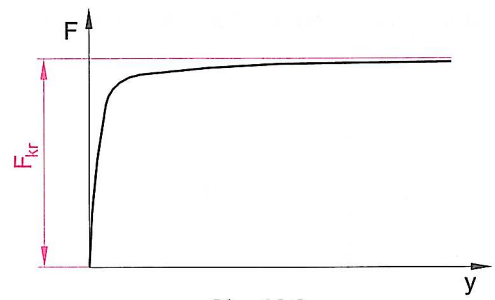
V doterajších výpočtoch sme navrhovali rozmery súčiastok, alebo kontrolovali zaťaženia s ohľadom na pevnosť materiálu alebo na deformáciu súčiastky. Deformácia pritom nesmela prekročiť oblasť platnosti Hookovho zákona. Vo všetkých prípadoch išlo o stabilný rovnovážny stav. Vyskytujú sa však prípady, keď je súčiastka, prípadne celá konštrukcia v labilnom – nerovnovážnom stave. To znamená, že súčiastka sa neporuší z dôvodu prekročenia dovoleného napätia, ale pre svoju počiatočnú labilitu.

Porovnajme dva prípady z *obr. 10.1*. Obidva prúty majú rovnaký prierez, sú z rovnakého materiálu a sú zaťažené rovnakou osovou silou. V prvom prípade sa súčiastka deformuje, ak zaťažujúca sila vyvolá také napätie, ktoré prekročí medzu pružnosti. Tento stav je stabilný. V druhom prípade na vznik trvalej deformácie nie je potrebná taká veľká sila.



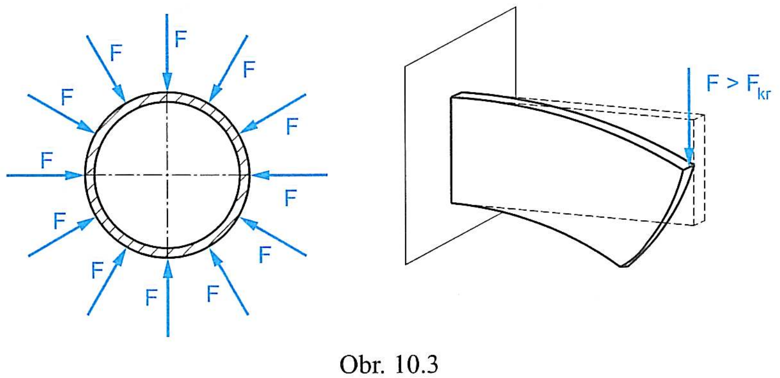
Obr. 10.1

Urobme nasledujúci pokus. Trvalo zaťažme štíhly prút malou osovou silou. Prút je stláčaný v smere osi a pri malom zaťažení zostane priamy. Takto zaťažený prút vychýlime zo stabilnej polohy nejakou malou priečnou silou. Pôsobením tejto sily sa prút vychýli z priameho smeru, ale po odstránení priečnej sily sa prút vráti do pôvodnej polohy. Pokus budeme opakovať s tým, že zvyšujeme trvalé osové zaťaženie prútu. Pri určitej veľkosti osovej sily zistíme, že po odstránení osovej sily prút už nie je schopný vrátiť sa do pôvodnej polohy. Stabilná rovnováha sa zmenila na indiferentnú rovnováhu, to znamená, že prút je v rovnováhe v každom ohnutom stave. Takejto osovej sile hovoríme *kritická sila* na medzi vzpernej pevnosti a označujeme ju F_{kr}. Pokiaľ kritickú silu neprekročíme, vonkajšie aj vnútorné sily zostávajú v rovnováhe. Po prekročení kritickej sily rastie deformácia teoreticky bez obmedzenia, až dôjde k poruche. Krehký materiál sa zlomí a húževnatý sa zohne. Ak by sme znázornili priebeh osovej sily a priehyb do diagramu, zistili by sme, že priehyb začína už pri malých silách, aj keď jeho rast je veľmi pomalý, pokiaľ je osová sila hlboko pod hodnotou kritickej sily. Ak sa veľkosť osovej sily priblíži hodnote kritickej sily, priehyb rastie veľmi rýchlo. Z toho vyplýva, že osová sila, ktorá je blízka kritickej sile nemá praktické uplatnenie. Najväčšia zaťažujúca sila musí byť preto menšia.



Obr. 10.2

Nestabilné stavy sa vyskytujú napríklad aj pri zaťažení tenkostennej rúrky rovnomerne rozloženým tlakom po obvode alebo pri namáhaní votknutého nosníka s veľkým pomerom $\frac{h}{b}$.



Obr. 10.3

Ďalej sa budeme zaoberať iba vzperom priamych prútov.

Zhrnutie:

Pri výpočte a kontrole súčiastok na základné druhy namáhania a pri vzájomnej kombinácii jednotlivých druhov namáhaní sa súčiastky rátajú vzhľadom na pevnosť materiálu, z ktorého sú vyrobené alebo vzhľadom na dovolenú deformáciu, ktorú nesmú pri danom zaťažení prekročiť. Pri dlhých a štíhlych súčiastkach či konštrukciách dochádza k porušeniu stability súčiastky a z toho vyplývajúcej poruche. Silu, ktorá tvorí hranicu medzi stabilným a nestabilným stavom nazývame kritickou silou na medzi vzpernej pevnosti.

KONTROLNÉ OTÁZKY:

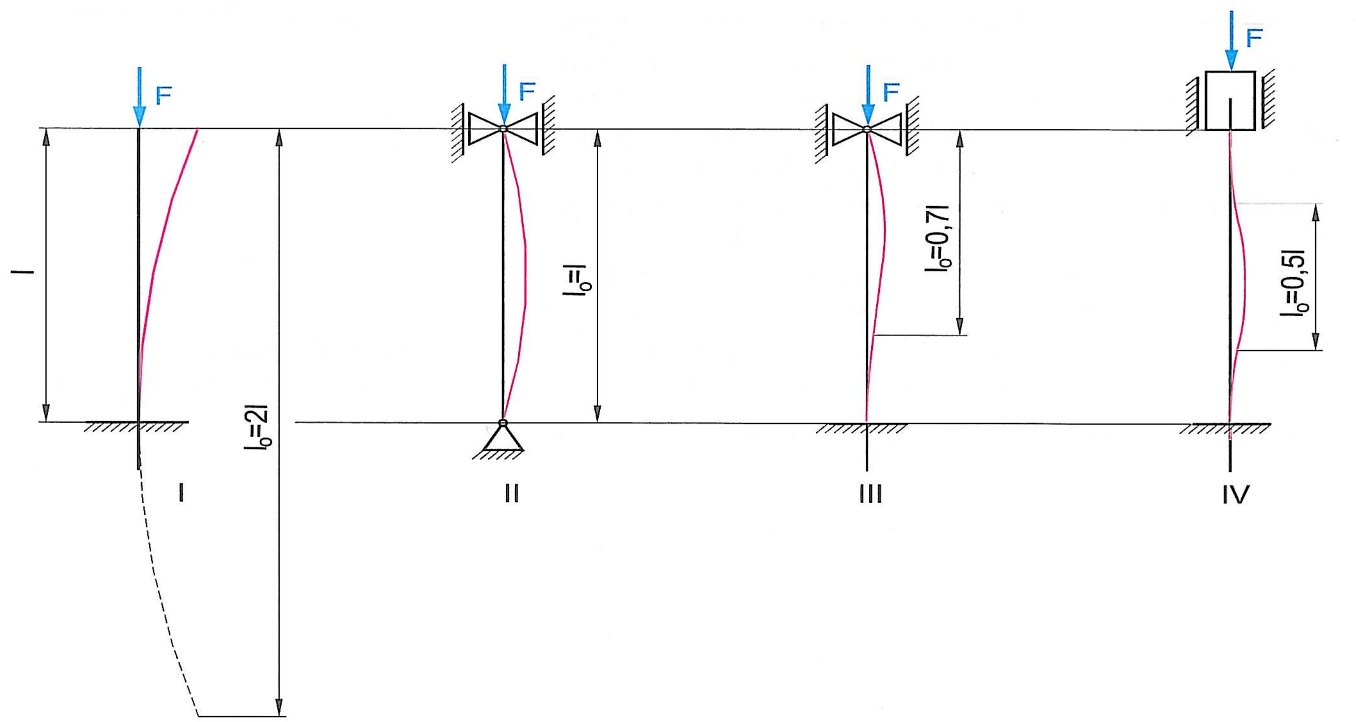
1. Ako sa zásadne líši vzper od ostatných druhov namáhania?
2. Ako sa správa prút namáhaný na vzper pri stabilnom, indiferentnom a nestabilnom stave?
3. Čo je kritická sila?
4. Uveďte príklady nestability tenkostenných súčiastok.

10.2 PRUŽNÝ VZPER

Veľkosť kritickej sily je:

1. nepriamoúmerne závislá od druhej mocniny dĺžky prútu,
2. priamoúmerne závislá od modulu pružnosti,
3. priamoúmerne závislá od veľkosti kvadratického momentu prierezu.

Okrem toho veľkosť kritickej sily je závislá od spôsobu uloženia koncov prútov. Existujú štyri spôsoby uloženia koncov prútov tak, ako je to znázornené na *obr. 10.4*.



Obr. 10.4

Eulerove rovnice

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{4 \cdot l^2} \qquad F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{l^2} \qquad F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{0,5 \cdot l^2} \qquad F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{0,25 \cdot l^2}$$

Teóriu o pružnej oblasti vzperu vytvoril L. Euler a podľa neho sú pomenované aj výpočtové rovnice. Z Eulerových rovníc pre jednotlivé prípady uloženia prúta vyplýva:

- veľkosť kritickej sily nezávisí od pevnosti materiálu, ale iba od jeho modulu pružnosti,
- zväčšovanie kritickej sily je možné iba zväčšovaním kvadratického momentu prierezu, čo pri rovnakej prierezovej ploche znamená rozloženie materiálu čo najďalej od neutrálnej osi. V prírode sú steblá tráv duté a duté sú aj kosti živočíchov,
- prút, ktorý nemá symetrický prierez, vybočí pri namáhaní v smere, v ktorom mu bude kladený najmenší odpor. Je to kolmo na os najmenšieho kvadratického momentu. Preto sa vo výpočtoch uvádza minimálny kvadratický moment prierezu J_{min}.

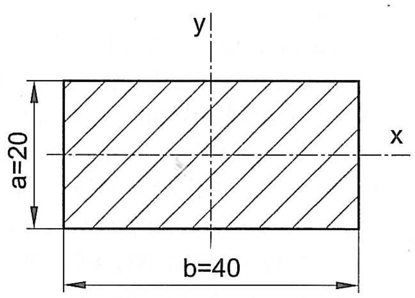
Vzťahy pre jednotlivé prípady sa dajú zredukovať do jedného vzťahu zavedením pojmu redukovanej dĺžky prúta.

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{l_0^2}$$

Redukovaná dĺžka l_0 znamená dĺžku sínusovej polvlny ohybovej čiary. Redukované dĺžky a ich vzťah k účinným dĺžkam sú pre jednotlivé prípady vzperu uvedené na *obr. 10.4.*

PRÍKLAD

Vypočítajte veľkosti kritických síl oceľových prútov pre jednotlivé prípady vzperu, ktorých účinná dĺžka je l = 1 500 mm a ich prierez je podľa *obr. 10.5.*



Obr. 10.5

Riešenie:

Kritickú silu vypočítame pre jednotlivé prípady vzperu. Rozdiel je iba vo veľkosti redukovanej dĺžky l_0. Musíme zároveň vedieť aj veľkosť minimálneho kvadratického momentu prierezu J_{min}.

$$J_{min} = \frac{a^3 \cdot b}{12}$$

$$J_{min} = \frac{20^3 \cdot 40}{12} = 26\,667 \text{ mm}^4$$

Kritickú silu vypočítame zo vzťahu:

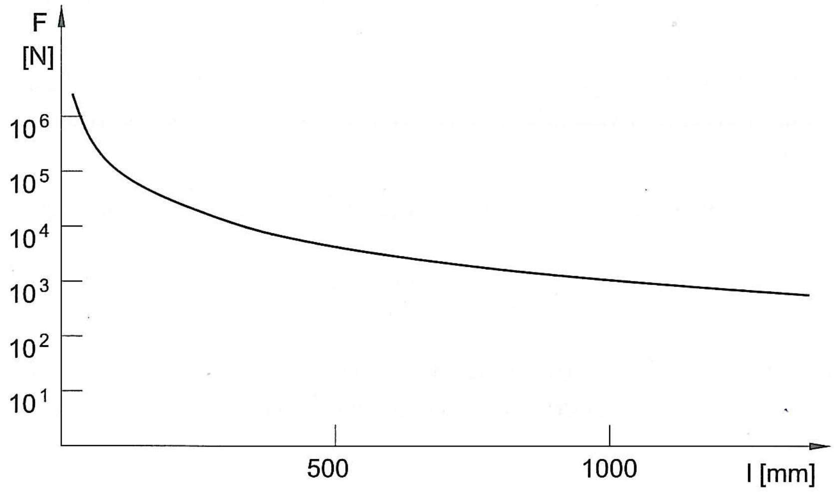
$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{l_0^2}$$

Pre prvý prípad vzperu	$l_0 = 2 \cdot l$	sa $F_{kr} = 6\,141$ N,
pre druhý prípad vzperu	$l_0 = l$	sa $F_{kr} = 24\,565$ N,
pre tretí prípad vzperu	$l_0 = \frac{l}{\sqrt{2}}$	sa $F_{kr} = 49\,129$ N,
pre štvrtý prípad vzperu	$l_0 = \frac{l}{2}$	sa $F_{kr} = 98\,259$ N.

Z uvedených výsledkov vidieť, že kritická sila IV. prípadu je až 16-násobne väčšia ako v prvom prípade. Preto treba konkrétnemu výberu prípadu vzperu venovať veľkú pozornosť.

10.3 OBLASŤ PLATNOSTI EULEROVEJ ROVNICE

Počítajme veľkosť kritickej sily podľa Eulerovej rovnice, napr. pre druhý prípad vzperu. Uvažujme pritom, že prierez prútu ani materiál sa nebude meniť. Meniť sa bude iba dĺžka prúta. Z vypočítaných hodnôt urobme grafickú závislosť, ktorej priebeh vidíme na *obr. 10.6.*



Obr. 10.6

Krivka, ktorú sme takto zostrojili sa nazýva Eulerova hyperbola. Z grafu vidieť, že pri veľmi dlhých prútoch je kritická sila veľmi malá a so zväčšujúcou sa dĺžkou sa blíži k nule. Naopak, veľmi krátke prúty majú kritickú silu veľmi veľkú a to do tej miery, že sa prekračuje medza pevnosti materiálu ešte pred dosiahnutím kritickej sily F_{kr}. To viedlo v minulosti často k deformácii konštrukcií. Praktické uplatnenie je teda medzi týmito extrémnymi prípadmi. Dôležitejšie ako poznanie maximálnej dĺžky prútu, pri ktorej sa končí platnosť Eulerovej rovnice, je poznanie jej minimálnej dĺžky, pri ktorej sa platnosť rovnice začína. Pri hľadaní tejto hranice vychádzame z predpokladu platnosti Hookovho zákona. To znamená, že nesmieme prekročiť medzu úmernosti σ_U. Vychádzame pritom z kritického napätia σ_{kr}, ktoré má ten istý význam ako medza pevnosti pri jednoduchom tlaku. Musí pritom platiť podmienka, že kritické napätie nesmie prekročiť hodnotu napätia na medzi úmernosti

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{S} \leq \sigma_U$$

Po dosadení za F_{kr} dostaneme:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{l_0^2 \cdot S}$$

Odmocninu z podielu

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{S}}$$

nazývame polomer kvadratického momentu prierezu a jeho hodnota predstavuje vzdialenosť nekonečne úzkeho pásika, ktorého kvadratický moment k danej osi je rovnaký ako kvadratický moment pôvodnej plochy.

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\dfrac{l_0}{i_{min}}\right)^2}$$

Výraz v menovateli sa nazýva štíhlosť prúta

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{min}}$$

Zo vzťahu vyplýva, že čím je väčšia hodnota λ, tým je prút štíhlejší. Pre kritické napätie dostaneme vzťah:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

Pre okrajovú podmienku platnosti Hookovho zákona platí rovnosť:

$$\sigma_{kr} = \sigma_U$$

Po dosadení a úprave môžeme vypočítať veľkosť štíhlosti prúta λ, od ktorého začína platnosť Eulerovej rovnice:

$$\lambda = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_U}} \geq \lambda_m$$

Kritické napätie závisí iba od E a σ_U. Štíhlosť prúta, pri ktorej začína platnosť Eulerovej rovnice λ_m nazývame medznou štíhlosťou. Medzné štíhlosti nájdeme pre rôzne materiály v strojníckych tabuľkách. Pre uhlíkové ocele je $\lambda_m = 90 \div 105$.

Poznámka:

Napriek tomu, že niektoré materiály (drevo, betón, liatina ...) sa neriadia Hookovým zákonom, aj tieto majú určenú medznú štíhlosť.

Zhrnutie:

V oblasti pružného vzperu počítame podľa Eulerovej rovnice: $F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{l_0^2}$

Eulerovu rovnicu môžeme použiť vtedy, ak skutočná štíhlosť prútu je väčšia ako medzná štíhlosť pre daný materiál.

KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Prečo má Eulerova rovnica obmedzenú platnosť?
2. Ako je definované kritické napätie vo vzpere?
3. Čo je to polomer kvadratického momentu prierezu?
4. Ako vypočítame štíhlosť prútu?
5. Čo predstavuje medzná štíhlosť a od čoho závisí?

PRÍKLAD

Zistite, či je možné počítať kritickú sily z Eulerovej rovnice pre prút v tvare rúrky s priemerom $D = 25$ mm a hrúbkou steny $s = 2{,}5$ mm, ak je činná dĺžka rúrky $l = 1\,000$ mm. Rúrka je vyrobená z ocele označenej podľa EN 1027-1 S235JRG1 (pôvodné označenie podľa STN 11 373). Kontrolu urobte pre všetky prípady vzperu.

Riešenie:

Ak chceme použiť Eulerovu rovnicu na výpočet kritickej sily, musí platiť:

$$\lambda_{skut} \geq \lambda_m = (90 \div 105)$$

$$\lambda_{skut} = \frac{l_0}{i_{min}}$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{S}}$$

$$J_{min} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$$

$$S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$$

Po úprave dostaneme:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{16}}$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{25^2 + 20^2}{16}} = 8 \text{ mm}$$

Pre prvý prípad vzperu platí: $l_0 = 2 \cdot l$

$$\lambda_{\text{skut}} = \frac{2 \cdot l}{i_{\min}}$$

$$\lambda_{\text{skut}} = \frac{2 \cdot 1000}{8} = 250 > \lambda_{\text{m}}$$

Pre druhý prípad vzperu platí: $l_0 = l$

$$\lambda_{\text{skut}} = \frac{l}{i_{\min}}$$

$$\lambda_{\text{skut}} = \frac{1000}{8} = 125 > \lambda_{\text{m}}$$

Pre tretí prípad vzperu platí: $l_0 = \frac{l}{\sqrt{2}}$

$$\lambda_{\text{skut}} = \frac{l}{\sqrt{2} \cdot i_{\min}}$$

$$\lambda_{\text{skut}} = \frac{1000}{\sqrt{2} \cdot 8} = 88,4 < \lambda_{\text{m}}$$

Pre štvrtý prípad vzperu platí: $l_0 = \frac{l}{2}$

$$\lambda_{\text{skut}} = \frac{l}{2 \cdot i_{\min}}$$

$$\lambda_{\text{skut}} = \frac{1000}{2 \cdot 8} = 62,5 < \lambda_{\text{m}}$$

Pre I. a II. prípad vzperu môžeme použiť Eulerovu rovnicu, ale pre III. a IV. prípad ju nemôžeme použiť.

Pri výpočte veľkosti skutočného zaťaženia prúta na vzper nemôžeme rátať s kritickou silou ako s maximálnym zaťažením prútu. Hodnota zaťaženia musí byť podstatne nižšia. Skutočná sila je:

$$F = \frac{F_{\text{kr}}}{k}$$

kde k je súčiniteľ bezpečnosti.

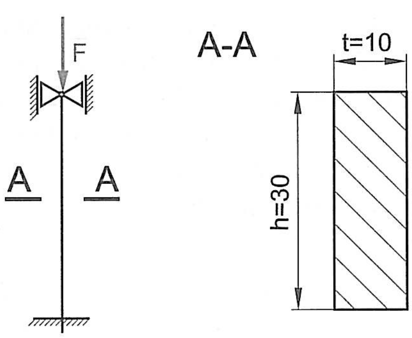
Hodnoty k volíme v rozsahoch:

Ojnice spaľovacích motorov	$k = 7$ až 10
Ojnice piestových čerpadiel	$k = 20$ až 40
Prútové konštrukcie	$k = 2$ až 3
Liatinové prútové konštrukcie	$k = 5$ až 6
Drevené prútové konštrukcie	$k = 2,5$ až 8

Tieto hodnoty sú informatívne. Ak pre voľbu súčiniteľa bezpečnosti platia normatívy, treba počítať podľa nich.

PRÍKLAD

Akou silou je možné zaťažiť oceľový prút obdĺžnikového prierezu s dĺžkou $l = 500$ mm podľa *obr. 10.7* ak počítame so súčiniteľom bezpečnosti $k = 3$.



Obr. 10.7

Riešenie:

Najskôr musíme zistiť, či môžeme použiť Eulerovu rovnicu. Pretože ide o III. prípad vzperu, platí:

$$\lambda_{skut} = \frac{l}{\sqrt{2} \cdot i_{min}}$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{S}}$$

$$J_{min} = \frac{t^3 \cdot h}{12}$$

$$J_{min} = \frac{10^3 \cdot 30}{12} = 2500 \text{ mm}^4$$

$$S = h \cdot t$$

$$S = 30 \cdot 10 = 300 \text{ mm}^4$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{2500}{300}} = 2,887 \text{ mm}$$

$$\lambda_{skut} = \frac{500}{\sqrt{2} \cdot 2,887} = 122,5$$

Pretože platí $\lambda_{skut} > \lambda_m$, môžeme použiť Eulerovu rovnicu.

$$F = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{k \cdot l_0^2}$$

$$F = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot t^3 \cdot h}{12 \cdot k \cdot \left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$F = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 30}{12 \cdot 2 \cdot \left(\frac{500}{\sqrt{2}}\right)^2} = 20\,726 \text{ N}$$

Oceľový prút môžeme zaťažiť maximálnou silou 20 723 N.

10.4 OBLASŤ NEPRUŽNÉHO VZPERU

Pre menšie štíhlosti prútov ako je medzná štíhlosť λ_m nemôžeme použiť Eulerovu rovnicu, pretože by kritické napätie v prúte σ_{kr} prekročilo hodnotu σ_U, čím by sa prekročila oblasť platnosti Hookovho zákona. Na výpočet kritického napätia pri týchto prútoch boli vypracované viaceré teórie, z ktorých sa u nás najčastejšie používa výpočet podľa Tetmajera. Výpočet sa zakladá na nahradení Eulerovej hyperboly v tejto oblasti priamkou (s výnimkou liatiny, pri ktorej je nahradená parabolou).

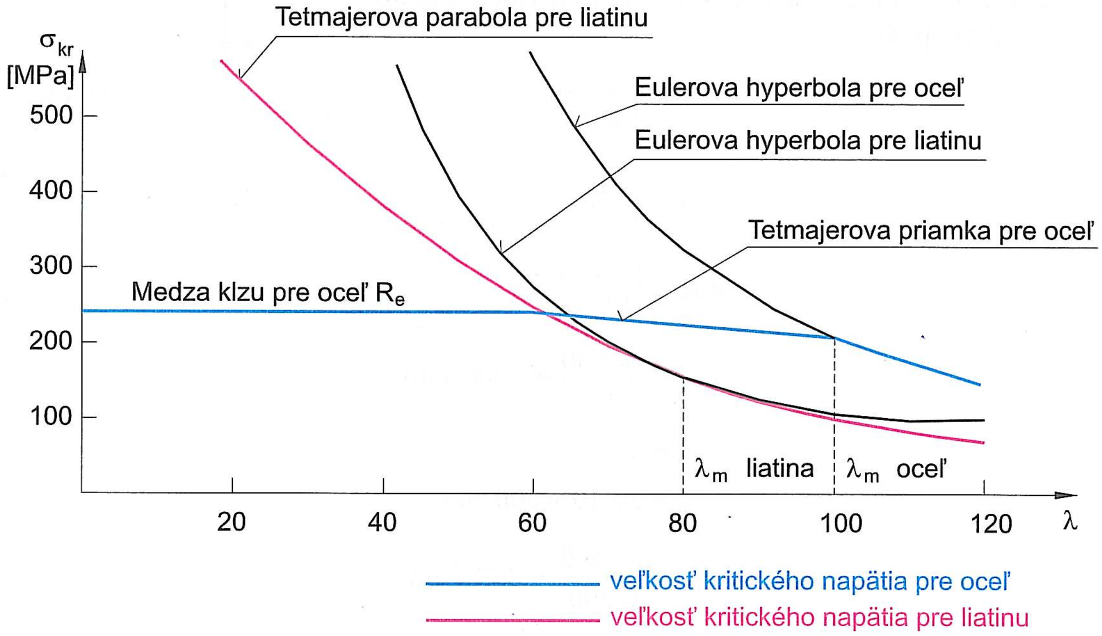
Vo všeobecnosti môžeme rovnicu na výpočet kritického napätia v tejto oblasti počítať podľa rovníc:

$$\sigma_{kr} = a - b \cdot \lambda$$

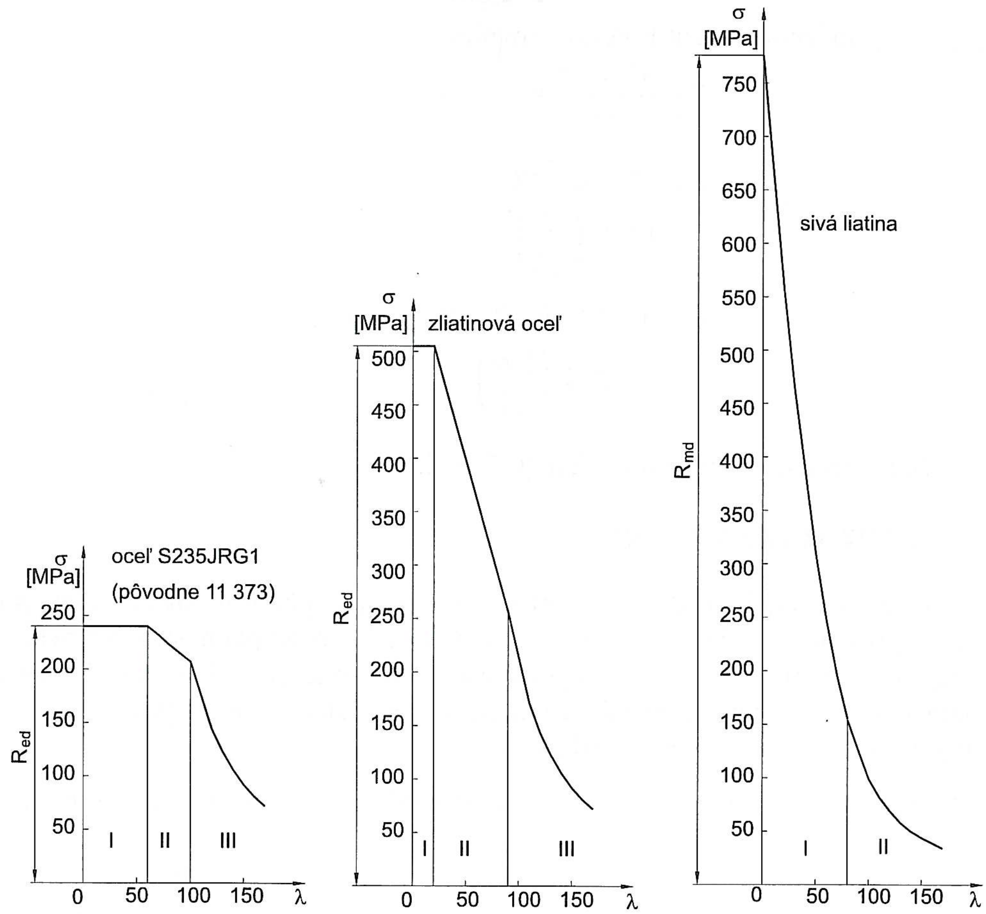
a pre liatinu

$$\sigma_{kr} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2$$

kde *a, b, c* sú materiálové konštanty. Pre vybrané druhy materiálov nájdeme rovnice na výpočet kritického napätia v strojníckych tabuľkách. Je len samozrejmé, že kritické napätie nesmie prekročiť napätie na medzi klzu v tlaku R_{ed}. Z tohto dôvodu je platnosť Tetmajerových rovníc obmedzená hornou a dolnou hodnotou štíhlosti prúta. Ak je štíhlosť prúta menšia ako dolná hodnota potrebná na výpočet podľa Tetmajera, prút nepočítame na vzper, ale robíme výpočet na jednoduchý tlak. Na *obr. 10.9* vidieť závislosť medzi kritickým napätím σ_{kr} a štíhlosťou pre tri rôzne materiály. Kritické napätie predstavuje hraničnú hodnotu napätia, za ktorou dochádza k trvalej deformácii materiálu



Obr. 10.8



Obr. 10.9

Pri oceliach sú zrejmé z diagramu tri oblasti:

I. oblasť – je to oblasť veľmi krátkych prútov. V tejto oblasti kontrolujeme prúty na tlak, pretože k trvalej deformácii stlačením dôjde skôr ako k porušeniu stability – vybočením.

II. oblasť – v tejto oblasti dochádza k trvalej deformácii vplyvom vybočenia. Napätie v niektorých vláknach však prekračuje medzu úmernosti. V tejto oblasti rátame kritickú silu F_{kr} z kritického napätia σ_{kr}, ktoré vypočítame z Tetmajerových rovníc.

III. oblasť – je to oblasť pružného vzperu a platí pre veľmi štíhle prúty. V tejto oblasti dochádza k deformácii vplyvom straty stability, pričom napätie v prúte je menšie ako medza úmernosti σ_U. Kritickú silu F_{kr} a kritické napätie počítame podľa Eulera.

Pre liatinu rozoznávame iba dve oblasti:

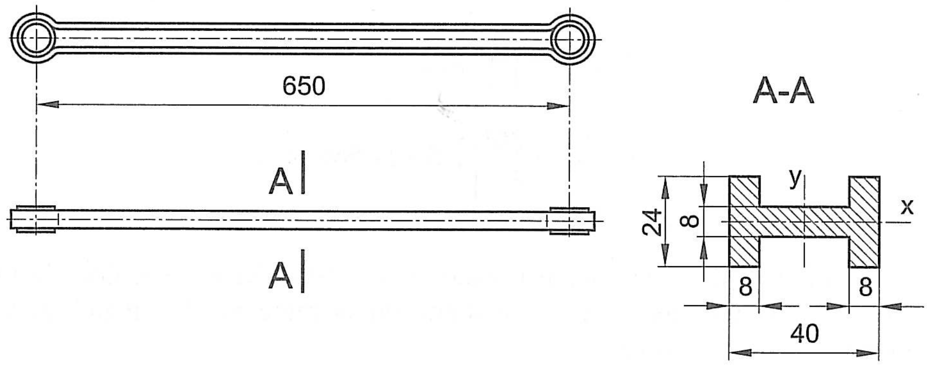
I. oblasť – oblasť nepružného vzperu,

II. oblasť – oblasť pružného vzperu.

A to preto, lebo liatina má hodnoty dovoleného tlaku vyššie ako hodnoty dovoleného ťahu.

PRÍKLAD

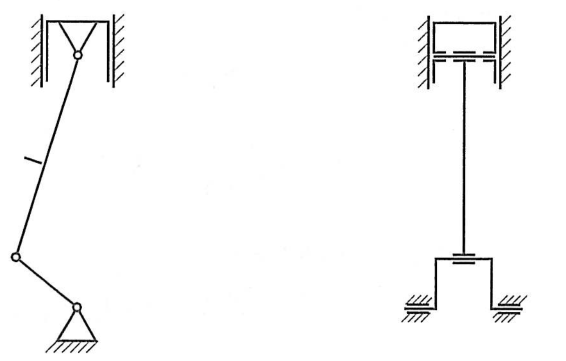
S akou bezpečnosťou treba rátať pri návrhu ojnice kľukového mechanizmu spaľovacieho motora z materiálu podľa EN 1027-1 E295 (pôvodne 11 500), ktorej dĺžka je l = 650 mm s prierezom podľa *obr. 10.10*. Priemer piesta je D = 80 mm a maximálny pretlak p_{max} = 2,5 MPa.



Obr. 10.10

Rozbor:

Výpočet musíme robiť dvakrát. Prvýkrát pre rovinu kyvu, kde je uloženie ojnice podľa II. prípadu vzperu a druhýkrát v kolmej rovine, teda v osi y, kde teoreticky ide o IV. prípad vzperu s obojstranne votknutým uložením.



Obr. 10.11

V uložení musia byť určité vôle, preto sa viac priblížime k skutočnosti, ak budeme uvažovať o III. prípade vzperu, čo vedie k menšej hodnote súčiniteľa bezpečnosti.

1. Výpočet kvadratického momentu prierezu k osi y J_y a prierezu ojnice:

$$J_y = \frac{24 \cdot 40^3 - 16 \cdot 24^3}{12} = 109\,568 \text{ mm}^4$$

$$S = 40 \cdot 24 - 16 \cdot 24 = 576 \text{ mm}^2$$

2. Výpočet štíhlosti prúta pre rovinu kyvu:

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{S}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{109568}{576}} = 13{,}79 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{l}{i_y}$$

$$\lambda = \frac{650}{13{,}79} = 47{,}14$$

Skutočná štíhlosť $\lambda = 47{,}14 < \lambda_m = 90$.

3. Výpočet maximálnej sily

$$F_{max} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot p_{max}$$

$$F_{max} = \frac{\pi \cdot 80^2}{4} \cdot 2{,}5 = 12\,566 \text{ N}$$

4. Výpočet kritickej sily v rovine kyvu.

Skutočná štíhlosť prútu je mimo rozsah platnosti Eulerovej aj Tetmajerovej rovnice. Preto výpočet musíme urobiť podľa výpočtovej rovnice pre tlak. Takto vypočítanú silu môžeme považovať za kritickú F_{kr1} vtedy, ak za napätie dosadíme hodnotu na medzi klzu R_e.

$$R_e = \frac{F_{kr1}}{S}$$

$$F_{kr1} = R_e \cdot S$$

Pre daný materiál sa $R_e = 295$ MPa

$$F_{kr1} = 295 \cdot 576 = 169\,920 \text{ N}$$

5. Súčiniteľ bezpečnosti k_v v rovine kyvu:

$$k_v = \frac{F_{kr1}}{F_{max}}$$

$$k_v = \frac{169\,920}{12\,566} = 13{,}52$$

6. Výpočet kvadratického momentu prierezu k osi x J_x:

$$J_x = \frac{2 \cdot 8 \cdot 24^3 + 24 \cdot 8^3}{12} = 19\,456 \text{ mm}^4$$

7. Štíhlosť prúta pre rovinu kolmú na rovinu kyvu:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{S}}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{19\,456}{576}} = 5{,}81 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{2} \cdot i_x}$$

$$\lambda = \frac{650}{\sqrt{2} \cdot 5{,}81} = 79{,}11$$

8. Výpočet kritickej sily kolmej na rovinu kyvu:

Podľa skutočnej štíhlosti prútu musíme použiť pre výpočet kritickej sily v tejto rovine rovnicu podľa Tetmajera. Pre materiál E295 (pôvodne 11 500) je:

$$\sigma_{kr} = 355 - 0{,}62 \cdot \lambda$$

$$\sigma_{kr} = 355 - 0{,}62 \cdot 79{,}11 = 305{,}95 \text{ MPa}$$

Kritická sila:

$$F_{kr2} = \sigma_{kr} \cdot S$$

$$F_{kr2} = 305{,}95 \cdot 576 = 176\,228 \text{ N}$$

9. Súčiniteľ bezpečnosti v rovine kolmej na rovinu kyvu:

$$k_k = \frac{F_{kr2}}{F_{max}}$$

$$k_k = \frac{176\,228}{12\,566} = 14{,}02$$

Ak porovnáme vyrátané hodnoty s dovolenými hodnotami, zistíme, že ojnica je navrhnutá správne, pretože pre spaľovacie motory je súčiniteľ bezpečnosti v rozsahu $k = 7$ až 10.

Zhrnutie:

Ak je štíhlosť prúta menšia ako medzná štíhlosť pre materiál, z ktorého je prút vyrobený, dostávame sa do oblasti nepružného vzperu a musíme uplatniť výpočet podľa Tetmajerových rovníc. Platnosť rovníc je obmedzená aj najmenšou štíhlosťou. V prípade, že štíhlosť nedosahuje minimálnu hodnotu, prút počítame na jednoduchý tlak.

KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Ako postupujeme pri kontrolnom výpočte prútov na vzper?
2. Podľa čoho posudzujeme, ktorý spôsob výpočtu použijeme?
3. Aký je rozdiel medzi oceľou a liatinou pri namáhaní vzperom?
4. Prečo sú pre jednotlivé materiály rôzne rovnice v oblasti nepružného vzperu?
5. Ako počítame prúty, ktorých štíhlosti sú menšie ako je hranica pre uplatnenie Tetmajerových rovníc?

10.5 VÝPOČET POMOCOU SÚČINITEĽA VZPERNOSTI

V bežných konštrukciách počítame prúty namáhané na vzper podľa Eulera alebo Tetmajera. Pre prútové konštrukcie predpisuje STN 73 1401 výpočet na vzperovú pevnosť pomocou súčiniteľa vzpernosti φ. Podstata výpočtu je v tom, že výpočet prúta (konštrukcie) namáhaného vzperom sa robí tak, akoby bol prút namáhaný na tlak, ale veľkosť základnej výpočtovej pevnosti R_d sa zníži vynásobením súčiniteľom vzpernosti:

$$\frac{F_n}{S} \leq \varphi \cdot R_d$$

kde F_n – je extrémna osová sila,
S – plocha prierezu,
φ – súčiniteľ vzpernosti.

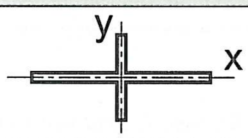
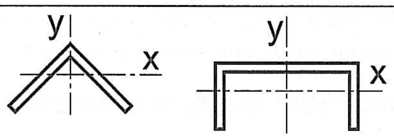
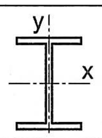
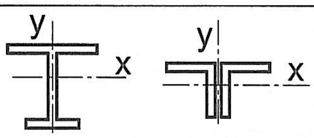
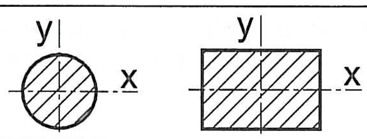
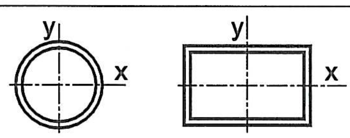
Norma predpisuje aj druhy materiálov, ktoré je možné pri danom výpočte použiť. Sú to hlavne ocele pevnostnej triedy 37, 42 a 52, pre ktoré sú uvedené základné výpočtové pevnosti.

Základná výpočtová pevnosť R_d [MPa] *Tabuľka 10.1*

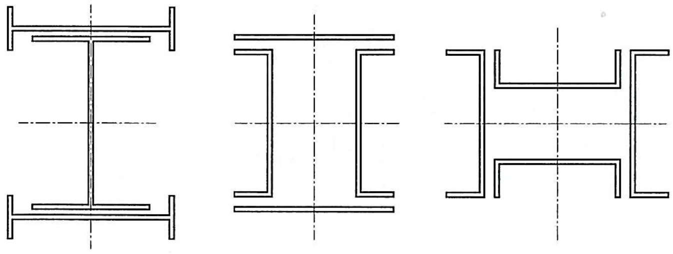
PEVNOSTNÁ TRIEDA OCELÍ	34	35 a 37		47		55, 52 a 48	
Hrúbka steny [mm]	do 25	do 25	26 až 60	do 25	26 až 60	do 25	26 až 60
Základná výpočtová pevnosť R_d [MPa]	190	210	200	250	240	290	280

Súčiniteľ vzpernosti φ sa volí podľa štíhlosti prúta λ, ktorý vyjadruje vplyv tvaru a podmienok uloženia prúta na jeho stabilitu. Vhodné prierezy a ich priradenie k súčiniteľom vzpernosti sú v *tab. 10.2*. Veľkosť štíhlosti je obmedzená a nemajú sa požívať vyššie štíhlosti ako 250. Pri výpočte pomocou súčiniteľa vzpernosti neroz-

Priradenie prierezov k súčiniteľom vzpernosti *Tabuľka 10.2*

PRIEREZ	SÚČINITEĽ VZPERNOSTI PRE ŠTÍHLOSŤ	
	λ_x	λ_y
	BC	
	B	B, C
	B	
	B	B, C
	A	
	B	

lišujeme oblasť pružného a nepružného vzperu. Pre štíhlosti nižšie ako 20 sa prúty počítajú na tlak. Výpočet pomocou súčiniteľa vzpernosti sa považuje iba za kontrolný výpočet, pretože prierez prútu musíme navrhnúť vopred. S výhodou sa používajú prúty so zložených profilov, ktoré sú navzájom zvarené alebo znitované a majú k obom osiam rovnaký kvadratický moment prierezu. Môžeme s nimi počítať ako s celistvým prierezom. Ak sú takéto profily spojené priečkami je ich výpočet podstatne zložitejší a musí sa riadiť príslušnou normou.



Obr. 10.12

Súčinitele vzpernosti φ *Tabuľka 10.3*

<table>
<tr><td>$\lambda\cdot\sqrt{\frac{R_d}{210}}$</td><td>20</td><td>40</td><td>60</td><td>80</td><td>100</td><td>120</td><td>140</td><td>160</td><td>180</td><td>200</td><td>220</td><td>250</td></tr>
<tr><td>A</td><td rowspan="2">0,99</td><td>0,96</td><td>0,90</td><td>0,77</td><td>0,60</td><td>0,46</td><td>0,35</td><td>0,27</td><td>0,22</td><td>0,18</td><td>0,15</td><td>0,12</td></tr>
<tr><td>B</td><td>0,94</td><td>0,94</td><td>0,71</td><td>0,55</td><td>0,42</td><td rowspan="2">0,32</td><td rowspan="2">0,25</td><td rowspan="2">0,20</td><td rowspan="2">0,17</td><td rowspan="2">0,14</td><td rowspan="2">0,11</td></tr>
<tr><td>C</td><td>0,90</td><td>0,80</td><td>0,80</td><td>0,60</td><td>0,50</td><td>0,40</td></tr>
</table>

kde A, B, C sú typy prierezov podľa *tab. 10.2*.

Poznámka:

Hodnoty súčiniteľa vzpernosti uvádzané v strojníckych tabuľkách majú vyššiu hodnotu ako 1. Tieto hodnoty je možné nájsť aj v staršej literatúre. V tomto prípade rátame so zaťažujúcou silou vynásobenou súčiniteľom vzpernosti, ktorý je v tomto prípade označený písmenom c. Súčiniteľ vzpernosti uvažujeme ako pomer dovoleného napätia v tlaku σ_{Dd} ***k dovolenému napätiu vo vzpere*** σ_{Dv}***:***

$$c = \frac{\sigma_{Dd}}{\sigma_{Dv}}$$

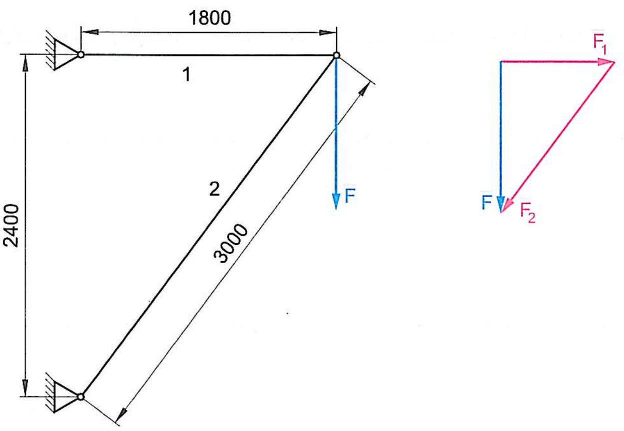
$$\sigma_{Dv} = \frac{F}{S} = \frac{\sigma_{Dd}}{c} \le \sigma_{Dv}$$

Potom:

$$F \cdot c \le S \cdot \sigma_{Dd}$$

PRÍKLAD

Skontrolujte vzperu č. 2 na konzole podľa *obr. 10.13* z materiálu podľa EN 1027-1 S355J (pôvodne 11 523), ak veľkosť zaťažujúcej sily $F = 1{,}2 \cdot 10^5$ N. Vzpera je z profilu I 200. Počítajte s II. prípadom vzperu. Výpočet robte pomocou súčiniteľa vzpernosti.



Obr. 10.13

Riešenie:

Najskôr musíme vypočítať akou silou je vzpera 2 zaťažená. Grafickým riešením sme zistili veľkosť osovej sily v prúte $F_2 = 1{,}5 \cdot 10^5$ N.

1. Štíhlosť prúta

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}}$$

V strojníckych tabuľkách nájdeme pre daný profil $i_{\min} = 18{,}7$ mm.

$$\lambda = \frac{3\,000}{18{,}7} = 160{,}4$$

2. Súčiniteľ vzpernosti je

a) pre daný materiál, nájdeme v *tab. 10.1* hodnotu $R_d = 290$ MPa,
b) prierez B,
c) štíhlosť $\lambda = 160{,}4$,
d) pre $\lambda \cdot \sqrt{\dfrac{R_d}{210}} = 160{,}4 \cdot \sqrt{\dfrac{290}{210}} = 188{,}5.$

V *tab. 10.3* je najbližšia vyššia hodnota 200. V tej istej tabuľke nájdeme hodnotu súčiniteľa vzpernosti $\varphi = 0{,}17$.

3. Maximálna sila F_n

$$\frac{F_n}{S} \leq \varphi \cdot R_d$$

Prierez profilu I 200 je uvedený v strojníckych tabuľkách:

$$S = 3\,350 \text{ mm}^2$$

$$F_n \leq \varphi \cdot S \cdot R_d$$

$$F_n \leq 0{,}17 \cdot 3\,350 \cdot 290 = 165\,155 \text{ N}$$

Pretože zaťažujúca sila $F_2 = 1{,}5 \cdot 10^5$ N je menšia ako extrémna osová sila $F_n = 1{,}65 \cdot 10^5$ N, navrhnutý profil vyhovuje.

Zhrnutie:

Pre prútové sústavy a priehradové konštrukcie predpisuje norma STN 73 1401 výpočet pomocou súčiniteľa vzpernosti. Podstata výpočtu je v počítaní prútov namáhaných na vzper pomocou namáhania v tlaku, pričom sa nerozlišuje oblasť pružného a nepružného vzperu. Tento výpočet sa nesmie použiť pre strojnícke súčiastky, pri ktorých je súčiniteľ bezpečnosti oveľa vyšší ako sa predpokladá v uvedenom výpočte.

KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. V čom je podstata výpočtu pomocou súčiniteľa vzpernosti?
2. Môžeme použiť ľubovoľný materiál pri uplatnení výpočtu súčiniteľom vzpernosti?
3. Od čoho závisí súčiniteľ vzpernosti?

11 CYKLICKÉ NAMÁHANIE, ÚNAVA KOVOV A TVAROVÁ PEVNOSŤ

MECHANIKA

11.1 ZÁKLADNÉ POJMY

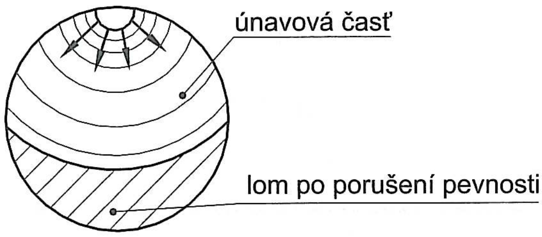
Doteraz sme pri výpočtoch vychádzali z dvoch základných predpokladov:

1. Materiálové konštanty (R_m, R_e, σ_D, τ_D) boli získané na základe trhacej skúšky. Zvyšovanie zaťaženia prebieha pri tejto skúške pozvoľna, preto môžeme túto skúšku považovať za statickú. Pre iný spôsob zaťaženia sme používali na výpočet dovolených napätí opravné súčinitele.
2. Skúška sa robí na normalizovaných tyčiach a nie je pritom braný ohľad na náhle zmeny napätia v prierezе skutočného materiálu. Na zjednodušenie výpočtu sme uvažovali o tom, že napätie sa rozkladá lineárne po priereze.

Skutočné súčiastky majú rozdielne tvary, rozmery, opracovanie povrchov aj tepelné spracovanie ako skúšobné vzorky. Toto všetko ovplyvňuje rozloženie napätí po priereze.

Vyjadrenie napätia meniaceho sa s časom pomocou súčiniteľov nemusí vždy viesť k presným výsledkom. Preto aj výpočet pomocou týchto súčiniteľov možno považovať iba za orientačný.

Materiál, ktorý je namáhaný cyklicky, vydrží menej ako staticky namáhaný materiál. Hovoríme, že materiál sa unaví. Vzniká pritom charakteristický únavový lom.



Obr. 11.1

Lomová únavová plocha má dva zreteľne odlišné úseky. Časť plochy, ktorá zodpovedá únavovej poruche je relatívne hladká. Cez túto časť sa trhlina prenášala pozvoľna a môžeme na nej pozorovať sústredené stopy trhlín, ktorého stredom je bod vzniku trhliny. Lomová časť má lom krehkého typu, aj keď ide o húževnatý materiál. Na vznik únavových lomov má vplyv:

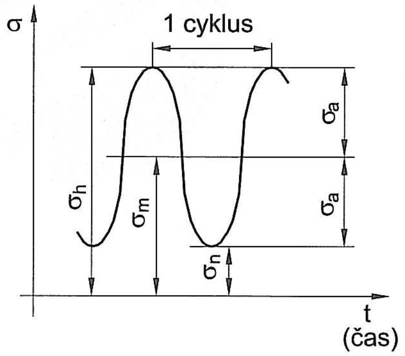
a) akosť povrchovej vrstvy,
b) rozloženie napätí,
c) intenzita napätia vo vruboch, t. j. v miestach, kde sa mení veľkosť prierezu súčiastky.

Rozmery súčiastky treba navrhovať klasickým spôsobom alebo odhadom, a potom ju musíme skontrolovať na bezpečnosť proti únave, pretože na túto kontrolu potrebujeme poznať rozmery súčiastky.

11.1.1 Druhy cyklov

Cyklické zaťaženie je také zaťaženie, ktorého veľkosť sa periodicky mení medzi maximom a minimom.

Môžeme si ho predstaviť aj tak, že k určitému konštantnému predpätiu pripojíme prídavné napätie, ktoré kmitá okolo stredného napätia.

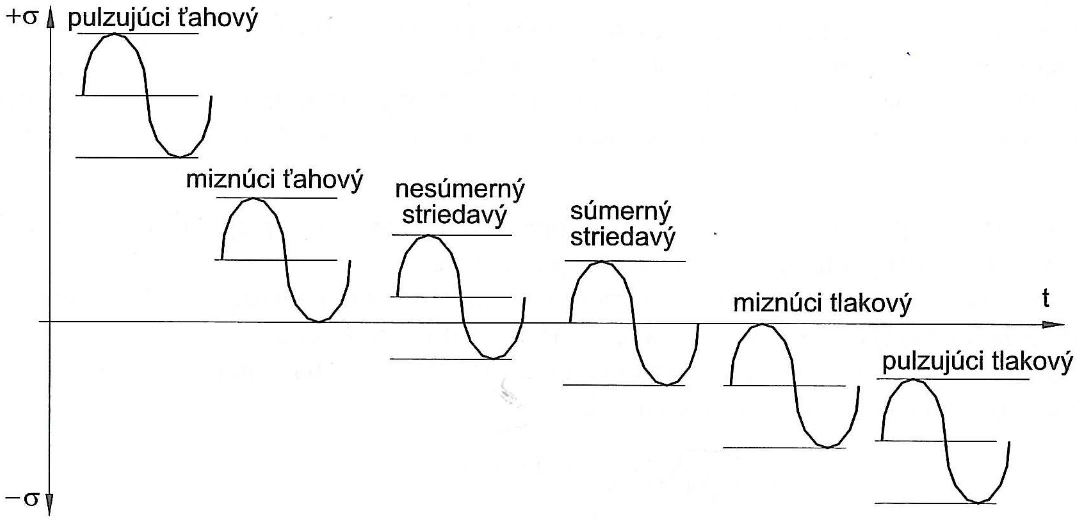


Obr. 11.2

Označovanie veličín:

dolné napätie	$\sigma_n = \sigma_h - 2 \cdot \sigma_a = \sigma_m - \sigma_a$
stredné napätie	$\sigma_m = \dfrac{\sigma_h + \sigma_n}{2}$
horné napätie	$\sigma_h = \sigma_m + \sigma_a = \sigma_n + 2 \cdot \sigma_a$
amplitúda napätia	$\sigma_a = \sigma_h - \sigma_m = \sigma_m - \sigma_n$
výkmit	$2 \cdot \sigma_a = \sigma_h - \sigma_n$

Cykly sa znázorňujú sínusovou krivkou, aj keď v praxi nemusí byť dodržaný tento cyklus. Nezáleží pritom na počte cyklov za čas. Pri cyklickom namáhaní vychádzame z predpokladu, že sa v priebehu zaťaženia nemení veľkosť amplitúdy.



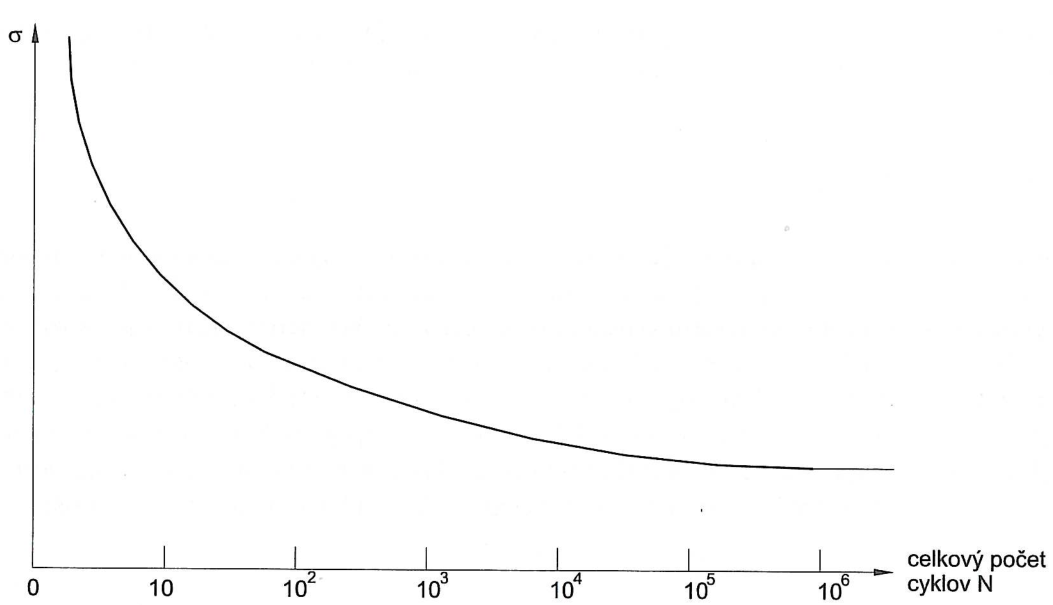
Obr. 11.3

Zhrnutie:

V klasickej pevnosti a pružnosti sa vychádza z hodnôt získaných v diagrame ťahovej skúšky a podľa hypotézy o rovinnosti prierezov sa predpokladá lineárny priebeh napätí. V praxi je väčšina súčiastok zaťažená napätím meniacim sa s časom – cyklickým zaťažením. Okrem toho majú skutočné súčiastky meniace sa prierezy – vruby. Pri výpočtoch uvažujeme sínusový priebeh napätí. Statické, miznúce alebo striedavé zaťaženie je iba špeciálny prípad cyklického zaťaženia.

11.2 WÖHLEROVA KRIVKA – MEDZA ÚNAVY

Súbor skúšobných tyčiek s hladkým, lešteným povrchom budeme postupne cyklicky zaťažovať súmerným striedavým cyklom. Amplitúdu, ktorej počiatočná hodnota bude R_m budeme postupne znižovať. Zisťujeme pritom počet cyklov, ktoré tyčka pri danej amplitúde vydrží. Znižovaním veľkosti amplitúdy sa zvyšuje počet cyklov. Takto získané hodnoty zakreslíme do grafu. Na vodorovnú os nanášame počet cyklov a na zvislú amplitúdy napätí. Pri určitej amplitúde zistíme, že materiál vydrží neobmedzený počet cyklov a krivka bude rovnobežná s vodorovnou osou. To znamená, že pri tejto amplitúde sme dosiahli medzu únavy.



Obr. 11.4

Definícia

Medza únavy je najväčšia amplitúda, pri ktorej materiál vydrží neobmedzený počet cyklov.

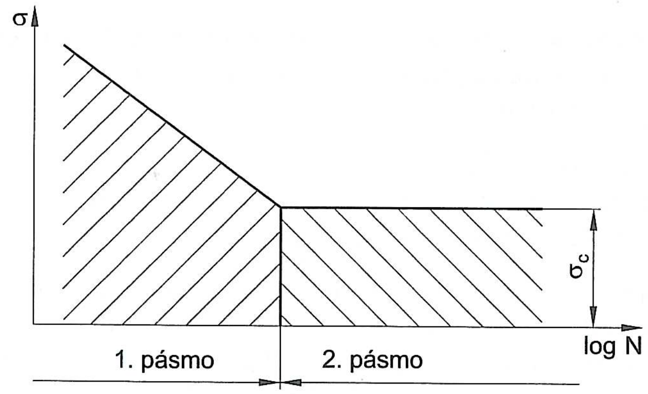
Pretože takéto skúšky sú časovo veľmi náročné, bol pre jednotlivé druhy materiálov určený počet cyklov, ktoré pri skúške na únavu musí materiál vydržať, aby sme ho mohli považovať za neobmedzený.

Pre oceľ $(3 \div 10) \cdot 10^6$ cyklov,
pre meď $50 \cdot 10^6$ cyklov,
pre hliník $(30 \div 500) \cdot 10^6$ cyklov.

Plastické materiály nemajú medzu únavy. Ak znížime amplitúdu, zvýši sa aj počet cyklov, ale neexistuje amplitúda, pri ktorej vydrží materiál neobmedzene dlho.
Wöhlerov diagram môžeme rozdeliť na dve pásma:

Pásmo I – pásmo časových pevností s obmedzenou životnosťou.
Pásmo II – pásmo medze únavy.

Jasnejšie rozdelenie dostaneme, ak namiesto počtu cyklov N dosadíme log N.



Obr. 11.5

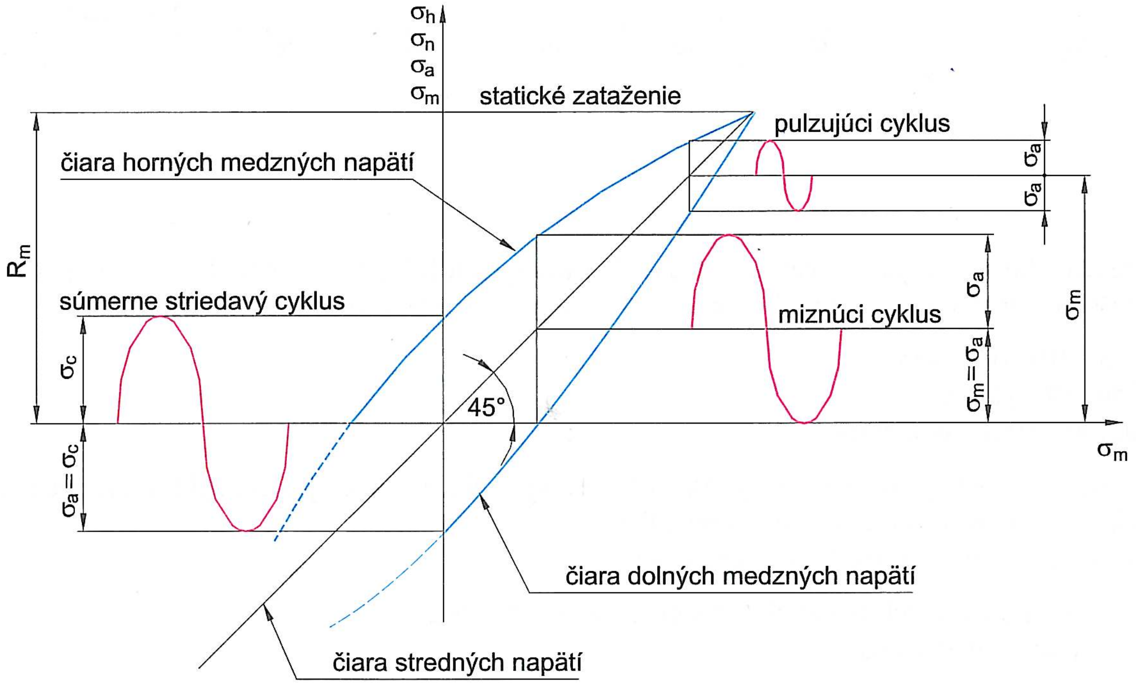
Pri zušľachtených oceliach s pevnosťou 500 až 1 500 MPa boli empiricky zistené tieto hodnoty pre medzu únavy:

Striedavý ťah a tlak	$\sigma_{Ct} = 0{,}32 \cdot R_m$
Striedavý krútenie	$\tau_{Ck} = 0{,}25 \cdot R_m$
Striedavý ohyb	$\sigma_{Co} = 0{,}43 \cdot R_m$

Znižovaním teploty hodnoty medze únavy stúpajú, jej zvyšovaním klesajú. Napr. pre oceľ pôvodne označenú 11 700 pri 78 °C stúpnu asi o 68 % a pri teplote 500 °C klesnú asi o 30 %.

11.3 SMITHOV DIAGRAM

Hodnoty medze únavy σ_C a τ_C zodpovedajú súmernému striedavému cyklu. Nájdeme ich v materiálových tabuľkách. V praxi sa ale stretávame aj s inými ako súmerne striedavými cyklami. Ak chceme určiť medznú amplitúdu pre iný cyklus, musíme urobiť novú sériu skúšok, vyhodnotiť body Wöhlerovej krivky pre každé zvolené stredné napätie a každý druh cyklického zaťaženia. Ak takto získané body zaznačíme do diagramu $\sigma_{a(h,n)} - \sigma_m$, dostaneme Smithov diagram. Každému striedavému napätiu odpovedá vo Wöhlerovom diagrame určitá amplitúda σ_a, ktorú vydrží materiál neobmedzene dlho. Ak tieto amplitúdy zaznačíme a spojíme body σ_h a σ_n, dostaneme čiary horných a dolných medzných napätí, medzi ktorými môže materiál kmitať neobmedzene dlho bez porušenia. Ak tieto napätia prekročíme, dôjde k predčasnému porušeniu a súčiastka má len obmedzenú životnosť.



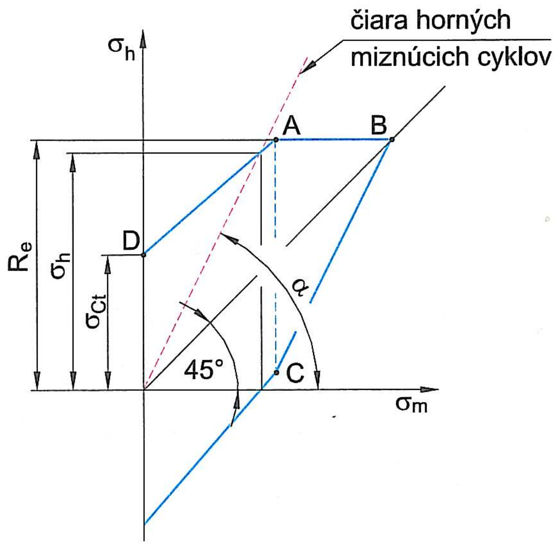
Obr. 11.6

Takto zostrojený diagram vyžaduje veľké množstvo skúšok, ktoré sú ekonomicky veľmi náročné. V praxi sa preto medzné čiary najčastejšie nahrádzajú priamkami, a to buď dvomi, alebo jednou. K náhrade Smithovho diagramu *(obr. 11.7)* potrebujeme poznať:

a) medzu únavy pre súmerne striedavý cyklus,
b) uhol φ, ktorý zviera čiara horných medzných napätí s vodorovnou osou,
c) medzu klzu materiálu (pre krehké materiály medzu pevnosti).

Na zvislú os nanesieme hodnoty $\sigma_{h(m,n)}$ a na vodorovnú os σ_m. Základnou čiarou je priamka pod uhlom 45° v prvom kvadrante, na ktorej ležia body stredných napätí. V praxi je použiteľná len časť diagramu nachádzajúca sa pod medzou klzu, aby nedošlo k trvalým deformáciám. Úsečka $\overline{DA}$ ohraničuje medzu únavy a úsečka $\overline{AB}$ vyjadruje odolnosť proti plastickým deformáciám. Spravidla kreslíme iba hornú časť Smithovho diagramu $\overline{DA}\,\overline{AB}$, pretože je symetrický. Táto symetria neplatí pre materiály, ktoré lepšie odolávajú tlakovým napätiam ako ťahovým (sivá liatina). Pri konštrukcii Smithovho diagramu môžeme vychádzať buď z φ, alebo z hodnoty $\sigma_{h(nC)}$, t. j. z hodnoty horného napätia pre miznúci cyklus, ktorého hodnoty pre uhlíkové ocele sú dané vzťahmi:

ťah alebo tlak:	$\sigma_{th(hC)} = 1{,}8 \cdot \sigma_{Ct}$
ohyb:	$\sigma_{oh(hC)} = 1{,}65 \cdot \sigma_{Co}$
krútenie:	$\tau_{kh(hC)} = 1{,}8 \cdot \tau_{Ck}$



Obr. 11.7

Závislosť medzi tgφ a medzou pevnosti materiálu v ťahu R_m. *Tabuľka 11.1*

DRUH NAMÁHANIA	MEDZA PEVNOSTI V ŤAHU R_m [MPa]				
	350–500	500–700	700–1000	1000–1200	1200–1400
tg φ pre ťah a tlak	1	0,95	0,9	0,8	0,75
tg φ pre krútenie	1	1	0,95	0,9	0,85

PRÍKLAD

Nakreslite Smithov diagram pre materiál E295 podľa EN 1027-1 (pôvodne 11500) pri cyklickom namáhaní ťah–tlak náhradou dvoma priamkami, resp. jednou priamkou.

Riešenie:

Zo strojníckych tabuliek zistíme tieto hodnoty:

R_m = 500 až 620 MPa zvolíme najnižšiu možnú hodnotu 500 MPa.

R_e = 260 až 290 MPa zvolíme 260 MPa.

Medza únavy v ťahu nie je uvedená, preto na jej výpočet použijeme empirický vzťah:

$$\sigma_{Ct} = 0{,}32 \cdot R_m$$

$$\sigma_{Ct} = 0{,}32 \cdot 500 = 160 \text{ MPa}$$

Druhý bod priamky tvorí hodnota horného napätia miznúceho cyklu:

$$\sigma_{th(hC)} = 1{,}8 \cdot \sigma_{Ct}$$

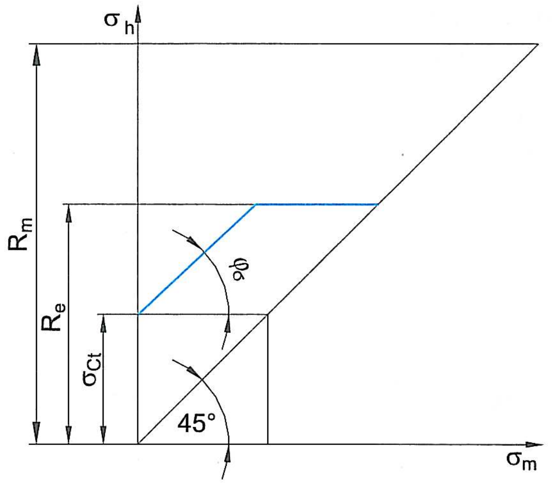
$$\sigma_{th(hC)} = 1{,}8 \cdot 160 = 288 \text{ MPa}$$

Iný spôsob, ako zostrojiť priamku je pomocou uhla φ, ktorého hodnotu vypočítame z *tab. 11.1.* Pre materiál E295 je tg φ = 0,95, t. j. φ = 43°32'.

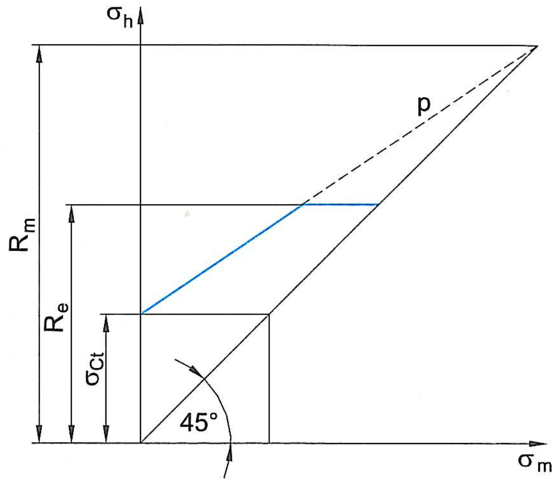
Obidva spôsoby konštrukcie náhrady Smithovho diagramu sú zrejmé z *obr. 11.8* a *obr. 11.9*, kde je čiarkovane nakreslená aj konštrukcia náhrady Smithovho diagramu pomocou jednej priamky.

Pri náhrade Smithovho diagramu pomocou jednej priamky počítame s väčšou mierou bezpečnosti, pretože dovoľujeme menšie horné medzné napätie ako je v skutočnosti možné.

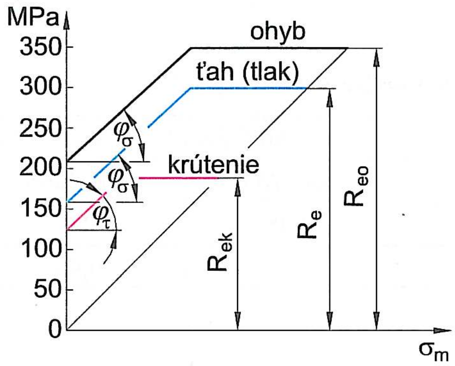
Porovnajme Smithov diagram v ťahu – tlaku, ohybe a krútení pre materiál 11 500. Porovnanie vidieť na *obr. 11.10*.



Obr. 11.8



Obr. 11.9



Obr. 11.10

Zhrnutie:

Medza únavy je najväčšia amplitúda, ktorú vydrží materiál neobmedzene dlho. V praxi je to pre oceľ hodnota (3 až 10).10^6cyklov. Medzu únavy zisťujeme na vzorkách pomocou Wöhlerovej krivky. Pre iný ako striedavý súmerný cyklus hľadáme amplitúdu napätia pomocou Smithovho diagramu. V praxi stačí jeho náhradný tvar vytvorený dvomi alebo jednou priamkou.

KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Popíšte priebeh a vyhodnocovanie skúšky únavy materiálu.
2. Znázornite Wöhlerovu krivku v normálnych a semilogaritmických súradniciach.
3. Definujte medzu únavy, a akým počtom cyklov odpovedá pri oceli.
4. Ktoré materiály nemajú medzu únavy?
5. Aký diagram zostrojujeme, keď zisťujeme medzu únavy materiálu?
6. Načrtnite skutočný Smithov diagram, vysvetlite jeho význam a nakreslite do neho základné druhy cyklov.
7. Prečo robíme zjednodušovanie Smithovho diagramu?
8. Uveďte spôsoby, ktorými sa robí zjednodušenie Smithovho diagramu.
9. Prečo je Smithov diagram obmedzený medzou klzu.

11.4 TVAROVÁ PEVNOSŤ

Doterajšie medzné amplitúdy sú odvodzované pre vzorky s hladkým povrchom s predpísanými rozmermi. Skutočná súčiastka obyčajne nespĺňa ani jednu z uvedených vlastností vzorky, preto na nej musíme urobiť určité korekcie. Skutočná súčiastka má medzu únavy podstatne nižšiu. Na medzu únavy majú rozhodujúci vplyv:

a) tvar súčiastky,
b) veľkosť súčiastky,
c) stav povrchu súčiastky.

Zisťovanie medze únavy skutočnej súčiastky môžeme robiť:

1. pokusne – keď jednotlivé vplyvy zistíme experimentálne. Tento spôsob je veľmi nákladný, pretože vyžaduje veľké množstvo skutočných súčiastok, na ktorých robíme skúšky.
2. teoreticky – existuje niekoľko teórií, ktoré pomocou matematických vzťahov riešia jednotlivé vplyvy.

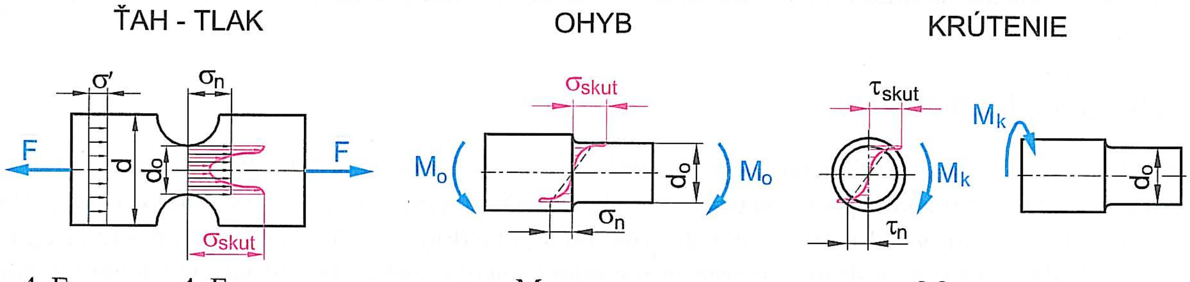
11.4.1 Vplyv tvaru súčiastky

Skutočná súčiastka sa od vzorky líši tým, že jej tvar sa mení, a teda mení sa aj jej prierez. Akákoľvek zmena prierezu – vrub – spôsobuje zvýšenie napätia oproti klasickej pružnosti a pevnosti, a tým aj zníženie medze únavy. Hovoríme, že v miestach zmeny prierezu dochádza ku koncentrácii napätia. Táto koncentrácia je tým väčšia, čím je náhlejšia zmena prierezu. Koncentráciu napätia vyjadrujeme pomocou vrubového súčiniteľa skutočného zhustenia (koncentrácie) a označujeme ho β.

$$\beta = \frac{\sigma_{skut}}{\sigma_n}$$

kde σ_n je menovité napätie odpovedajúce rovnomerne rozloženému napätiu v zoslabenom priereze. σ_{skut} sa dá zistiť výpočtom alebo laboratórnymi metódami na skutočnej súčiastke alebo jej modeli.

Priebeh teoretického a skutočného napätia pri jednotlivých druhoch namáhaní je na *obr. 11.11.*



$$\sigma' = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \quad \sigma_n = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d_0^2} \quad \sigma_{skut} = \beta \cdot \sigma_n \quad \sigma_n = \frac{M_o}{W_o} \quad \sigma_{skut} = \beta \cdot \sigma_n \quad \tau_n = \frac{M_k}{W_k} \quad \tau_{skut} = \beta \cdot \tau_n$$

Obr. 11.11

Pri skúškach sa zistilo, že materiál má podstatný vplyv na vrubovú citlivosť. Možno povedať, že čím je kvalitnejšia oceľ, tým je citlivejšia na vruby. Tento vplyv je vyjadrený súčiniteľom citlivosti materiálu η, ktorý je vyjadrený pomerom skutočnej hodnoty špičkového napätia ku špičke teoretického maximálneho napätia. Jeho hodnota je v rozsahu od 0 pre materiály necitlivé na vruby (sivá liatina) do 1 pri najkvalitnejších oceliach.

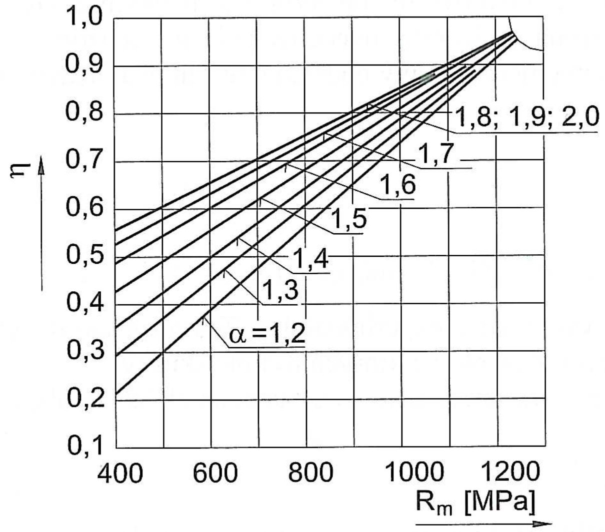
$$\eta = \frac{\sigma_n(\beta - 1)}{\sigma_n(\alpha - 1)}$$

z toho:

$$\beta = 1 + (\alpha - 1) \cdot \eta$$

kde α je tvarový súčiniteľ. Veľkosť súčiniteľa α nie je závislá od materiálu. Často sa uvádzajú diagramy a nomogramy, kde sú uvedené závislosti tvarového súčiniteľa α od rozmerov vrubu pre rôzne tvary vrubov.

Na *obr. 11.12* je graficky vyjadrená závislosť medzi súčiniteľom citlivosti materiálu η a pevnosťou materiálu pre rôzne tvarové súčinitele α.



Obr. 11.12

Z uvedeného vzťahu vyplýva, že súčiniteľ β nie je závislý iba od tvaru vrubu, ale aj od materiálu, druhu zaťaženia, stavu napätia atď. V rôznej odbornej literatúre sú uvedené grafy alebo tabuľky pre jednotlivé tvary vrubov, materiály a spôsoby zaťaženia.

11.4.2 Vplyv veľkosti súčiastky

Rozmery súčiastky vplývajú aj na veľkosť vnútorných porúch, vznik vnútorného pnutia pri tepelnom spracovaní. Veľkosť plochy povrchu má zase za následok, že vzrastie aj počet defektov, ktoré sú vyvolané opracovaním a zväčší sa tým aj počet zŕn, ktoré sú zasiahnuté mikroplastickou deformáciou. Vplyv veľkosti priemeru súčiastky sa vyjadruje súčiniteľom ε_m. Súčiniteľ ε_m sa zisťuje iba pre striedavý ohyb a krútenie. Pri ťahu a tlaku sa rovná 1.

11.4.3 Vplyv povrchu súčiastky

Začiatok únavovej trhliny je vždy na povrchu súčiastky. Je to spôsobené tým, že povrchové vrstvy sú pri ohybe a krútení najviac namáhané práve na povrchu. Okrem toho má povrch množstvo defektov (stopy po opracovaní, korózia, mikrotrhliny atď.). Vplyv akosti povrchu sa vyjadruje súčiniteľom stavu povrchu ε_p, ktorý sa rovná pomeru medze únavy s určitým vyjadrením povrchu k medzi únavy starostlivo vyleštenej vzorky. Ak si v strojníckych tabuľkách vyhľadáme grafickú závislosť medzi pevnosťou materiálu a súčiniteľom stavu povrchu vidíme, že materiál vyššej pevnosti je citlivejší na poškodenie povrchu. Napríklad značkovanie razením číslic na vyleštený povrch má za následok zníženie medze únavy pri chrómmolybdénovej oceli až o 35 %. Medzu únavy môžeme zvýšiť spevnením povrchovej vrstvy napríklad valčekovaním, otryskaním povrchu oceľovými guľôčkami a pod.

11.4.4 Medzná amplitúda pre skutočnú súčiastku

Skutočnú súčiastku nemôžeme v žiadnom prípade zaťažiť takou amplitúdou ako vyleštenú vzorku s priemerom 10 mm. Skutočná súčiastka môže mať na svojom povrchu vytvorené vruby (konštrukčné aj technologické), môže mať rôzne rozmery aj rôzny stupeň stavu povrchu. Preto veľkosť amplitúdy zaťaženia skutočnej súčiastky v mieste kontrolovaného vrubu vyrátame podľa vzťahu:

$$\sigma_{Cef} = \frac{\sigma_C \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_p}{\beta}$$

kde σ_{Cef} je maximálna amplitúda, ktorou je možné zaťažiť kontrolovaný vrub – je to horné napätie medzného cyklu, teda medza únavy pre kontrolovaný vrub.

11.5 DYNAMICKÁ BEZPEČNOSŤ PRI JEDNOOSOVEJ NAPÄTOSTI

Dynamická bezpečnosť je číslo, ktoré určuje koľkokrát možno dané zaťaženie zväčšiť, kým sa dosiahne medzný stav.

$$k_d = \frac{\text{horné napätie medzného cyklu}}{\text{horné napätie skutočného cyklu}} = \frac{\sigma_{Cef}}{\sigma_{skut}}$$

Aj keď pri riešení dynamickej bezpečnosti berieme do úvahy všetky nepriaznivé vplyvy a dynamická bezpečnosť $k_d = 1$ by teoreticky znamenala neobmedzenú životnosť, volíme vždy $k_d > 1$. Získame tak istotu, že aj pri nehomogénnom materiáli v prevádzkových podmienkach a pri určitom rozptyle hodnôt sa súčiastka neporuší. Súčiniteľ bezpečnosti volíme v týchto medziach:

$k_d = 1{,}5 \div 3$ – pri kontrole na únosnosť,

$k_d = 1{,}3 \div 1{,}4$ – pri kontrole na odolnosť proti plastickým deformáciám.

Na to, aby sme zistili súčiniteľ dynamickej bezpečnosti potrebujeme poznať porovnateľné napätie. Pre súmerný striedavý a miznúci cyklus je to pomerne jednoduché. Pre ostatné druhy cyklov existuje niekoľko možností ako získať porovnateľný cyklus. Pre tieto prípady sa obmedzíme na najčastejšie používané spôsoby, jeho výpočtu. V ďalšej časti je uvedené ako sa v jednotlivých prípadoch postupuje pri výpočte súčiniteľa dynamickej únosnosti.

11.5.1 Dynamická bezpečnosť pre súmerný striedavý cyklus

Pre tento druh dynamického zaťaženia nepotrebujeme na určenie dynamickej bezpečnosti použiť Smithov diagram. Platia tu vzťahy:

a) pre normálové napätia: $$k_d = \frac{\sigma_C}{\sigma_a}$$

b) pre tangenciálne napätia: $$k_d = \frac{\tau_C}{\tau_a}$$

11.5.2 Dynamická bezpečnosť pre miznúci cyklus

Miznúce cykly sú si podobné. Ak poznáme hodnoty miznúcich cyklov pre daný materiál, nemusíme kresliť Smithov diagram. Dynamickú bezpečnosť určíme zo vzťahu:

$$k_d = \frac{\text{horné (stredné) napätie medzného cyklu}}{\text{horné (stredné) napätie prevádzkového cyklu}} = \frac{\sigma_{h(C)}}{\sigma_{h(C)ef}}$$

Ak je napätie na medzi klzu menšie ako $\sigma_{h(C)}$, potom bezpečnosť riešime vzhľadom na plastické deformácie podľa vzťahu:

$$k_d = \frac{R_e}{\sigma_{h(C)ef}}$$

11.5.3 Dynamická bezpečnosť pre nesúmerné cykly

Pre tieto cykly musíme vždy kresliť Smithov diagram. Na zistenie dynamickej bezpečnosti musíme poznať priebeh prevádzkového cyklu. Musíme si určiť medzný cyklus, s ktorým prevádzkový cyklus porovnáme. Existuje niekoľko spôsobov ako získať medzný cyklus. Jeden je na *obr. 11.13*. Pri jeho určovaní sa vychádza zo skutočnosti, že horné napätia podobných cyklov ležia na jednej priamke, ktorej smernica je daná vzťahom:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_h}{\sigma_m}$$

Ak leží horné napätie prevádzkového cyklu pod hornou medznou čiarou Smithovho diagramu pre súčiastku, potom vieme, že dynamická bezpečnosť bude väčšia ako 1.

Dynamickú bezpečnosť potom môžeme vypočítať:

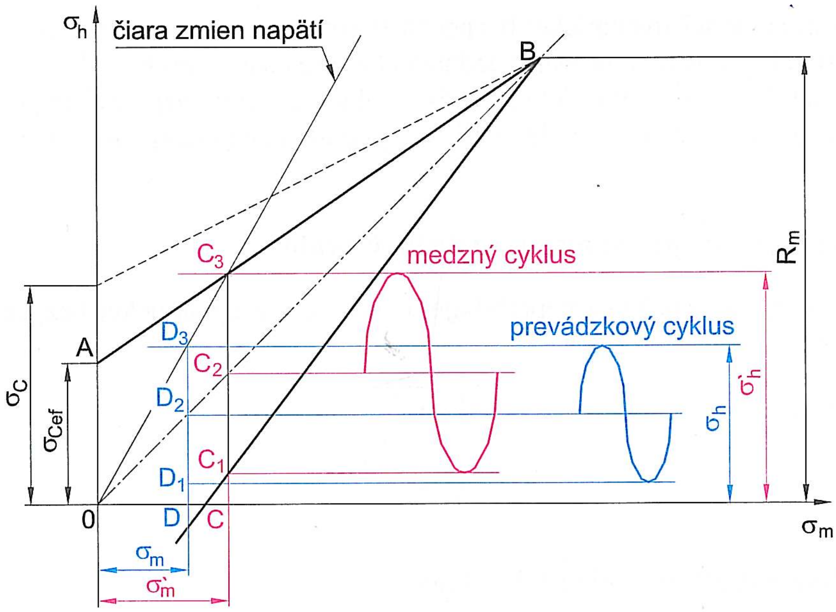
$$k_d = \frac{\text{horné napätie medzného cyklu}}{\text{horné napätie prevádzkového cyklu}} = \frac{\sigma'_h}{\sigma_h}$$

alebo

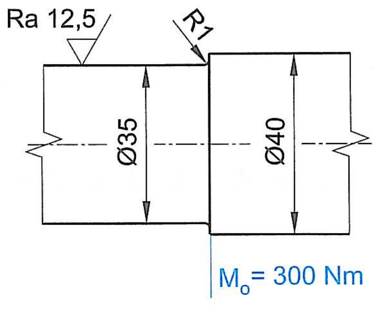
$$k_d = \frac{\text{stredné napätie medzného cyklu}}{\text{stredné napätie prevádzkového cyklu}} = \frac{\sigma'_m}{\sigma_m}$$

alebo

$$k_d = \frac{\text{amplitúda napätia medzného cyklu}}{\text{amplitúda napätia prevádzkového cyklu}} = \frac{\sigma'_a}{\sigma_a}$$



Obr. 11.13



Obr. 11.14

PRÍKLAD

Zistite dynamickú bezpečnosť osadenia otáčajúceho sa hriadeľa z materiálu E295 podľa EN 1027-1 (pôvodne 11 500), ak v tomto mieste pôsobí M_o = 215 Nm. V prípade, že konštrukčné prvky hriadeľa nevyhovejú súčiniteľu k_d na únosnosť, upravte ich podľa potreby.

Riešenie:

Vo vyznačenom mieste pôsobí striedavé napätie v ohybe:

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o}$$

$$\sigma_o = \frac{M_o}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}}$$

$$\sigma_o = \frac{32 \cdot 215\,000}{\pi \cdot 35^3} = 51{,}08 \text{ MPa}$$

Maximálnu amplitúdu, ktorou môžeme túto časť hriadeľa zaťažiť vyrátame:

$$\sigma_{Cef} = \frac{\sigma_C \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_p}{\beta}$$

kde σ_C je pre striedavý súmerný cyklus napätia na medzi únavy materiálu v ohybe $\sigma_{Co} = (175 \div 215)$ MPa (volíme nižšie hodnoty);

β je pre pomer $\frac{R}{d} = 0,029$. Podľa diagramu v strojníckych tabuľkách je táto hodnota približne $\beta = 2,3$;

ε_m je pre priemer 35 mm, namáhanie ohybom a pre uhlíkové ocele približne 0,88;

ε_m je pre pevnosť materiálu 500 MPa a pre hrubovaný povrch približne 0,77.

$$\sigma_{Cef} = \frac{175 \cdot 0,88 \cdot 0,77}{2,3} = 51,56 \text{ MPa}$$

Súčiniteľ dynamickej bezpečnosti:

$$k_d = \frac{\sigma_{Cef}}{\sigma_o}$$

$$k_d = \frac{51,56}{51,08} = 1,01$$

Súčiniteľ dynamickej bezpečnosti je síce väčší ako 1, ale nevyhovuje dynamickej únosnosti, kde $k_d = 1,5 \div 3$. Ak nechceme znížiť zaťaženie hriadeľa a ani zvyšovať jeho priemer, musíme navrhnúť zvýšenie kvality opracovania (Ra = 1,6 – jemné sústruženie), čím sa hodnota ε_p zvýši z 0,77 na 0,84 a zväčšením prechodového polomeru na R4 sa hodnota súčiniteľa β zníži z 2,3 na 1,5. Súčiniteľ veľkosti súčiastky zostáva rovnaký. Potom maximálna amplitúda napätia:

$$\sigma'_{Cef} = \frac{175 \cdot 0,88 \cdot 0,84}{1,5} = 86,24 \text{ MPa}$$

Súčiniteľ dynamickej bezpečnosti:

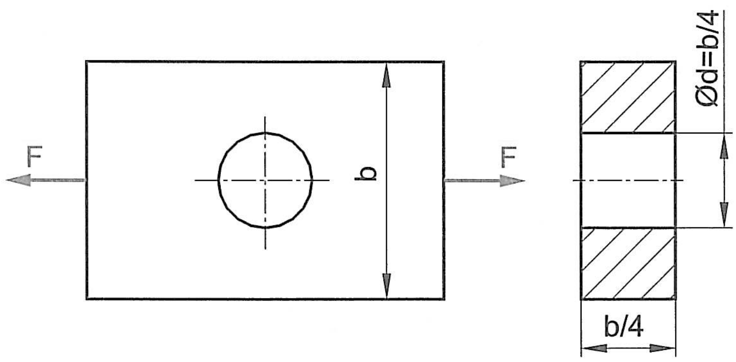
$$k_d = \frac{\sigma'_{Cef}}{\sigma_o}$$

$$k_d = \frac{86,24}{51,08} = 1,69$$

Z uvedeného príkladu vidieť, aký vplyv majú na dynamicky namáhanú súčiastku prechodové polomery alebo akosť opracovania povrchu súčiastky.

PRÍKLAD

Na tiahlo podľa *obr. 11.15* pôsobí konštantná sila $F = 1\,000$ N a pulzujúca sila s amplitúdou $F_a = 3\,500$ N. Vypočítajte rozmery súčiastky a určte súčiniteľ dynamickej bezpečnosti, ak je súčiastka vyrobená z materiálu podľa pôvodného označenia 11 423. Povrch je jemne opracovaný.



Obr. 11.15

Riešenie:

Pretože nepoznáme rozmery súčiastky, musíme ich pomocou klasickej pružnosti a pevnosti vyrátať.

$$\sigma_t = \frac{F_{max}}{S} \le \sigma_{Dt,III}$$

pre materiál 11 423 je $\sigma_{Dt,III} = (55 \div 80)$ MPa.

$$F_{max} = F + F_a$$

$$F_{max} = 1\,000 + 3\,500 = 4\,500 \text{ N}$$

$$S = \frac{b}{4} \cdot \left(b - \frac{b}{4}\right)$$

$$S = \frac{3}{16} \cdot b^2$$

Po úprave dostaneme:

$$b \ge \sqrt{\frac{16 \cdot F_{max}}{3 \cdot \sigma_{Dt,III}}}$$

$$b \ge \sqrt{\frac{16 \cdot 4\,500}{3 \cdot 55}} = 20,89 \text{ mm}$$

Na základe vyrátanej hodnoty zvolíme rozmer b = 24 mm a z neho vyplýva rozmer d = 6 mm.

Po zistení rozmerov súčiastky môžeme začať výpočet dynamického súčiniteľa bezpečnosti. Zostrojíme Smithov diagram, pre ktorý nájdeme v strojníckych tabuľkách:

$$R_m = 420 \text{ MPa}, \qquad R_e = 230 \text{ MPa}$$

vypočítame:

$$\sigma_{Ct} = 0,32 \cdot R_m$$

$$\sigma_{Ct} = 0,32 \cdot 420 = 134,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Cef} = \frac{\sigma_{Ct} \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_p}{\beta}$$

Vrubový súčiniteľ skutočného zhustenia napätia dostaneme zo vzťahu:

$$\beta = 1 + (\alpha - 1) \cdot \eta$$

V strojníckych tabuľkách nájdeme v diagrame pre tento tvar vrubu hodnotu α = 1,55 pre $\frac{t}{d} = 1$ a v grafe na *obr. 11.12* nájdeme η = 0,48.

$$\beta = 1 + (1,55 - 1) \cdot 0,48 = 1,264$$

V strojníckych tabuľkách nájdeme ε_p = 0,86 a ε_m = 1, pretože ide o namáhanie ťahom.

$$\sigma_{Cef} = \frac{134,4 \cdot 1 \cdot 0,86}{1,264}$$

$$\sigma_{Cef} = 91,44 \text{ MPa}$$

Horné napätie skutočného cyklu vyrátame:

$$\sigma_h = \frac{F + F_a}{S_{sk}}$$

$$S_{sk} = t \cdot (b - d)$$

$$S_{sk} = 6 \cdot (24 - 6) = 108 \text{ mm}^2$$

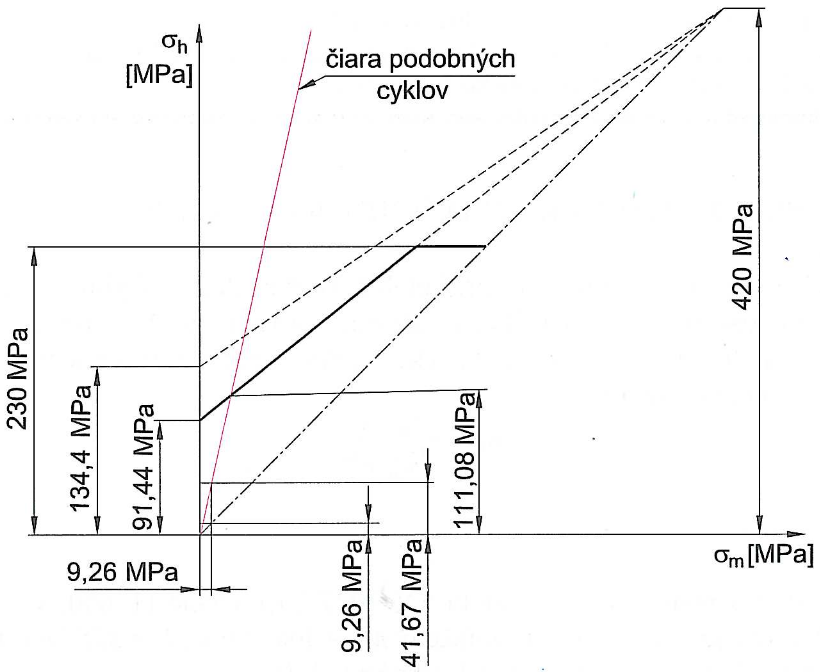
$$\sigma_h = \frac{1\,000 + 3\,500}{108} = 41,67 \text{ MPa}$$

Stredné napätie skutočného cyklu vyrátame:

$$\sigma_m = \frac{F}{S_{sk}}$$

$$\sigma_m = \frac{1\,000}{108} = 9{,}26 \text{ MPa}$$

Nakreslíme Smithov diagram, z ktorého určíme σ'_h .



Obr. 11.16

Zo Smithovho diagramu sme odčítali hodnotu $\sigma'_h = 111{,}08$ MPa. Súčiniteľ dynamickej bezpečnosti je potom:

$$k_d = \frac{\sigma'_h}{\sigma_h}$$

$$k_d = \frac{111{,}08}{41{,}67} = 2{,}67$$

Z výsledku vyplýva, že súčiniteľ dynamickej bezpečnosti vyhovuje požiadavke únosnosti.

Zhrnutie:

Hodnoty medze únavy (súmerný striedavý cyklus) a prepočítané hodnoty pre iné druhy cyklov pomocou Smithovho diagramu platia pre skúšobné tyčky predpísaných rozmerov a vlastností. Pre skutočnú súčiastku musíme tieto hodnoty upraviť. Berieme pritom do úvahy tvar súčiastky, materiál, spôsob zaťaženia, rozmer súčiastky a stav jeho povrchu. Maximálnu amplitúdu súmerného striedavého cyklu pre skutočnú súčiastku vyrátame potom zo vzťahu:

$$\sigma_{Cef} = \frac{\sigma_{Ct} \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_p}{\beta}$$

Pre iný ako súmerný striedavý cyklus zistíme maximálnu hodnotu napätia pomocou Smithovho diagramu, pričom pre skutočnú súčiastku berieme za základnú hodnotu medze únavy σ_{Cef}.

Dynamická miera bezpečnosti určuje, koľkokrát je možné zaťaženie zväčšiť, kým sa dosiahne medzný stav. Je daná vzťahom:

$$k_d = \frac{\text{horné napätie medzného cyklu}}{\text{horné napätie skutočného cyklu}}$$

KONTROLNÉ OTÁZKY:

1. Čo je to vrub a aký má vplyv na rozloženie napätia?
2. Prečo má skutočná súčiastka nižšiu medzu únavy ako skúšobná tyč?
3. Ako sa vyjadruje vplyv veľkosti a stavu povrchu a pri ktorých druhoch namáhania s týmito vplyvmi rátame?
4. Môže byť súčiniteľ stavu povrchu väčší ako 1 a kedy?
5. Nakreslite priebehy menovitých a skutočných napätí na súčiastkach namáhaných ťahom, ohybom a krútením.
6. Čo je súčiniteľ citlivosti materiálu a od čoho závisí?
7. Aký je vzťah medzi β, α a η?
8. Ako nakreslíme Smithov diagram pre skutočnú súčiastku?
9. Ako postupujeme pri určovaní miery dynamickej bezpečnosti?
10. Kedy musíme a kedy nemusíme kresliť Smithov diagram pri určovaní dynamickej miery bezpečnosti?
11. Aké hodnoty môže dosahovať súčiniteľ dynamickej bezpečnosti?

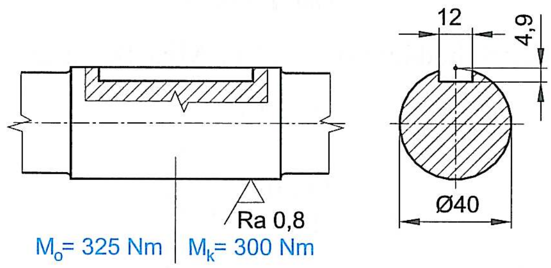
11.6 DYNAMICKÁ BEZPEČNOSŤ PRI ZLOŽENEJ NAPÄTOSTI

Najčastejší prípad zloženej napätosti nastáva pri kombinácii namáhania ohybom a krútením. Výpočet celkovej dynamickej bezpečnosti pre takto namáhanú súčiastku sa robí tak, že najskôr vypočítame dynamickú bezpečnosť pre ohyb k_{do} a potom pre krútenie k_{dk}, tak ako v prípade jednoosovej napätosti. Celkovú dynamickú bezpečnosť potom vypočítame zo vzťahu:

$$k_d = \frac{k_{do} \cdot k_{dk}}{\sqrt{k_{do}^2 + k_{dk}^2}}$$

PRÍKLAD

Urobte kontrolu hriadeľa z materiálu E355 podľa EN 1027-1 (pôvodne 11 600) v mieste uloženia ozubeného kolesa na hriadeľ, ktorý je v tomto mieste zaťažený $M_k = 300$ Nm a $M_o = 325$ Nm. Priemer hriadeľa je 40 mm a jeho povrch je brúsený. Ide o miznúci spôsob zaťaženia krútením.



Obr. 11.17

Riešenie:

Pri riešení celkovej dynamickej bezpečnosti tohto konštrukčného prvku musíme najskôr vyrátať súčinitele dynamickej bezpečnosti pre ohyb a krútenie. Nakoniec vyrátame celkový súčiniteľ dynamickej bezpečnosti.

Výpočet napätia v ohybe: $$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o}$$

kde pre výpočet W_o použijeme približný vzťah:

$$W_o = \frac{\pi \cdot d^3}{32} - \frac{b \cdot t \cdot (d-t)^2}{2 \cdot d}$$

$$W_o = \frac{\pi \cdot 40^3}{32} - \frac{12 \cdot 4{,}9 \cdot (40 - 4{,}9)^2}{2 \cdot 40} = 5\,378 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_o = \frac{325\,000}{5\,378} = 60{,}4 \text{ MPa}$$

Pretože ide o otáčajúci sa hriadeľ, vypočítané napätie je súmerné striedavé. Pre materiál E355 je podľa strojníckych tabuliek medza únavy $\sigma_{oC} = 210$ MPa. Medzné napätie v ohybe, ktoré môže kontrolovaná časť hriadeľa preniesť:

$$\sigma_{Cef,o} = \frac{\sigma_{oC} \cdot \varepsilon_p \cdot \varepsilon_m}{\beta}$$

V strojníckych tabuľkách odčítame $\varepsilon_p = 0{,}93$, $\varepsilon_m = 0{,}86$ a $\beta = 1{,}75$

$$\sigma_{Cef,o} = \frac{210 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}86}{1{,}75} = 96 \text{ MPa}$$

Súčiniteľ dynamickej bezpečnosti pre ohyb:

$$k_{do} = \frac{\sigma_{oC}}{\sigma_o}$$

$$k_{do} = \frac{96}{60{,}4} = 1{,}59$$

Výpočet napätia v krútení:

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k}$$

kde pre výpočet W_k použijeme približný vzťah:

$$W_k = \frac{\pi \cdot d^3}{16} - \frac{b \cdot t \cdot (d-t)^2}{2 \cdot d}$$

$$W_k = \frac{\pi \cdot 40^3}{16} - \frac{12 \cdot 4{,}9 \cdot (40 - 4{,}9)^2}{2 \cdot 40} = 11\,661 \text{ mm}^4$$

$$\tau_k = \frac{300\,000}{11\,661} = 25{,}7 \text{ MPa}$$

Zo strojníckych tabuliek odčítame medzu únavy pre krútenie $\tau_{kC} = 150$ MPa. Medzné napätie v krútení, ktoré môže kontrolovaná časť hriadeľa preniesť, je:

$$\tau_{Cef,k} = \frac{\tau_{kC} \cdot \varepsilon_p \cdot \varepsilon_m}{\beta}$$

Hodnoty súčiniteľov pre krútenie: $\varepsilon_p = 0{,}93$; $\varepsilon_m = 0{,}8$; $\beta = 1{,}5$.

$$\tau_{Cef,k} = \frac{150 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}8}{1{,}5} = 74{,}4 \text{ MPa}$$

Krútenie pôsobí miznúcim spôsobom, preto vypočítané napätie musíme prepočítať na hodnotu horného napätia miznúceho cyklu podľa vzťahu:

$$\tau_{Ck(h)} = 1{,}8 \cdot \tau_{Cef,k}$$

$$\tau_{Ck(h)} = 1{,}8 \cdot 74{,}4 = 134 \text{ MPa}$$

Súčiniteľ dynamickej bezpečnosti v krútení:

$$k_{dk} = \frac{\tau_{Ck(h)}}{\tau_k}$$

$$k_{dk} = \frac{134}{25{,}7} = 5{,}21$$

Celkový súčiniteľ dynamickej bezpečnosti:

$$k_d = \frac{k_{do} \cdot k_{dk}}{\sqrt{k_{do}^2 + k_{dk}^2}}$$

$$k_d = \frac{1{,}59 \cdot 5{,}21}{\sqrt{1{,}59^2 + 5{,}21^2}} = 1{,}52$$

Vypočítaná hodnota dynamickej bezpečnosti vyhovuje.

Zhrnutie:

Pri kombinovanom namáhaní zloženom z normálových a tangenciálnych napätí (najčastejší prípad kombinácie ohybu a krútenia) vypočítame celkovú dynamickú bezpečnosť k_d tak, že vypočítame čiastočné súčinitele dynamickej bezpečnosti pre ohyb k_{do} a pre krútenie k_{dk} a výslednú dynamickú bezpečnosť vypočítame zo vzťahu:

$$k_d = \frac{k_{do} \cdot k_{dk}}{\sqrt{k_{do}^2 + k_{dk}^2}}$$

Kontrolné otázky:

1. Ako postupujeme pri určovaní dynamickej bezpečnosti pri kombinovanom namáhaní?
2. Aké hodnoty môže dosahovať k_d?

TABUĽKY

POROVNANIE OZNAČENIA NIEKTORÝCH VYBRANÝCH OCELÍ PODĽA EN A STN

a) Skupina **S** – konštrukčné ocele

Podľa EN 1027-1	Podľa EN 1027-2	Značka podľa STN	Hodnota R_e [MPa]	Hodnota R_m [MPa]
S185	1.0035	10 000	–	450 – 500
S235JRG1	1.0036	11 373	200 – 250	370 – 450
S235J0	1.0114	11 378	205 – 235	365 – 460
S355J0	1.0553	11 523	320 – 360	520 – 640

b) Skupina **E** – ocele na strojové súčiastky

Podľa EN 1027-1	Podľa EN 1027-2	Značka podľa STN	Hodnota R_e [MPa]	Hodnota R_m [MPa]
E295	1.0050	11 500	250 – 290	500 – 620
E355	1.0060	11 600	300 – 340	600 – 720
E360	1.0070	11 700	325 – 385	685 – 835

c) Skupina **P** – ocele na tlakové zariadenia

Podľa EN 1027-1	Podľa EN 1027-2	Značka podľa STN	Hodnota R_e [MPa]	Hodnota R_m [MPa]
P235GH	1.0345	11 368	180 – 225	350 – 440
P265GH	1.0425	11 418	205 – 255	380 – 490
P295GH	1.0481	13 030	235 – 285	440 – 550
P355N	1.0562	11 503	305 – 345	490 – 640

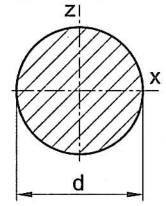
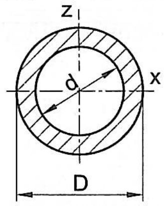
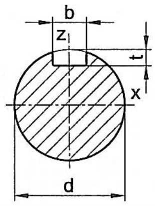
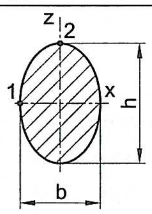
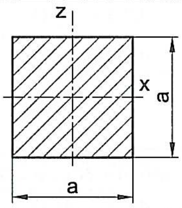
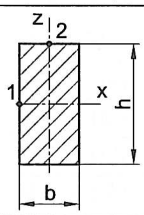
d) Skupina **X** – legované ocele s hmotnostným obsahom jedného legujúceho prvku 5 %

Podľa EN 1027-1	Podľa EN 1027-2	Značka podľa STN	Hodnota $R_p0,2$ [MPa]	Hodnota R_m [MPa]
X12Cr13	1.4006	17 021	275 – 295	460 – 490
X30Cr13	1.4028	17 023	495	740 – 900
X6Cr17	1.4016	17 040	245	440 – 590
X5CrNi18-10	1.4301	17 240	190	500 – 700
X6CrNiTi18-10	1.4541	17 246, 17 247	195 – 205	500 – 700
X2CrNi19-10	1.4306	17 249	180	450 – 700
X5CrNiMo17-12-2	1.4401	17 346	210	500 – 700

e) Nelegované ocele na zušľachťovanie

Podľa EN 10083-2	Značka podľa STN	Hodnota R_e [MPa]	Hodnota R_m [MPa]
1C22	12 024	210 – 240	410 – 430
1C25	12 030	230 – 260	440 – 470
1C30	12 031	230 – 280	460 – 510
1C35	12 040	245 – 300	520 – 550
1C40	12 041	260 – 320	530 – 580
1C45	12 050	275 – 340	560 – 620
1C50	12 051	290 – 355	590 – 650
1C55	12 060	300 – 370	620 – 680
1C60	12 061	310 – 380	650 – 710

Poznámka: Číselná hodnota skupín ocelí S, E, P znamená napätie na hornej medzi klzu v MPa, zatiaľ čo hodnoty R_e a $R_p0,2$ sú najmenšie prípustné napätia na medzi klzu.

PRIEREZ	J_p	W_k	J_x	W_o
	$\frac{\pi \cdot d^4}{32}$	$\frac{\pi \cdot d^3}{16}$	$\frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$\frac{\pi \cdot d^3}{32}$
	$\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot (1-\alpha^4)$	$\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot (1-\alpha^4)$	$\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot (1-\alpha^4)$	$\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32 \cdot D} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1-\alpha^4)$
	–	Približný vzťah $W_k = \frac{\pi \cdot d^3}{16} - \frac{b \cdot t \cdot (d-t)^2}{2 \cdot d}$	–	Približný vzťah $W_{ox} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} - \frac{b \cdot t \cdot (d-t)^2}{2 \cdot d}$
	–	$W_{k1} = \frac{\pi}{16} \cdot h \cdot b^2$ $W_{k2} = \frac{\pi}{16} \cdot b \cdot h^2$	$\frac{\pi}{64} \cdot b \cdot h^3$	$W_{ox} = \frac{\pi}{32} \cdot b \cdot h^2$ $W_{o2} = \frac{\pi}{32} \cdot h \cdot b^2$
	–	$0{,}208 \cdot a^3$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^3}{6}$
	–	$W_{k1} = \alpha \cdot b^2 \cdot h$ $W_{k2} = \beta \cdot h^2 \cdot b$	$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $J_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$	$W_{ox} = \frac{b \cdot h^2}{6}$ $W_{oz} = \frac{h \cdot b^2}{6}$