

M. Julina – A. Řeřábek

MECHANIKA

STATIKA

PRO ŠKOLU A PRAXI


Scientia, spol. s r. o.
pedagogické nakladatelství
PRAHA 2000

Učebnice pojednává o základech statiky tuhých těles se zvláštním zaměřením na technické aplikace. Výklad problematiky a uváděné aplikace jsou doprovázeny četnými konkrétními příklady, úlohami a kontrolními otázkami. Text obsahuje návody na řešení a základní výpočtové vztahy. Řešení je vždy provedeno jak výpočtem, tak i graficky.

Kniha je určena žákům středních odborných učilišť a středních odborných škol technického zaměření i absolventům těchto škol. Může též posloužit pro objasnění uvedené problematiky technikům v praxi a všem zájemcům o základy statiky.

OBSAH

	PŘEDMLUVA	5
	PŘEHLED VELIČIN A JEJICH JEDNOTEK	6
1	ÚVOD DO MECHANIKY	7
1.1	Rozdělení mechaniky	7
1.2	Základní pojmy a veličiny	7
1.3	Určení síly v rovině	9
2	POHYBOVÉ ZÁKONY	10
2.1	První pohybový zákon – zákon setrvačnosti	10
2.2	Druhý pohybový zákon – zákon síly	10
2.3	Třetí pohybový zákon – zákon akce a reakce	10
3	VAZBY (PODPORY) A REAKCE	12
3.1	Volné vazby (podpory)	12
3.2	Pevné vazby (podpory)	13
4	ZÁKLADY STATIKY TUHÝCH TĚLES	14
4.1	Soustava sil v rovině	14
4.2	Skládání, rozkládání a rovnováha sil v rovině	14
4.2.1	Síly působící na jedné přímce	14
4.2.2	Různoběžné síly se společným působištěm	15
4.2.2.1	Rovnováha tří sil	16
4.2.2.2	Rozkládání sil	19
4.2.2.3	Skládání několika různoběžných sil se společným působištěm	21
4.2.2.4	Rovnováha několika různoběžných sil se společným působištěm	22
4.2.3	Různoběžné síly, které nemají společné působiště	23
4.2.3.1	Skládání několika různoběžných sil s různými působišti	23
4.2.3.2	Rovnováha několika různoběžných sil s různými působišti	24
4.2.4	Rovnoběžné síly	25
4.2.4.1	Dvojice sil	25
4.2.4.2	Určení směru a velikosti výslednice rovnoběžných sil, rozklad dané síly do dvou daných směrů s ní rovnoběžných	26
5	MOMENT SÍLY	28
5.1	Redukce momentů	28
5.2	Skládání momentů	28
5.3	Rovnováha momentů	29
5.4	Velikost momentu	29
5.5	Moment dvojice sil k libovolnému bodu v rovině	30
6	SÍLY PŮSOBÍCÍ NA TĚLESO OTOČNÉ KOLEM OSY	31
6.1	Statické podmínky pro rovnováhu tělesa v rovině	31
6.1.1	Rovnováha na páce	31
7	REAKCE NOSNÍKŮ	35
8	PRUTOVÁ SOUSTAVA	41
8.1	Grafické řešení	42

8.2	Počtní řešení	45
8.2.1	Styčnicková metoda	46
8.2.2	Průměrná metoda	47
9	SOUSTAVA SIL V PROSTORU	50
9.1	Síly se společným působišťem	50
9.2	Rovnoběžné síly	51
9.3	Rozklad síly do tří rovnoběžných směrů	52
9.4	Rovnováha soustavy sil v prostoru	53
10	TĚŽIŠTĚ	55
10.1	Určení těžiště rovinného obrazce	55
10.1.1	Těžiště základních geometrických útvarů	56
10.1.2	Poloha těžiště rovinného obrazce – příklady	57
10.2	Stabilita těles	63
10.3	Guldinovy věty	64
10.3.1	Povrch rotačního tělesa	64
10.3.2	Objem rotačního tělesa	65
11	PASIVNÍ ODPORY	67
11.1	Smykové tření na rovině	67
11.1.1	Tření v klínové drážce	69
11.1.2	Vzpříčení vedeného tělesa	70
11.2	Tření ve válcové drážce	70
11.3	Čepové tření	70
11.3.1	Radiální čep	71
11.3.2	Axiální čep	72
11.4	Vláknové tření	73
12	ODPORY PŘI VALENÍ	76
12.1	Valení a smýkání	77
12.2	Rameno momentu valivého odporu	77
12.3	Pohyb vozu po vodorovné rovině	78
13	JEDNODUCHÉ STROJE A JEJICH SILOVÉ POMĚRY	80
13.1	Nakloněná rovina	80
13.1.1	Rovnováha na nakloněné rovině	80
13.2	Šroub	83
13.3	Klín	84
13.4	Páka. Kolo na hřídeli	87
13.5	Kladka a kladkostroj	87
13.5.1	Pevná kladka	88
13.5.2	Volná kladka	88
13.5.3	Obecný kladkostroj	89
13.5.4	Diferenciální kladkostroj	89
13.6	Kleště zdvihacích strojů	92
13.7	Brzdy	93
13.7.1	Čelistové brzdy	93
13.7.2	Pásové brzdy	96
	LITERATURA	98
	REJSTŘÍK	99

PŘEDMLUVA

Knihy Statika je prvním dílem souboru učebnic technické mechaniky. Pojednává o základech statiky tuhých těles se zvláštním zaměřením na technické aplikace. Chce přiblížit žákům a technikům problematiku, která mnohdy vzbuzuje obavy. Při studiu přírodních věd - a mechanika mezi ně patří - je třeba si uvědomit, že není možno učit se všemu nazpaměť, ale že je nutno využít logického myšlení a pochopit obecné zákonitosti.

Vzhledem k tomu, že jednotlivé části technické mechaniky spolu vzájemně souvisí, pojednává Statika v úvodu o základních problémech celé mechaniky. Obecné řešení je pomůckou pro úspěšné vyřešení konkrétního případu, proto jsou výklad problematiky a uváděné aplikace v knize doprovázeny četnými konkrétními příklady, úlohami a kontrolními otázkami. Text obsahuje návody na řešení a základní výpočtové vztahy. Řešení je vždy provedeno jak výpočtem, tak i graficky. V příkladech řešících rovnováhu silové soustavy se nejdříve vyřeší rovnováha bez pasivních odporů, později s pasivními odpory. Protože v technické praxi většinou převládají rovinné soustavy, je jim v knize věnována větší pozornost.

Knihy je určena žákům středních odborných učilišť a středních odborných škol technického zaměření, na kterých se vyučují strojírenské a příbuzné obory, zakončených maturitou, ale i absolventům těchto škol. Proto je sestavena nejen podle osnov oboru strojírenství. Knihy může též posloužit pro objasnění uvedené problematiky technikům v praxi a všem zájemcům o základy statiky.

Předkládaná publikace má být rádcem a dobrým pomocníkem při řešení řady problémů, s nimiž se ve škole, v životě i v technické praxi setkáváme. Proto nám bylo potěšením na této knize pracovat.

Autoři

PŘEHLED POUŽITÝCH ZNAČEK, VELIČIN A JEDNOTEK

Značka	Název veličiny	Jednotka
a	zrychlení	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
D, d	průměr	m
F	síla	N
F_R	výsledná síla (výslednice sil)	N
F_t	tečná síla	N
F_n	normálová síla	N
F_T	třecí síla	N
F_r	reakční (vazbová) síla	N
F_{rA}	reakční síla v bodě A	N
g	zrychlení volného pádu (tíhové, gravitační)	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
G	tíhová síla (tíha)	N
l, h, a, b, c	délka	m
M	moment síly (moment silové dvojice)	$\text{N} \cdot \text{m}$
M_k	kroučící moment	$\text{N} \cdot \text{m}$
$M_{\check{c}}$	moment čepového tření	$\text{N} \cdot \text{m}$
M_R	výsledný moment	$\text{N} \cdot \text{m}$
M_v	moment valivého odporu	$\text{N} \cdot \text{m}$
m	hmotnost	kg
p_n	stoupání závitu	m
R, r	poloměr	m
$S(A)$	plocha (plošný obsah)	m^2
t	čas	s
v	rychlost	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
z_1, z_2	počet zubů	–
α, β, γ	rovinný úhel	rad
α	úhel opásání	rad
φ	třecí úhel	rad
η	účinnost	–
η_c	celková účinnost	–
ξ	rameno momentu valivého odporu	m
ρ	poloměr třecí kružnice	m
$\mu (f)$	součinitel smykového tření	–
μ_p	trakční součinitel	–
$e^{\alpha\mu}$	součinitel pásového tření	–
μ_k	součinitel tření v klínové drážce	–
$\mu_{\check{c}}$	součinitel čepového tření	–

1 ÚVOD DO MECHANIKY

Mechanika se zabývá studiem, tedy popisem a objasňováním mechanických pohybů těles. Klasická mechanika byla první axiomaticky formulovanou fyzikální disciplínou. Stala se vzorem toho, co představuje fyzikální způsob myšlení, tzn. zobecnění poznatků získaných ze zkušenosti, jejich matematická formulace, odvození důsledků těchto zobecnění a předpovědi nových experimenty ověřitelných jevů. Ze znalostí mechaniky odedávna vycházejí vědeckotechnické výpočty, mechanika ovlivnila vytvoření nových matematických disciplín.

Ty tam jsou doby, kdy stavitelé museli vystačit jen se svými znalostmi, citem, vtípem a trpělivostí při řešení praktických úloh z mechaniky. Dnes musí umět konstruktér i provozní technik vyřešit mimo jiné velikosti působících sil a jejich účinek na jednotlivé strojní součásti, aby mohl zodpovědně volit materiál a určit jeho potřebné rozměry atd.

Základní odborné pomůcky

Pokrok přináší stále účinnější a výkonnější nástroje na provádění vědeckotechnických výpočtů. V ne příliš vzdálené době to byla logaritmická pravítka, nyní běžně používáme nejen kalkulačky, ale i vysoce výkonné počítače.

Nové nástroje mění možnosti i tvář samotné teoretické mechaniky. Nedávno byly uplatňovány sice méně přesné, ale elegantní a názorné grafické metody, dnes jsme svědky rozvoje a nasazení numerických metod.

Pomocí počítačů a exaktních matematických modelů pronikáme do středu těles, nitra hmoty a podstaty dějů. Takové schopnosti by staří učenci a stavitelé, jako např. Archimedes, Leonardo da Vinci, ale i Newton, pokládali nejspíš za nepřirozené. Na tomto nikdy nekončícím a stále se zrychlujícím procesu se budou mnozí z Vás úspěšně podílet.

Pro začátek stačí, abyste získali zručnost při používání kalkulačky, vytvořili si předpoklady pro práci s dokonalejšími pomůckami, odpovědně přistupovali k získávání a prohlubování svých znalostí. Naučte se pracovat s odbornou literaturou a Strojnickými tabulkami, ve kterých jsou shromážděny dlouhodobé zkušenosti, výsledky měření, grafy a další pro vás důležité poznatky. Strojnické tabulky obsahují též výběr z norem, bez nichž se při návrhu součástí a řešení technických problémů neobejdete.

1.1 Rozdělení mechaniky

Mechanika je částí fyziky, je tedy oborem přírodních věd, jenž pojednává o zákonech klidu a pohybu hmotných bodů, těles a tekutin. Zabývá se příčinami a následky jejich klidu a pohybu.

Podle skupenství zkoumaných těles se mechanika dělí na:

a) mechaniku tuhých těles, tj. *geomechaniku*

- dokonale tuhých těles,
- pružných těles - těmi se zabývá *nauka o pružnosti a pevnosti*;

mechaniku tuhých těles dále dělíme na

statiku, tj. nauka o silách a jejich rovnováze,

kinematiku, tj. nauka o pohybech těles v prostoru a čase bez ohledu na působící síly,

dynamiku, která vyšetřuje pohyb těles s ohledem na působící síly a setrvačné vlastnosti zkoumaných těles;

b) mechaniku tekutin

- kapalin, tj. *hydromechaniku*,
- plynů, tj. *aeromechaniku*;

mechaniku tekutin dělíme na *statiku* a *dynamiku*.

Část mechaniky, která se zabývá změnami vlastností těles všech skupenství působením tepla a zkoumá základní zákonitosti v této oblasti, se nazývá *termika*. Užším oborem, zaměřeným na řešení technických problémů, je *termomechanika*.

1.2 Základní pojmy a veličiny

V mechanice se setkáváme v podstatě s jedinou vlastností hmoty, nazývanou *hmotnost*. Výrazem *hmota* budeme rozumět všechno, co je složeno z molekul a atomů, *fyzikálním tělesem* omezený soubor molekul a atomů.

1 Úvod do mechaniky

Základními vlastnostmi fyzikálního tělesa jsou: *hmotnost, prostor, čas.*

Jsou to *základní fyzikální veličiny* (mezinárodní soustavy jednotek - SI) a jejich jednotky jsou *základní jednotky*.

Jednotkou hmotnosti je 1 mezinárodní kilogram (kg). Je to hmotnost mezinárodního prototypu kilogramu (platinoiridiového válce) uloženého v Mezinárodním úřadu pro míry a váhy v Sevres u Paříže.

Jednotkou času je 1 sekunda (s). Je to doba trvání 9 192 631 770 period záření, které přísluší přechodu mezi dvěma velmi jemnými hladinami základního stavu atomu cesia 133.

Základem prostorových měření je měření délky. *Jednotkou délky* je 1 mezinárodní metr (m). Je to délka dráhy, kterou proběhne světlo ve vakuu za dobu $\frac{1}{299\,792\,458}$ sekundy.

Fyzikální veličina, která má za všech okolností stejnou hodnotu, se nazývá *konstanta*.

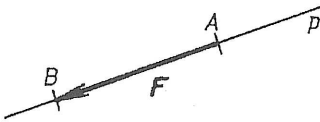
Číselná hodnota veličiny je číslo, které udává, kolikrát je veličina větší (menší) než zvolená jednotka veličiny. Rovnicí zapsaný vztah mezi číselnými hodnotami veličin se nazývá *rovnice číselných hodnot*. Tato rovnice je **závislá** na volbě jednotek, musí obsahovat jednotky všech veličin, jejichž číselné hodnoty se do rovnice dosazují (součiny jednotek se přitom oddělují tečkou). Rovnice číselných hodnot se používají zejména při udávání výpočtových vzorců.

Píšeme např., že délka $l = 25$ mm, rychlost v [$\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$] = $3,6 v$ [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$].

Veličinnové rovnice uvádějí vztahy mezi fyzikálními veličinami. Tyto rovnice **nejsou závislé** na volbě jednotek, jednotky veličin v nich obsažených se neuvádějí. Používají se hlavně při obecných výpočtech.

Skalární veličiny, skaláry, je možno charakterizovat pouze velikostí vyjádřenou v příslušné jednotce, např. hmotnost, čas, mechanická práce.

Má-li veličina kromě velikosti i určitý orientovaný směr, tzn. je udáno působíště, směr (vektorová přímka, nositelka) a smysl (orientace), je to *vektorová veličina, vektor*. Každý vektor lze znázornit orientovanou úsečkou (obr. 1), což používáme při grafickém řešení úloh, v nichž se vyskytuje např. síla, rychlost a zrychlení. Vektor, jehož velikost je rovna nule, se nazývá *nulový vektor*.



Obr. 1. Grafické určení vektoru: vektorová přímka p je nositelka - udává směr vektoru, bod A je působíště, šipka udává orientaci (dle úmluvy je doprava a vzhůru smysl kladný, doleva a dolů záporný), velikost vektoru (síly) F se určí jako délka úsečky AB (podle měřítka - např. $1 \text{ mm} \hat{=} 10 \text{ N}$)

Odvozené veličiny

V mechanice pracujeme s pojmy síla, rychlost, zrychlení apod. Tyto *fyzikální veličiny*, které používáme ke kvantitativnímu popisu jevů, stavů i vlastností hmotných těles, jsou přesně definovány (určeny) fyzikálními zákony nebo rovnicemi. Lze je vyjádřit pomocí uvedených tří základních veličin (hmotnost, prostor, čas); obdobně to platí i pro jejich jednotky.

Rychlost v je poměr délky dráhy s v závislosti na čase t :

$$\text{rychlost} = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}}, \quad v = \frac{s}{t} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}.$$

Zrychlení a je přírůstek rychlosti za jednotku času:

$$\text{zrychlení} = \frac{\text{přírůstek rychlosti}}{\text{čas}}, \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \left(\frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{s}} \right) = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}.$$

Síla je fyzikální veličina charakterizující vzájemné působení mezi tělesy, při kterém se mění jejich polohový či pohybový stav, nebo se tělesa deformují; jako je např. tah, tlak, přitahování, odpuzování. Síla bývá označována písmeny velké abecedy, nejčastěji F , R apod.; při větším počtu sil se používají indexy. Jednotkou síly v soustavě SI je 1 newton (N). Je to odvozená jednotka, definovaná jako síla, která uděluje tělesu s hmotností 1 kg zrychlení $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Dříve, v tzv. technické soustavě, byl jednotkou síly 1 kilopond (kp); $1 \text{ kp} \hat{=} 9,81 \text{ N}$. Velikost síly F budeme značit $|F| = F$. Při grafickém řešení se volí měřítko délky (m_d); např. na obr. 1 z délky úsečky AB lze určit velikost síly F ($1 \text{ mm} \hat{=} 10 \text{ N}$).

Ve statice budeme používat tyto jednotky SI:

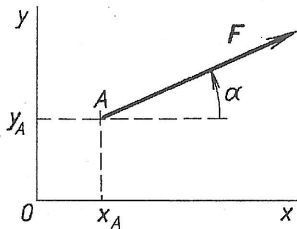
Základní jednotky			Odvozené jednotky		
Délka	Hmotnost	Čas	Rychlost	Zrychlení	Síla
			$\frac{\text{dráha}}{\text{čas}}$	$\frac{\text{přírůstek rychlosti}}{\text{čas}}$	hmotnost \cdot zrychlení
m	kg	s	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	N ($\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

1 Úvod do mechaniky

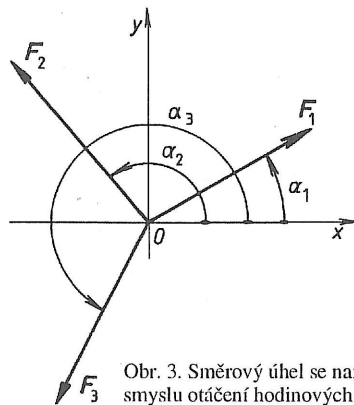
1.3 Určení síly v rovině

Polohu *působíště síly* v rovině lze určit jako polohu bodu v rovině, tj. například pomocí pravouhlé soustavy souřadnic Oxy , kde bod O je počátek soustavy souřadnic a x, y jsou osy. Poloha je dána souřadnicemi x, y ; není-li jinak určeno, udávají se souřadnice v milimetrech. *Směr síly* (vektorová přímka, nositelka) je dán úhlem α , tzv. *směrovým úhlem*, který svírá směr síly s kladným směrem osy x (nanáší se proti směru otáčení hodinových ručiček). Na směr (příslušnou polopřímku) se nanáší v daném měřítku *velikost síly*, na konci úsečky se označí *orientace* šipkou (orientovaná úsečka). Zapisujeme $F [x; y; \alpha; N]$ - obr. 2, 3.

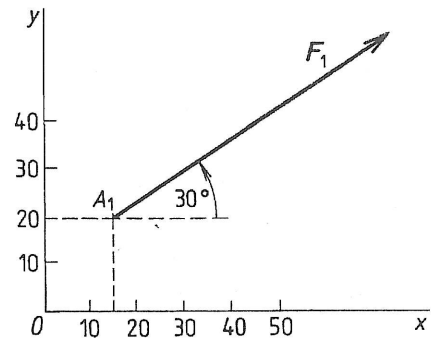
V praxi je působíště síly dáno kloubem, podporou apod. Směr bývá často dán zatíženým lanem nebo prutem.



Obr. 2. Určení síly v rovině



Obr. 3. Směrový úhel se nanáší proti směru otáčení hodinových ručiček



Obr. 4

Příklad

Určete a nakreslete polohu působíště síly A_1 v rovině a směr i velikost síly pro toto zadání: $F_1 [15; 20; 30^\circ; 430 \text{ N}]$, $m_d: 1 \text{ mm} \hat{=} 10 \text{ N}$.

Řešení (obr. 4).

Účinek síly, který se neprojeví změnou pohybového stavu tělesa jako celku (např. deformace tělesa, tj. změna tvaru a objemu působením síly), se nazývá *statický účinek* síly. Je však nutno hledat také souvislost mezi silou a jejím *dynamic- kým účinkem* na těleso, tj. změnou pohybového stavu tělesa, na něž síla působí. Tomu se budeme věnovat v následujícím výkladu.

Kontrolní otázky

1. Jak lze rozdělit mechaniku?
2. O čem pojednává statika, kinematika a dynamika?
3. Jak se dělí fyzikální veličiny a jak jsou určeny?
4. Jaké jsou základní veličiny a jak jsou definovány?
5. Co je síla, jak se měří?
6. Jak je síla určena v rovině?

2 POHYBOVÉ ZÁKONY

Základní zákony mechaniky platné pro podmínky pohybu vyjádřil anglický fyzik *Isaac Newton* (1643 – 1727) ve svém stěžejním díle *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687). Vycházel z vlastních pokusů a zkušeností i z myšlenek svých předchůdců, italského fyzika Galilea Galileiho (1564 – 1642) a holandského fyzika Christiana Huygense (1629 – 1695).

Jedná se o tzv. *klasickou mechaniku*, též nazývanou *Newtonova mechanika*.

Základ klasické mechaniky tvoří tři *Newtonovy pohybové zákony*, někdy nazývané *Newtonovy principy*.

2.1 První pohybový zákon – zákon setrvačnosti

Každé těleso setrvává ve stavu klidu nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, pokud není nuceno vnějšími silami tento svůj stav změnit.

O platnosti tohoto zákona, objeveného Galileo Galileiem, se můžete každodenně přesvědčit. Například při rozjíždění či brzdění dopravního prostředku, v němž budete stát.

2.2 Druhý pohybový zákon – zákon síly

Působí-li na těleso síla (F), udělí mu vždy určité zrychlení (zpoždění) (a), které je přímo úměrné hmotnosti tělesa (m). Tato síla se nazývá zrychlující (brzdící) a je rovna součinu hmotnosti tělesa a jeho zrychlení (zpoždění):

$$F = m \cdot a.$$

Jedná-li se o sílu, která je projevem zemské přitažlivosti, je tato síla nazývána *tíhová síla*, nebo *tíha*, a platí:

$$G = m \cdot g,$$

kde g je tzv. *tíhové zrychlení* (v našich zeměpisných šířkách $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

2.3 Třetí pohybový zákon - zákon akce a reakce

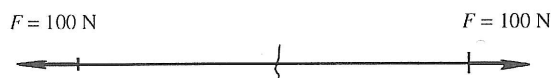
Nazveme-li sílu, jejíž jedno těleso působí na druhé, *akce* a sílu, jíž naopak druhé těleso působí na první, *reakce*, platí tento zákon: *Každá akce způsobuje vždy stejně velkou reakci opačného smyslu*, tj. sílu stejné velikosti, stejného směru, ale opačného smyslu (opačné orientace).

Platnost tohoto zákona vzájemného působení, který je již 300 let starý, si můžeme ověřit např. na loďce na vodní hladině. Vyskočíme-li z loďky na břeh, bude se loďka pohybovat od břehu.

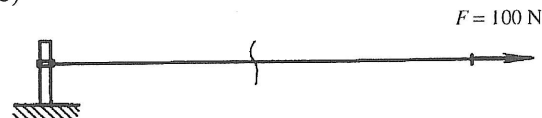
Úloha

Na obr. 5 je znázorněno lano, na něž působí síly F . Jakou silou je namáhán průřez lana v případě a) a jakou v případě b)?

a)



b)



Obr. 5

(Výsledek: a), b) 100 N.)

2 Pohybové zákony

Kontrolní otázky

1. Uveďte příklady, kde se v praxi setkáváme se zákonem setrvačnosti.
2. Určete velikost tíhové síly tělesa o hmotnosti 200 kg.
3. Uveďte příklady, kde se v praxi setkáváme se zákonem akce a reakce.
4. Jak chápete zákon setrvačné síly?
5. Jakou silou je namáhán průřez lana, působí-li na jednom jeho konci síla 120 N a na druhém v opačném směru síla 100 N?

3 VAZBY (PODPORY) A REAKCE

Těleso v prostoru, příp. v rovině, může být buď volné nebo vázané (např. k rámu). Vázání těles způsobí vzájemné silové působení, které může mít různou podobu.

Definujeme-li sílu jako *vzájemné působení* těles, znamená to, že se tato tělesa vzájemně geometricky dotýkají. Dotykem na sebe vzájemně působí silami (reakcemi) a současně je tím omezena i jejich vzájemná pohyblivost.

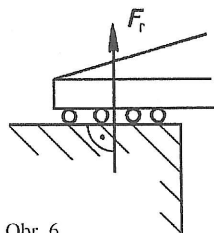
Vazby (podpory) se posuzují podle toho, jak omezují pohyb tělesa, tzn. kolik volnosti tělesu odebírají. Těleso může být vázano v jednom nebo několika bodech, čímž vznikají různé druhy uložení s různou pohyblivostí. *Volné podpory* dovolují posuvný pohyb pouze v jednom směru; v tomto směru musí působit *vazbová síla*. Podobným způsobem působí lanový (či řetězový) závěs, vzpěry, táhla apod., které tomuto požadavku vyhovují a určují i směr vazbové síly. *Pevné podpory* (klouby) dovolují pouze otáčení, vazbová síla má neznámý obecný směr, a proto se rozkládá v rovině na dvě složky. Skutečná uložení lze idealizovat na uložení v bodech.

Je-li těleso volně položeno na podložce, působí na ni svojí vlastní tíhou, která vyvolává stejně velkou, ale v opačném smyslu působící sílu (reakci). Podobně je tomu např. u hřídele, uloženého ve dvou ložiskách, v nichž vyvolává dvě reakce, které jsou v rovnováze s tíhou hřídele. Při odstranění podpor, tj. *uvolnění*, by došlo ke změnám v silových poměrech, a proto musíme zavést v podporách síly, které v nich působí - reakce (podle 3. Newtonova zákona).

Reakce jsou tedy síly, kterými vazby (např. podpory) působí na tělesa v klidu a udržují je v klidu, v rovnováze.

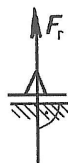
3.1 Volné vazby (podpory)

U volných podpor lze určit působiště a směr reakcí.

Uložení nosníků

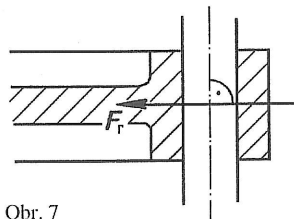
Obr. 6

Schematické zázornění

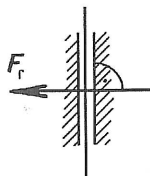


Směr reakce

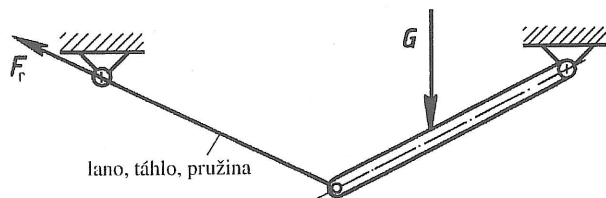
Vždy kolmý ke stykové ploše.

Vodicí ložisko

Obr. 7



Vždy kolmý k ose ložiska.

Závěs

Obr. 8

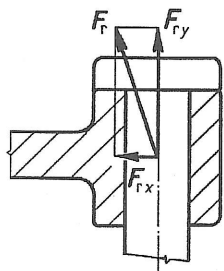
Shodný se směrem lana, táhla, pružiny.

3 Vazby (podpory) a reakce

3.2 Pevné vazby (podpory)

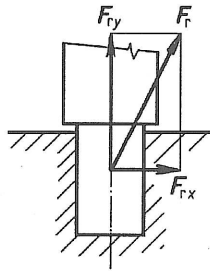
U pevných podpor je známé pouze působíště reakce. Směr reakce je obecně *šikmý* a je nutno jej zjistit (z podmínek rovnováhy); je závislý na velikosti jednotlivých složek reakce.

Závěsné ložisko



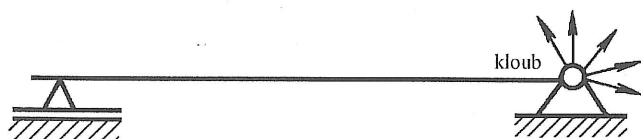
Obr. 9

Patní ložisko



Obr. 10

Kloub



Obr. 11

Kontrolní otázky

1. Co jsou to reakce?
2. Jaké druhy podpor znáte?
3. Jaký směr má reakce u volných podpor?
4. Jaký směr má reakce u pevných podpor?
5. Co znamená uvolnění tělesa?

4 ZÁKLADY STATIKY TUHÝCH TĚLES

Statika je obor mechaniky, který pojednává o skládání, rozkládání a rovnováze sil.

Skládání sil je pochod, kdy účinek několika sil (dokonce neomezeného množství sil) na těleso působících nahradíme silou jedinou, tzv. *výslednicí (rezultantou)*. Výslednici označujeme F_R .

Rozkládání sil je pochod opačný ke skládání. Při rozkládání sil je účinek jedné síly nahrazen dvěma silami v rovině a třemi silami v prostoru. Jedním rozkladem nelze sílu rozložit do více směrů, než je uvedeno.

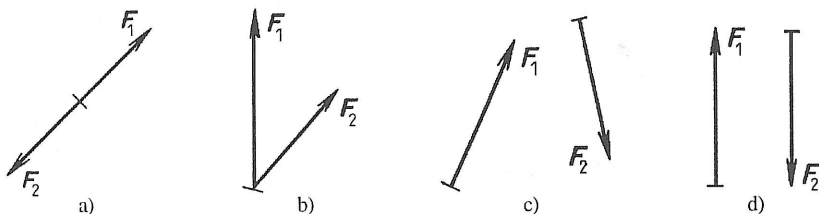
Rovnováha sil je stav, kdy se účinek sil, které na těleso působí, navzájem ruší. Výsledná síla je rovna nule - délka výslednice je nula.

Z 2. Newtonova zákona vyplývá, že je-li výsledná síla rovna nule, musí být zrychlení rovno nule, protože neexistuje hmotnost, která by byla rovna nule. Těleso je tedy buď v klidu, nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, a síly na něj působící zjistíme z podmínek rovnováhy.

Skutečnost, že při rovnováze se účinek sil navzájem ruší, neznamená, že těleso není namáháno (taženo, stlačováno). Ve statice jsou považována tělesa za dokonale tuhá, proto sledujeme pouze jejich pohybový stav. Skutečná tělesa při zatížení mění svoji strukturu, roztahují se nebo smršťují. Vzniklé změny jsou pro silová řešení zanedbatelné.

4.1 Soustava sil v rovině

Soustavu sil v rovině tvoří obecně množina sil F_i ($i = 1, \dots, n$, kde n je přirozené číslo), které všechny působí v jedné rovině. Vektory sil mohou mít různou vzájemnou polohu - obr. 12a) až d).



Obr. 12. Vektory sil v rovině
a) leží v jedné přímce,
b) jsou různoběžné a protínají se v jednom bodě,
c) jsou různoběžné a neprotínají se v jednom bodě,
d) jsou rovnoběžné

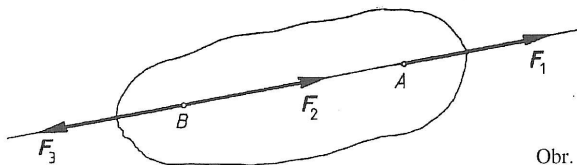
4.2 Skládání, rozkládání a rovnováha sil v rovině

4.2.1 Síly působící na jedné přímce

V praxi se setkáváme i s tím nejjednodušším případem působení sil, kdy síly F_1 až F_n působí na jedné nositelce. Jako příklad uveďme tažení drátu, tažení nákladu několika stroji apod.

Působí-li na těleso v bodě A (obr. 13) síla F_1 a v bodě B na téže vektorové přímce dvě síly F_2 a F_3 navzájem opačného smyslu, jejichž velikost je rovna velikosti síly F_1 , ruší se účinky sil F_1 a F_3 . Na dané těleso působí jen výsledná síla F_2 , působištěm není bod A, ale bod B. Závěr:

Sílu lze po její vektorové přímce libovolně posunovat, aniž se tím změní její vnější účinky.



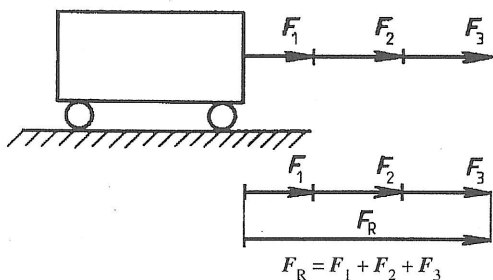
Obr. 13. Posunutí síly po vektorové přímce

Již ze zkušenosti je známo, že účinky všech sil, které působí na jedné nositelce, lze nahradit silou výslednou - výslednicí F_R (obr. 14). Je zřejmé, že se v tomto případě účinek všech sil algebraicky sčítá. Kdyby měla některá ze sil opačnou orientaci (smysl), musel by se její účinek odečíst.

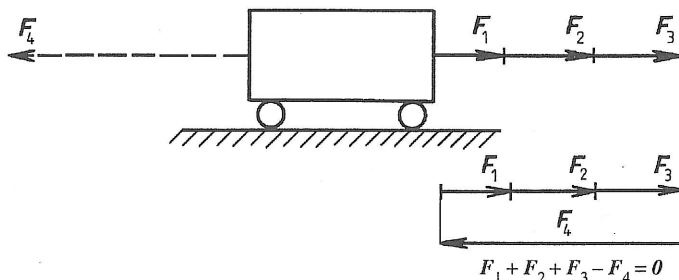
4 Základy statiky tuhých těles

Výslednice sil působících na jedné přímce (nositelce) se rovná algebraickému součtu těchto sil, tj. součtu s ohledem na znaménko:

$$F_R = \sum_{i=0}^n F_i$$



Obr. 14. Skládání sil působících na jedné nositelce



Obr. 15. Rovnováha sil působících na jedné nositelce

Rovnováha sil

Nastane-li případ, že se účinky všech působících sil zruší, tj. že velikost výslednice F_R je rovna nule, potom jsou síly v rovnováze.

$$F_R = \sum_{i=0}^n F_i = 0$$

Síly působící na jedné nositelce jsou v rovnováze, je-li jejich algebraický součet roven nule.

V případě zobrazeném na obr. 14 by na vozík musela působit síla F_4 stejné velikosti jako je velikost síly F_R , ale opačně orientovaná (obr. 15).

Pro grafické řešení z toho vyplývá, že úsečka znázorňující výslednici musí mít délku rovnu nule. Síla F_4 je silou, která je se silami F_1, F_2 a F_3 v rovnováze.

Úloha

Na vozík působí na jedné nositelce zleva doprava síly $F_1 = 100$ N, $F_2 = 200$ N, $F_3 = 350$ N a z pravé strany doleva $F_4 = 200$ N, $F_5 = 300$ N. Neuvažujeme-li odpory, jakým směrem se bude vozík pohybovat?

(Výsledek: Doprava; $F_R = 150$ N.)

Příklad

Loď plující proti větru je poháněna lodním šroubem silou $F_1 = 12\,000$ N, což jí stačí právě k překonání odporu vody $F_2 = 8\,000$ N a odporu vzduchu F_3 . Jaký je odpor vzduchu?

Řešení:

$$F_1 - F_2 - F_3 = 0, \quad F_3 = F_1 - F_2, \quad F_3 = 12\,000 \text{ N} - 8\,000 \text{ N} = 4\,000 \text{ N}.$$

Odpor vzduchu je 4 000 N.

4.2.2 Různoběžné síly se společným působištěm

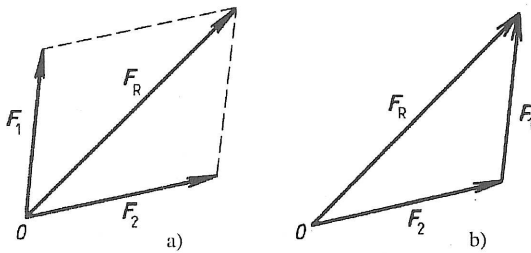
Nositelky sil působících v rovině mají často různé směry. Proto nelze při zjišťování výslednice sčítat síly (jakožto vektory) algebraicky, ale vektorově (geometricky). Říkáme, že síly skládáme.

Výslednici dvou různoběžných sil se společným působištěm lze geometricky určit pomocí rovnoběžníka sil (obr. 16a). Podle tzv. zákona rovnoběžníka (rovnoběžníkového pravidla) je výslednice $F_R = F_1 + F_2$ vektorů F_1 a F_2 určena úhlopříčkou v rovnoběžníku o stranách F_1, F_2 . Je důležité si uvědomit, že výslednice nahrazuje účinky skládaných sil, proto musí její nositelka procházet jejich společným působištěm, čímž je určena i jejich orientace. Místo celého rovnoběžníka sil stačí nakreslit z jednotlivých vektorů jeden ze silových trojúhelníků (obr. 16b). Sčítané vektory se kladou za sebou, aniž se mění jejich směr. Výslednice F_R je co do velikosti a směru určena orientovanou úsečkou vedenou od počátku (působiště) O do koncového bodu lomené čáry. O skládání několika různoběžných sil o společném působišti pojednává čl. 4.2.2.3.

Výslednice dvou různoběžných sil je rovna úhlopříčce silového rovnoběžníka, nebo závěrné straně silového trojúhelníka, se šipkou obrácenou proti sledu skládaných sil.

4 Základy statiky tuhých těles

Při početním řešení určíme velikost výslednice F_R pomocí obecného trojúhelníka OBA (obr. 17). Jsou dány délky dvou stran F_1 a F_2 a úhel jimi sevřený $\beta = [180^\circ - (\alpha_1 - \alpha_2)]$.



Obr. 16. Určení výslednice různoběžných sil pomocí a) rovnoběžníka sil, b) silového trojúhelníka

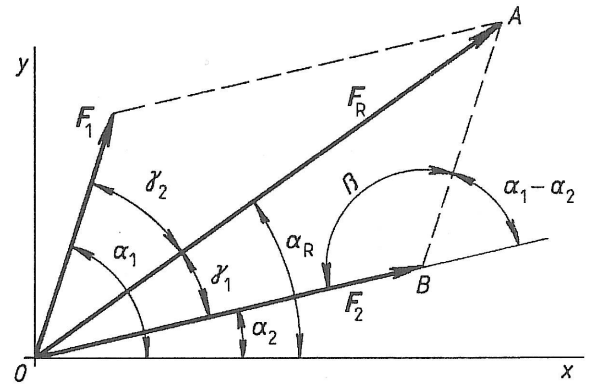
Velikost výslednice F_R vypočteme podle kosinové věty a úhly γ_1 a γ_2 , které svírá výslednice se směry daných sil, podle sinové věty:

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\beta},$$

$$F_1 : F_R = \sin\gamma_1 : \sin\beta \Rightarrow \sin\gamma_1 = \frac{F_1 \sin\beta}{F_R},$$

$$F_2 : F_R = \sin\gamma_2 : \sin\beta \Rightarrow \sin\gamma_2 = \frac{F_2 \sin\beta}{F_R}.$$

Jsou-li síly na sebe kolmé, úloha je jednodušší; výslednice sil se určí pomocí Pythagorovy věty.



Obr. 17. Výpočet výslednice různoběžných sil se společným působištěm

Příklad

Určete velikost a směrový úhel α_R výslednice F_R sil $F_1[0; 0; 75^\circ; 200 \text{ N}]$ a $F_2[0; 0; 15^\circ; 300 \text{ N}]$.

Řešení:

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\beta}, \quad \text{kde } \beta \text{ je úhel sevřený vektory } F_1 \text{ a } F_2,$$

$$\beta = (180^\circ - (\alpha_1 - \alpha_2)) = [180^\circ - (75^\circ - 15^\circ)] = 120^\circ, \quad \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -0,5,$$

$$F_R = \sqrt{(200 \text{ N})^2 + (300 \text{ N})^2 - 2 \cdot 200 \text{ N} \cdot 300 \text{ N} \cdot (-0,5)} = \sqrt{40\,000 \text{ N}^2 + 90\,000 \text{ N}^2 + 60\,000 \text{ N}^2} = \sqrt{190\,000 \text{ N}^2} = 435,9 \text{ N},$$

$$\sin\gamma_1 = \frac{F_1 \sin\beta}{F_R}, \quad \sin\gamma_1 = \frac{200 \text{ N} \cdot 0,866}{435,9 \text{ N}} = 0,397, \quad \gamma_1 = 23^\circ 26',$$

$$\alpha_R = \alpha_2 + \gamma_1, \quad \alpha_R = 15^\circ + 23^\circ 26', \quad \alpha_R = 38^\circ 26'.$$

Výslednice sil F_1, F_2 v rovině je $F_R[0; 0; 38^\circ 26'; 435,9 \text{ N}]$.

Úlohy

1. Určete výslednici sil $F_1[10; 10; 45^\circ; 300 \text{ N}]$ a $F_2[10; 10; 0^\circ; 200 \text{ N}]$.
2. Určete výslednici sil $F_1[-10; 20; 0^\circ; 400 \text{ N}]$ a $F_2[-10; 20; 90^\circ; 500 \text{ N}]$.

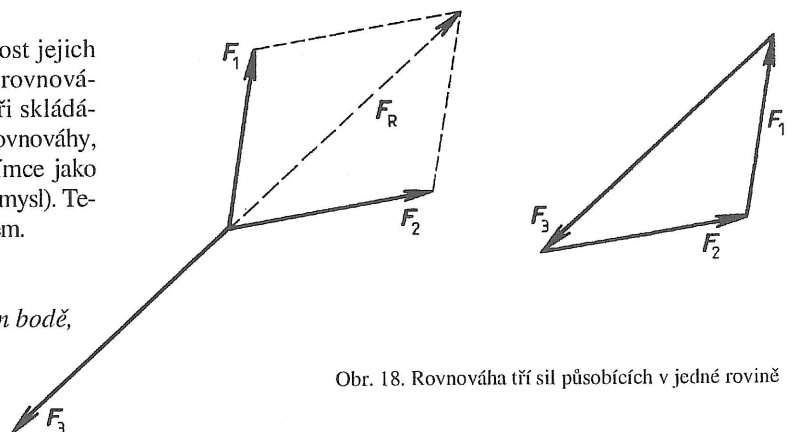
(Výsledky: 1. $F_R[10; 10; 27^\circ 14'; 463,5 \text{ N}]$, 2. $F_R[-10; 20; 51^\circ 20'; 640,3 \text{ N}]$.)

4.2.2.1 Rovnováha tří sil

Působí-li na těleso tři síly F_1, F_2 a F_3 a velikost jejich výslednice je rovna nule, potom jsou tyto síly v rovnováze. Síly tvoří silový trojúhelník podobně jako při skládání sil (obr. 18). Síla F_3 , uvádějící síly F_1 a F_2 do rovnováhy, je stejně veliká a působí na stejné vektorové přímce jako výslednice F_R těchto sil, ale má opačnou orientaci (smysl). Tedy všechny tři síly F_1, F_2 a F_3 procházejí jedním bodem.

Podmínky rovnováhy tří sil v rovině:

- nositelky všech tří sil se musí protínat v jednom bodě,
- síly musí tvořit uzavřený silový trojúhelník,
- šípky všech tří sil musí být v jednom sledu.



Obr. 18. Rovnováha tří sil působících v jedné rovině

Příklad 1

Je dána síla F_1 velikosti 360 N, která působí na rameni $a = 670$ mm pravouhlé páky. Určete sílu F_2 působící na rameni $b = 480$ mm páky a velikost reakce F_{rA} v otočném bodě A páky (obr. 19). Páka je v klidu, nedochází k otáčení.

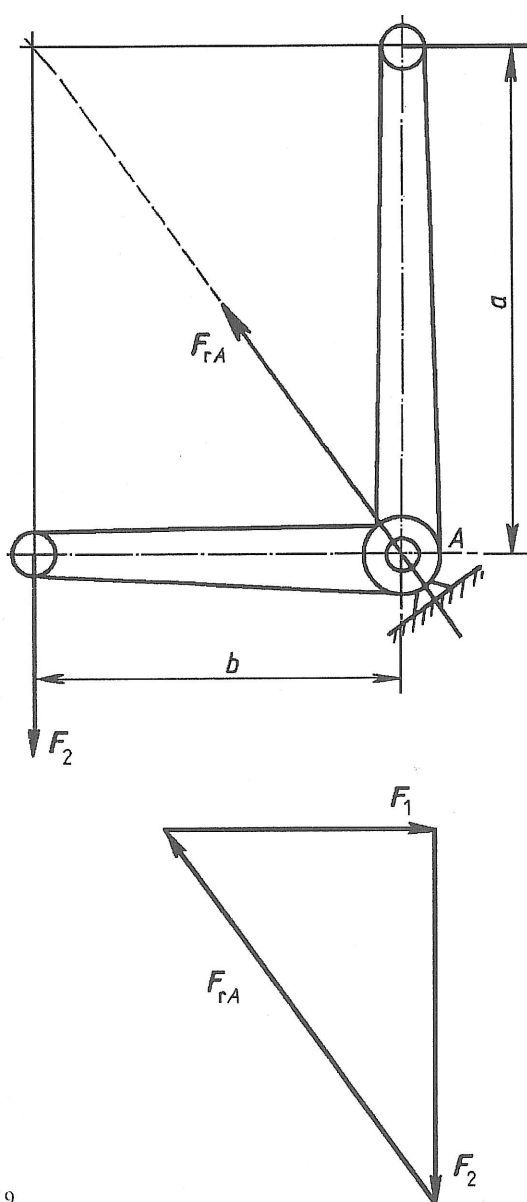
Řešení (obr. 19):

Zjistíme, zda jsou splněny podmínky rovnováhy tří sil v rovině.

1. Prodloužíme nositelky sil F_1 a F_2 tak, aby se protly. Tímto průsečíkem musí procházet i nositelka reakce F_{rA} , neboť síly F_1 , F_2 a F_{rA} jsou v rovnováze.
2. Spojíme průsečík sil F_1 , F_2 s bodem A; tím jsme získali směr reakce F_{rA} .
3. Sestrojíme silový trojúhelník tak, že na rovnoběžku se silou F_1 nanese v měřítku velikost síly F_1 . Koncovými body této orientované úsečky vedeme rovnoběžky se směry sil F_2 a F_{rA} a získáme tak příslušný silový trojúhelník.
4. Orientace (šipka) síly F_1 , která byla dána, určuje smysl šipek u sil F_2 a F_{rA} . Změříme velikost úseček a pomocí daného měřítka zjistíme velikost hledaných sil.

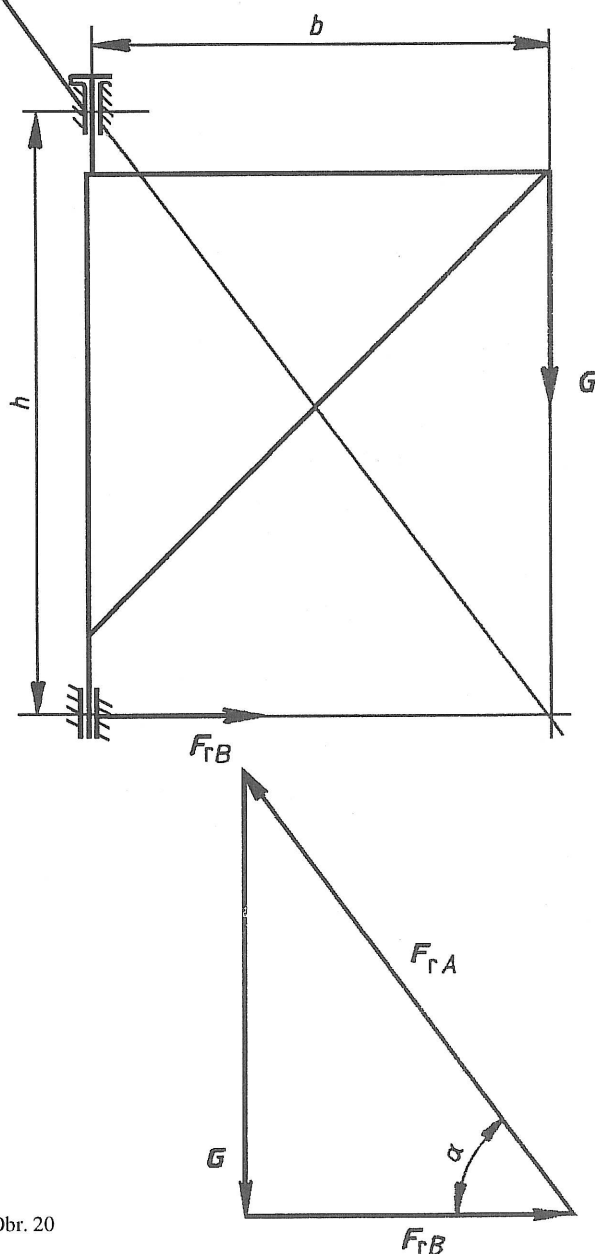
(Výsledek: $F_2 = 500$ N, $F_{rA} = 620$ N.)

Měřítka
 $m_d: 1 : 1$
 $m_F: 1 \text{ mm} \hat{=} 10 \text{ N}$



Obr. 19

Měřítka
 $m_d: 1 : 100$
 $m_F: 1 \text{ mm} \hat{=} 100 \text{ N}$



Obr. 20

4 Základy statiky tuhých těles

Příklad 2

Určete velikost reakcí F_{rA} a F_{rB} u skladištního jeřábu, který je zatížen silou G o velikosti 6 kN na rameni $b = 6$ m, přičemž vzdálenost uložení jeřábu $h = 8$ m (obr. 20).

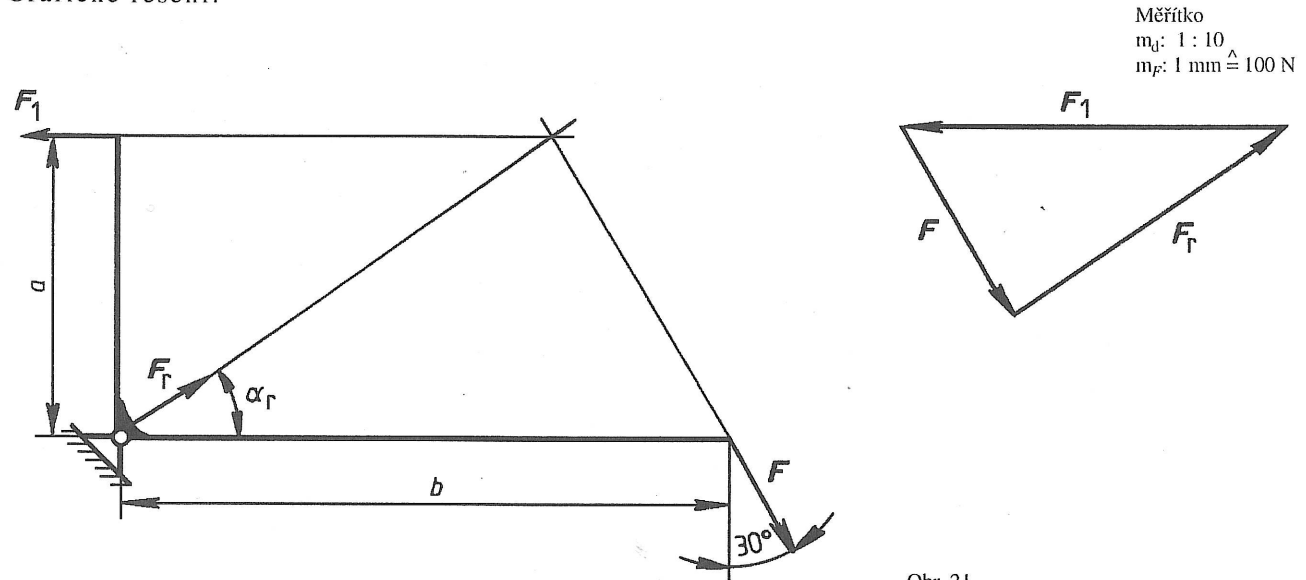
Řešení je na obr. 20.

(Výsledek: $F_{rA} = 7,5$ kN, $F_{rB} = 4,5$ kN, $\alpha = 53^\circ$.)

Příklad 3

Určete graficky velikost síly F a reakce F_r pro rovnováhu na páce zobrazené na obr. 21, kde $F_1 = 5\,000$ N, $a = 400$ mm, $b = 800$ mm; určete též směr reakce α_r .

Grafické řešení:



Obr. 21

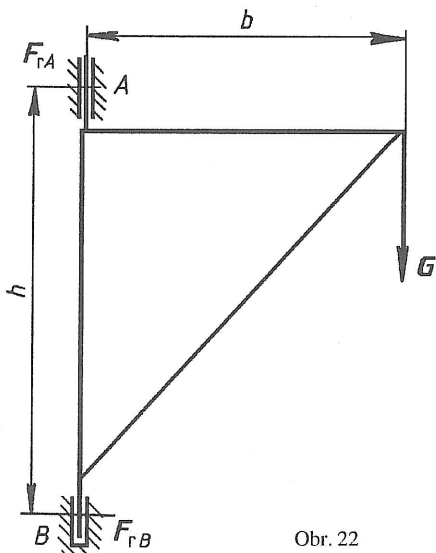
(Výsledek: $F = 2\,900$ N, $F_r = 4\,320$ N, $\alpha_r = 36^\circ$.)

Výpočet provedeme v kap. 9, kde se seznámíme s podmínkami rovnováhy, které jsou nutné pro početní řešení. Těleso musí být v rovnováze proti posunutí a otáčení. Rovnováha při otáčení těles zde ještě nebyla řešena.

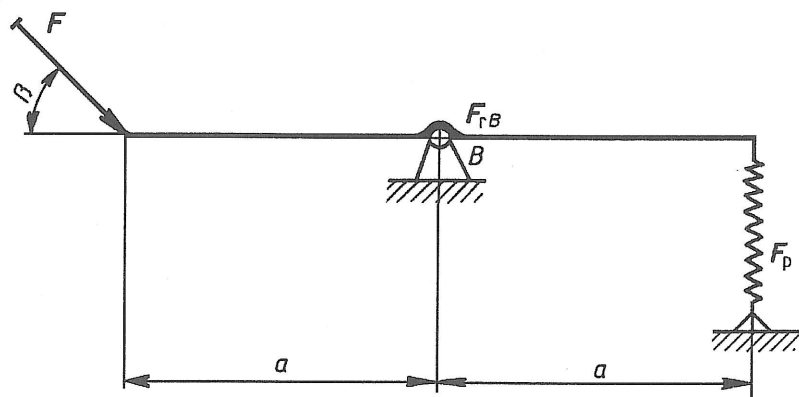
Úlohy

1. Určete síly v uložení konzolového jeřábu nosnosti $G = 5$ kN (obr. 22) ve vodicím ložisku A a v patním ložisku B. U patního ložiska B určete také úhel α , který svírá reakce se svislou stojnou jeřábu. Rozměry jeřábu jsou $h = 8$ m, $b = 6$ m.

(Výsledek: $F_{rA} = 3,75$ kN, $F_{rB} = 6,25$ kN, $\alpha = 36^\circ 50'$.)



Obr. 22



Obr. 23

4 Základy statiky tuhých těles

2. Určete sílu F_p v pružině a reakci F_{rB} v otočném bodě B u rovnoramenné páky (obr. 23), která je zatížena silou $F = 300$ N pod úhlem $\beta = 45^\circ$, rameno páky $a = 600$ mm. Určete také velikost úhlu α , který svírá reakce F_{rB} v kloubu B se svislým směrem.

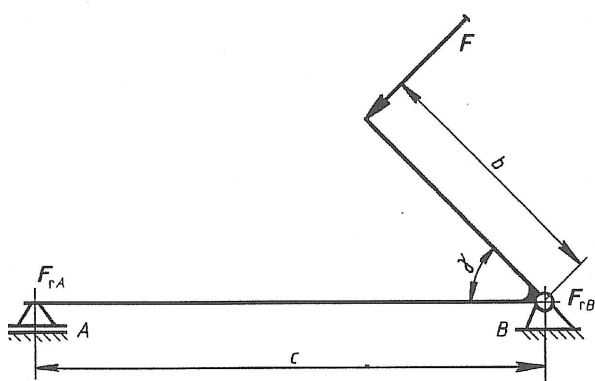
(Výsledek: $F_p = 212$ N, $F_{rB} = 475$ N, $\alpha = 24^\circ 6'$.)

3. Určete reakce F_{rA} ve volné podpoře A a F_{rB} v kloubu B úhlové páky (obr. 24), která je zatížena silou $F = 600$ N, úhel ramen páky $\gamma = 45^\circ$, rozměry ramen jsou $b = 600$ mm, $c = 1\ 200$ mm. Určete také velikost úhlu δ , který svírá reakce F_{rB} v kloubu B s vodorovným ramenem páky.

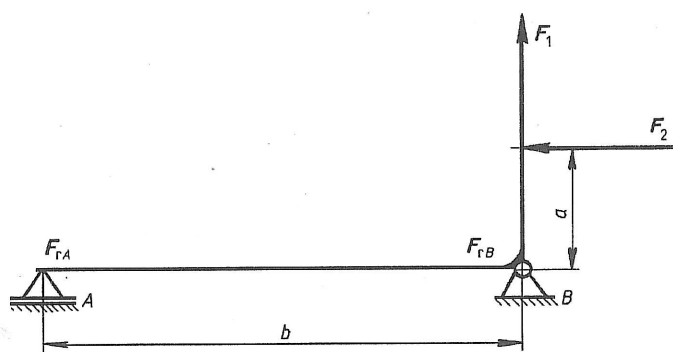
(Výsledek: $F_{rA} = 300$ N, $F_{rB} = 440$ N, $\delta = 16^\circ 15'$.)

4. Určete reakce F_{rA} ve volné podpoře A a F_{rB} v kloubu B úhlové páky (obr. 25), která je zatížena silami $F_1 = 20$ N a $F_2 = 25$ N, délky ramen jsou $a = 300$ mm, $b = 1\ 200$ mm. Určete také úhel α , který svírá reakce F_{rB} v kloubu B s vodorovným ramenem páky.

(Výsledek: $F_{rA} = 6,25$ N, $F_{rB} = 36,25$ N, $\alpha = 46^\circ 25'$.)



Obr. 24



Obr. 25

Kontrolní otázky

1. Co je skládání sil?
2. Proč lze sílu po její nositelce posouvat?
3. Jak se zjišťuje výslednice dvou sil se společným působištěm?
4. Jaké jsou podmínky rovnováhy tří sil v rovině?

4.2.2.2 Rozkládání sil

Rozkládání (rozklad) sil je opačný úkon ke skládání sil. Síly rozkládáme proto, abychom poznali jejich účinek v jistých, daných směrech. Daný vektor síly nahradíme při rozkladu vektory (jeho složkami) sil, jejichž směry jsou předepsány a jejichž součet se rovná danému vektoru síly. Jako při skládání sil složky tvoří s rozkládanou silou silový trojúhelník. Šipky složek jdou v jednom sledu proti šipce síly, kterou rozkládáme, protože ta je v podstatě jejich výslednicí.

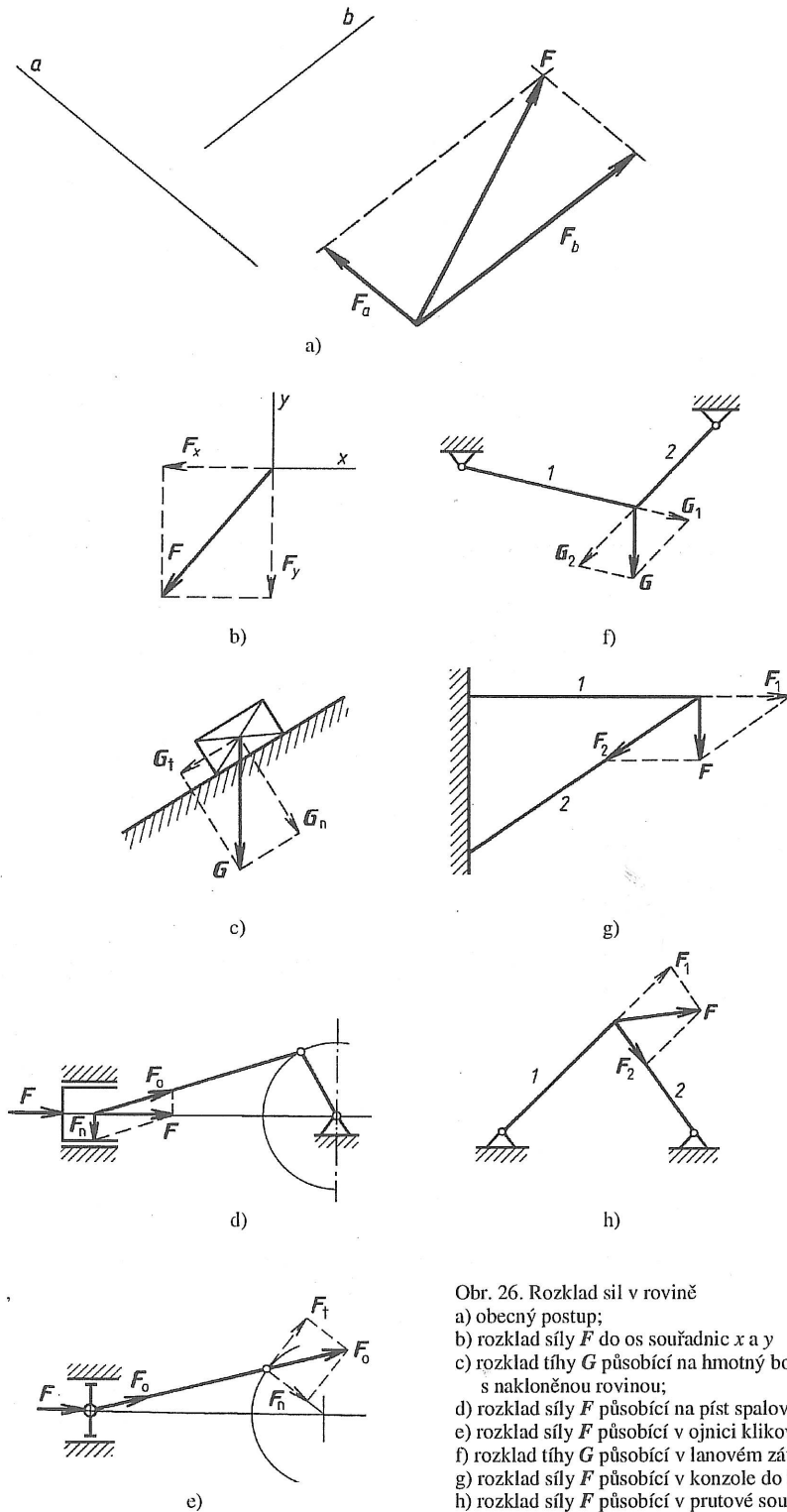
Máme-li např. v rovině sílu F rozložit do směrů a a b , které jsou různoběžné, postupujeme *graficky* tak (obr. 26a), že počátečním bodem (působištěm) a koncem vektoru síly vedeme rovnoběžky s danými směry. Úsečky určené těmito průsečíky a působištěm síly a orientované tak, jak je vyznačeno na obrázku, představují složky F_a a F_b .

Sílu působící na hmotný bod při jeho pohybu rozkládáme často na dvě navzájem kolmé složky F_t a F_n , z nichž první leží v tečně (tzv. *tečná složka*) a druhá v normále (tzv. *normálová složka*) ke dráze v daném bodě dráhy (obr. 26e). Tečný směr v uvažovaném bodě je dán tečnou k dráze hmotného bodu, normálový směr je kolmý na tečnu v daném bodě dráhy.

Na obrázcích 26b až h sledujte grafické řešení některých praktických příkladů.

Při *početním* řešení se k určení velikosti složek použije řešení obecného trojúhelníka, podobně jako při skládání sil. Rozkládáme-li sílu do dvou směrů, které jsou k sobě kolmé, složky se vypočtou z pravouhlého trojúhelníka pomocí goniometrických funkcí.

4 Základy statiky tuhých těles



Obr. 26. Rozklad sil v rovině

- a) obecný postup;
- b) rozklad síly F do os souřadnic x a y
- c) rozklad tíhy G působící na hmotný bod na nakloněné rovině do směru kolméno a rovnoběžného s nakloněnou rovinou;
- d) rozklad síly F působící na píst spalovacího motoru do ojnice a stěny válce;
- e) rozklad síly F působící v ojnici klikového mechanismu na sílu tečnou a sílu působící do kliky;
- f) rozklad tíhy G působící v lanovém závěsu do směrů lan (1, 2);
- g) rozklad síly F působící v konzole do táhla 1 a vzpěry 2;
- h) rozklad síly F působící v prutové soustavě do sil působících ve směru os (1, 2) prutů

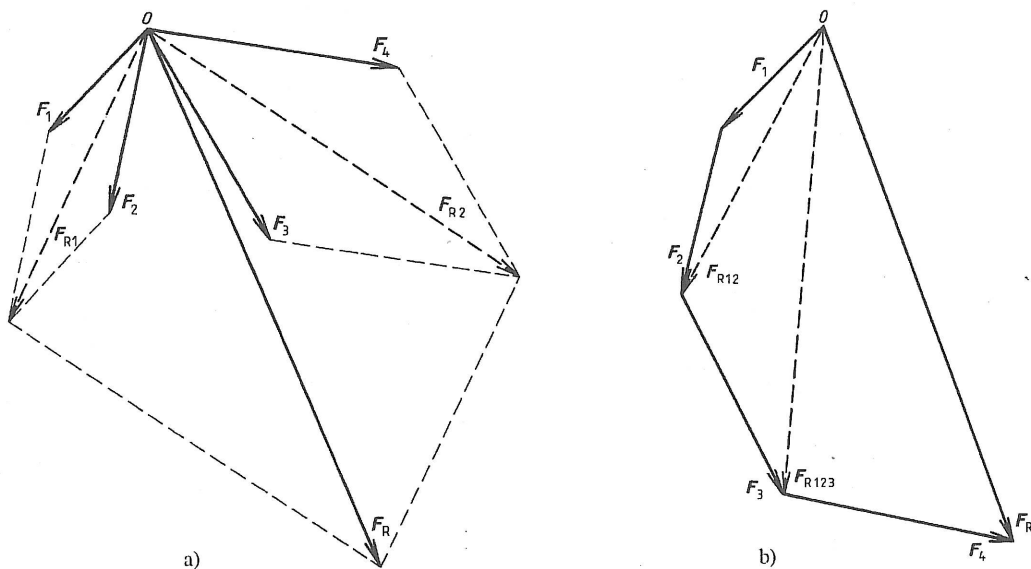
Kontrolní otázky

1. Co nám umožňuje určit volné podpory?
2. Jak určujeme reakce u pevných podpor?
3. Jak se graficky provádí rozklad síly?
4. Jak se nazývají síly, do nichž se daná síla rozkládá a jak se určuje jejich orientace?
5. Jak se početně zjistí velikost složek v případech znázorněných na obr. 26b až h, do nichž se daná síla rozkládá?

4 Základy statiky tuhých těles

4.2.2.3 Skládání několika různoběžných sil se společným působištěm

Působí-li v rovině ve společném působišti více sil (např. F_1 až F_4), je možné získat jejich výslednici F_R různými způsoby. Skládáme síly např. postupně, čímž získáme tzv. *částečné výslednice* (F_{R1} a F_{R2} - obr. 27a) a z nich *celkovou výslednici* F_R . Můžeme též složit síly F_1 a F_2 v částečnou výslednici F_{R12} (obr. 27b), F_{R12} složit se silou F_3 v částečnou výslednici F_{R123} , a tu složit se silou F_4 v celkovou výslednici F_R . Při větším počtu sil jsou uvedené postupy zdlouhavé a mnohdy nás ani částečné výslednice nezajímají. Proto volíme řešení pomocí mnohoúhelníka sil, v němž je výslednice F_R závěrnou stranou s orientací (šipkou) proti sledu skládaných sil. Při řešení úlohy výpočtem využijeme znalostí o rozkládání sil, o výslednici sil působících na jedné nositelce a o skládání sil. Početní řešení silového mnohoúhelníka je obtížné.



Obr. 27. Grafické určení výslednice různoběžných sil se společným působištěm

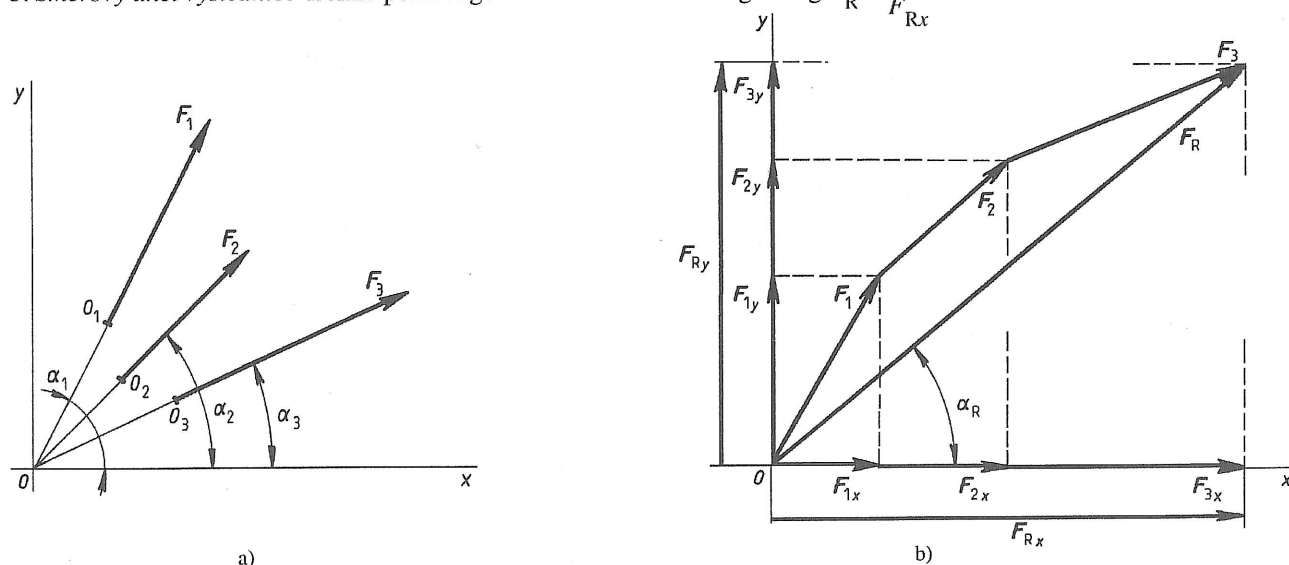
Obecný postup výpočtu výslednice několika sil (obr. 28)

1. Společným působištěm sil vedeme (navzájem kolmé) osy souřadnic x a y (obr. 28a). Směrové úhly značíme α_i ($i = 1, \dots, n$, v našem případě $n = 3$).
2. Rozložíme-li všechny síly do směrů os x a y (obr. 28b), obdržíme složky F_{ix} ve směru x a F_{iy} ve směru y .
3. Zjistíme částečnou výslednici F_{Rx} ve směru x a F_{Ry} ve směru y , přičemž platí:

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad (\text{v našem případě } n = 3).$$

4. Částečné výslednice jsou k sobě kolmé, a proto *délku výslednice* F_R určíme podle Pythagorovy věty: $F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$.

5. *Směrový úhel výslednice* určíme pomocí goniometrické funkce tangens: $\text{tg } \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$



Obr. 28. Výpočet výslednice z několika různoběžných sil se společným působištěm

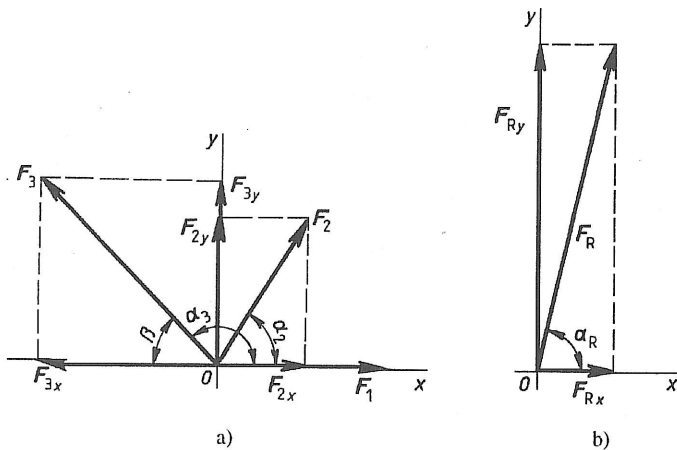
Příklad

Vypočítejte výslednici tří různoběžných sil $F_1 [0; 0; 0^\circ; 200 \text{ N}]$, $F_2 [0; 0; 60^\circ; 200 \text{ N}]$, $F_3 [0; 0; 135^\circ; 300 \text{ N}]$.

Řešení:

Je zřejmé, že dané síly mají společné působiště. Nakreslíme schematický obrázek (nemusí být v měřítku) - obr. 29a. Společným působištěm vedeme soustavu souřadnic Oxy a rozložíme dané síly na složky ve směru os x a y .

$$\begin{aligned} F_{1x} &= F_1, & F_{2x} &= F_2 \cos \alpha_2, & F_{3x} &= F_3 \cos \beta, \\ F_{1y} &= 0, & F_{2y} &= F_2 \sin \alpha_2, & F_{3y} &= F_3 \sin \beta, \end{aligned} \quad \text{kde } \beta = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ,$$



Obr. 29

Určíme částečnou výslednici ve směru os x a y :

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^3 F_{ix} = F_1 + F_{2x} - F_{3x}, \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^3 F_{iy} = F_{2y} + F_{3y},$$

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= 200 \text{ N} + 200 \text{ N} \cdot \cos 60^\circ - 300 \text{ N} \cdot \cos 45^\circ, \\ F_{Rx} &= 200 \text{ N} + 200 \text{ N} \cdot 0,5 - 300 \text{ N} \cdot 0,707 = 87,87 \text{ N}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{Ry} &= 200 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ + 300 \text{ N} \cdot \sin 45^\circ, \\ F_{Ry} &= 200 \text{ N} \cdot 0,866 + 300 \text{ N} \cdot 0,707 = 385,33 \text{ N}. \end{aligned}$$

Velikost výslednice daných sil zjistíme podle Pythagorovy věty:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}, \quad F_R = \sqrt{87,87^2 \text{ N}^2 + 385,33^2 \text{ N}^2} = 395,22 \text{ N}.$$

Směrový úhel výslednice zjistíme pomocí goniometrické funkce tangens:

$$\operatorname{tg} \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_R = \frac{385,33 \text{ N}}{87,87 \text{ N}} = 4,385 \text{ 23}, \quad \alpha_R = 77^\circ 10'.$$

Výslednice daných sil je $F_R [0; 0; 77^\circ 10'; 395,22 \text{ N}]$.

4.2.2.4 Rovnováha několika různoběžných sil se společným působištěm

Již víme, že je-li soustava několika různoběžných sil v rovině v rovnováze, musí být výslednice působících sil rovna nule (při grafickém řešení musí být její vektor 0 mm dlouhý), síly tvoří uzavřený silový mnohoúhelník se šipkami v jednom sledu (obr. 30).

Pro početní řešení z toho vyplývá, že obě složky výslednice jsou rovny nule:

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0.$$

Např. síla F_5 na obr. 30 udržuje síly F_1 až F_4 v rovnováze.

Úlohy

1. Určete síly v prutech I a II věšáku zatíženého břemenem $G = 3 \text{ kN}$, jsou-li rozměry věšáku $a = 3 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$ (obr. 31a).

(Výsledek: $F_I = 4 \text{ kN}$, $F_{II} = 5 \text{ kN}$.)

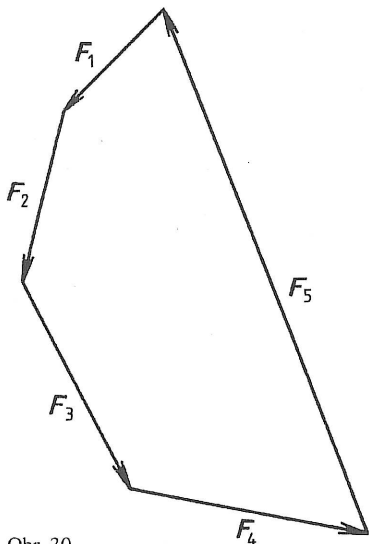
4 Základy statiky tuhých těles

2. Určete síly v prutech I a II otočného jeřábu, je-li zatížen břemenem tíhy $G = 25\,000\text{ N}$, rozměry jeřábu $a = 2\text{ m}$, $b = 2,2\text{ m}$, $c = 4\text{ m}$ (obr. 31b).

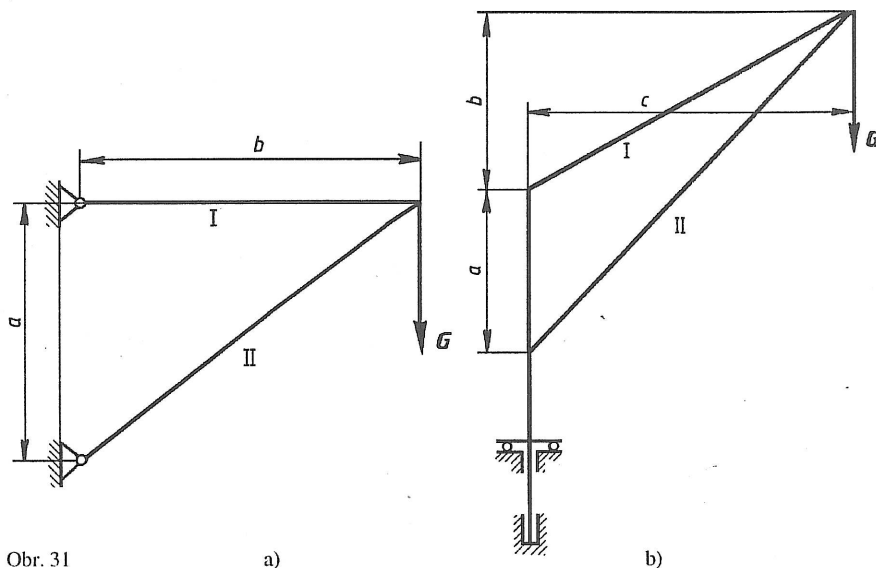
(Výsledek: $F_I = 57\,500\text{ N}$, $F_{II} = 73\,500\text{ N}$.)

3. Určete graficky a početně výslednici sil $F_1[0; 0; 30^\circ; 300\text{ N}]$, $F_2[0; 0; 60^\circ; 200\text{ N}]$, $F_3[0; 0; 120^\circ; 250\text{ N}]$, které mají společné působíště.

(Výsledek: $F_R[0; 0; 66^\circ 30'; 588,6\text{ N}]$.)



Obr. 30



Obr. 31

a)

b)

4. Nahraďte síly $F_1[10; 20; 0^\circ; 400\text{ N}]$, $F_2[10; 20; 60^\circ; 500\text{ N}]$, $F_3[10; 20; 150^\circ; 800\text{ N}]$, $F_4[10; 20; 240^\circ; 1\,000\text{ N}]$, $F_5[10; 20; 300^\circ; 700\text{ N}]$ jedinou silou F_R .

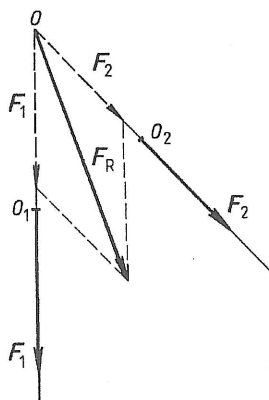
(Výsledek: $F_R[10; 20; 238^\circ; 635\text{ N}]$.)

5. K silám $F_1[-10; 30; 0^\circ; 100\text{ N}]$, $F_2[-10; 30; 160^\circ; 80\text{ N}]$, $F_3[-10; 30; 250^\circ; 70\text{ N}]$ připojte sílu F_4 tak, aby nastala rovnováha.

(Výsledek: $F_4[-10; 30; 91^\circ 20'; 38,43\text{ N}]$.)

4.2.3 Různoběžné síly, které nemají společné působíště

Mají-li dvě různoběžné síly působící v rovině různá působíště O_1 a O_2 , najdeme výslednici F_R stejným způsobem jako při skládání sil se společným působíštěm. Společným působíštěm je v tomto případě průsečík O nositelek obou daných sil (obr. 32). Víme, že sílu lze posouvat po její nositelce, a proto posuneme obě síly do působíště O . Další řešení je již stejné jako u sil se společným působíštěm (obr. 17).



Obr. 32

V technické praxi se často vyskytuje případ zatížení těles, kdy síly působící na těleso mají různá působíště a je třeba znát výsledný silový účinek na těleso, příp. uvést těleso do rovnováhy.

O skládání a rovnováze několika různoběžných sil, které nemají společné působíště, pojednávají odst. 4.2.3.1 a 4.2.3.2.

4.2.3.1 Skládání několika různoběžných sil s různými působíšti

Skládat různoběžné síly v rovině s různými působíšti lze graficky dvojím způsobem: postupným skládáním a pomocí tzv. vláknového mnohoúhelníka.

4 Základy statiky tuhých těles

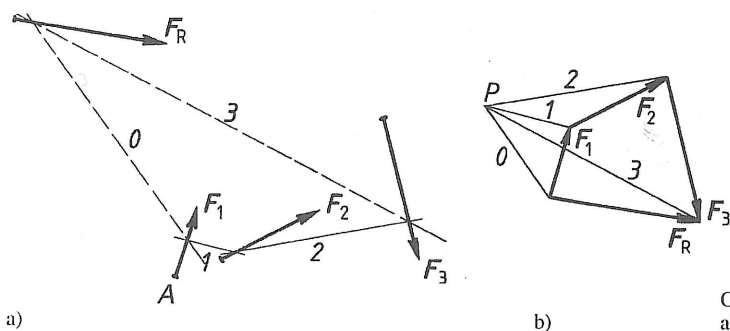
Metoda založená na postupném skládání sil v rovině vychází z poznatku, že nositelky dvou různoběžných sil se vždy protnou. Do získaného průsečíku obě skládané síly posuneme a najdeme jejich částečnou výslednici; tu stejným způsobem složíme s další silou atd. Složením poslední síly s částečnou výslednicí všech předcházejících skládaných sil dostaneme celkovou výslednici F_R .

Je zřejmé, že výslednici jsme našli stejným způsobem jako u sil procházejících jedním bodem. Od předcházejících úloh se liší jen hledání polohy výslednice. Toto grafické řešení je zdlouhavé, zvláště při větším počtu sil, a často i nepřesné. Může nastat i případ, že průsečík nositelek skládaných sil leží mimo nákresnu.

Při grafickém řešení úlohy pomocí tzv. vláknového mnohoúhelníka (obr. 33) řešíme úlohu ve dvou obrazcích. V hlavním obrazci (obr. 33a) je zakreslena daná rovinná soustava sil F_1, F_2, \dots a určujeme polohu výslednice F_R . Ve vedlejším, tzv. složkovém (silovém) obrazci (obr. 33b), určíme nejprve směr a velikost výslednice F_R tak, že sestrojíme mnohoúhelník daných sil.

Mnohoúhelník daných sil sestrojíme takto: k soustavě daných sil připojíme dvě pomocné síly F_0 a $-F_0$, které se navzájem ruší (v silovém obrazci je označíme pouze 0). Zvolíme vhodně bod P , kterým bude procházet nositelka 0 síly 0 . Složíme-li sílu 0 se silou F_1 , dostaneme částečnou výslednici 1 ; tu složíme s další danou silou atd., až složíme všechny dané síly. Ze složkového obrazce je zřejmé, že takto je určena velikost, směr a orientace výslednice F_R . Bod P nazýváme pól, částečným výslednicím říkáme též pólové paprsky (někdy vlákna). Pól volíme tak, aby pólové paprsky svíraly se skládanými silami co největší úhly.

V hlavním obrazci chceme určit polohu výslednice; k tomu využijeme poznatek, že nositelky sil tvořící silový trojúhelník se protínají v jednom bodě. Nositelku výslednice sestrojíme takto: libovolně zvoleným bodem A na nositelce síly F_1 vedeme rovnoběžku s pólovým paprskem 0 a 1 ; bodem, v němž přímka 1 protne nositelku síly F_2 , vedeme rovnoběžku s paprskem 2 , jejím průsečíkem s nositelkou síly F_3 vedeme rovnoběžku s paprskem 3 atd., až určíme průsečík přímky rovnoběžné s posledním pólovým paprskem s rovnoběžkou 0 procházející bodem A . Protože výslednice F_R vznikla složením pomocné síly 0 a částečné výslednice 3 , musí procházet průsečíkem jejich směrů.

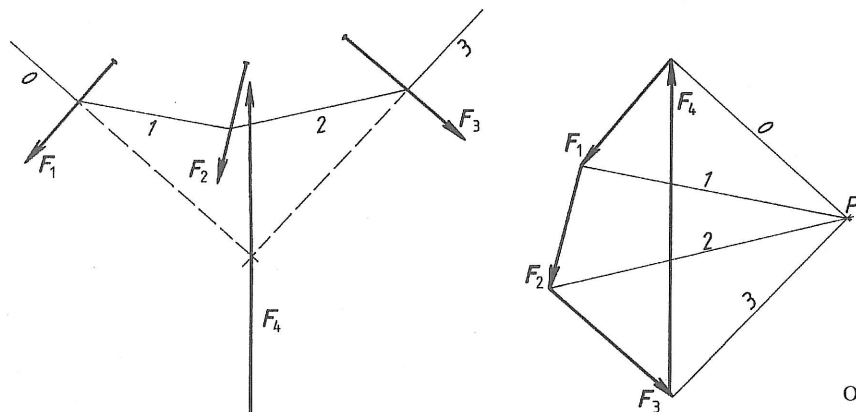


Obr. 33. Skládání několika různoběžných sil s různými působišti
a) určení polohy výslednice, b) určení směru a velikosti výslednice

Výslednice několika různoběžných sil, které nemají společné působiště, je závěrnou stranou silového mnohoúhelníka se šipkou proti sledu skládaných sil. Poloha výslednice je určena průsečíkem krajních vláken uzavřeného vláknového mnohoúhelníka.

4.2.3.2 Rovnováha několika různoběžných sil s různými působišti

Při rovnováze různoběžných sil s různými působišti je délka výslednice sil opět rovna nule. Síly musí tvořit uzavřený silový mnohoúhelník se šipkami v jednom sledu. Kromě tohoto požadavku musí být uzavřen i vláknový mnohoúhelník, určující polohu síly F_4 , která uvádí dané síly do rovnováhy (obr. 34).

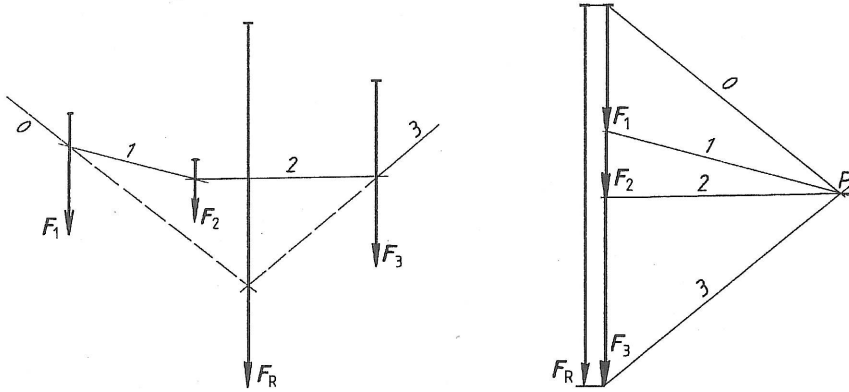


Obr. 34. Síla F_4 je se silami F_1, F_2 a F_3 v rovnováze

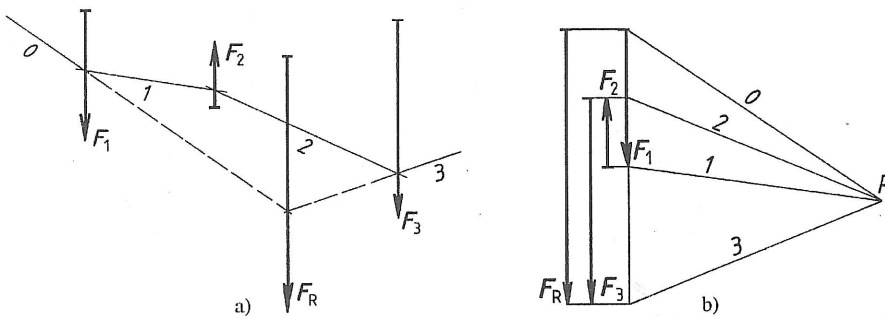
4 Základy statiky tuhých těles

4.2.4 Rovnoběžné síly

Pro grafické řešení skládání, rozkládání a rovnováhy sil je možno použít stejné postupy jako pro různoběžné síly, které neprocházejí jedním bodem. Silový mnohoúhelník přitom přechází v úsečku. Síly se sčítají tak, jako kdyby působily na jedné vektorové přímce. Z toho vyplývá, že výslednice rovnoběžných sil je rovna algebraickému součtu všech sil. Polohu výslednice určíme pomocí vláknového mnohoúhelníka (obr. 35 a 36).



Obr. 35. Určení výslednice rovnoběžných sil se shodnou orientací



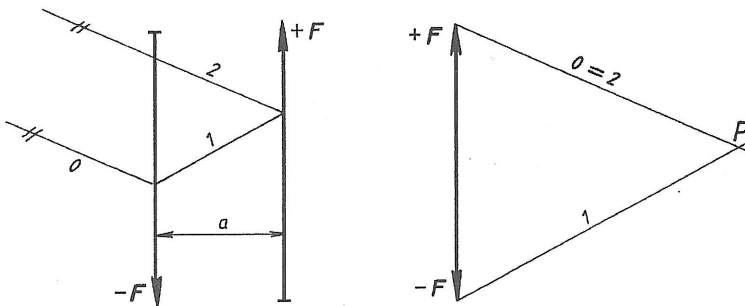
Obr. 36. Určení výslednice rovnoběžných sil; síla F_2 má opačnou orientaci

Má-li některá síla opačnou orientaci než ostatní, postupujeme takto (obr. 36):

Nakreslíme v silovém obrazci (obr. 36b) v měřítku nejprve sílu F_1 , zvolíme pól a paprsky 0 a 1. Nakreslíme sílu F_2 s opačnou orientací a vedeme k její šipce od pólu paprsek 2. Z koncového bodu síly F_2 nanese sílu F_3 (dolů) a vedeme paprsek 3. Počátek síly F_1 a konec síly F_3 určují výslednici F_R .

4.2.4.1 Dvojice sil

Dvě síly, které jsou stejně velké, mají též směr, avšak opačnou orientaci a nepůsobí na téže přímce, se nazývají dvojice sil. Nelze je nahradit jedinou silou, jejich složením získáme opět dvojici sil. Rovina, ve které tyto síly působí, se nazývá rovina dvojice a nejkratší (kolmá) vzdálenost obou sil je rameno dvojice. V praxi se s tímto silovým působením setkáváme např. při řezání závitů, otáčení volantem apod. (obr 37).



Obr. 37. Dvojice sil

Z grafického i početního řešení ($F - F = 0$) je zřejmé, že výslednice $F_R = 0$, ale těleso se působením těchto sil otáčí. Síla má tedy nejen posuvový, ale i otáčivý účinek. I ze zkušenosti je známo, že otáčivý účinek je tím větší, čím větší jsou tyto síly a čím větší je rameno dvojice. Otáčivý účinek je charakterizován momentem M dvojice sil.

Velikost momentu dvojice sil je rovna součinu velikosti síly F a ramena dvojice a :

$$M = F \cdot a \quad (\text{N} \cdot \text{m})$$

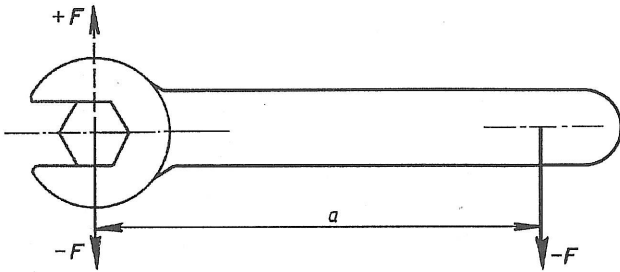
4 Základy statiky tuhých těles

Rozměr momentu je dán součinem rozměru síly a rozměru délky, tj. $N \cdot m$. Moment dvojice sil nezávisí na poloze bodu, vzhledem k němuž jej určujeme (čl. 5.5). Kromě velikosti momentu je důležitý i jeho smysl, který je určen směrem otáčení (smysl opačný ke směru otáčení hodinových ručiček je kladný).

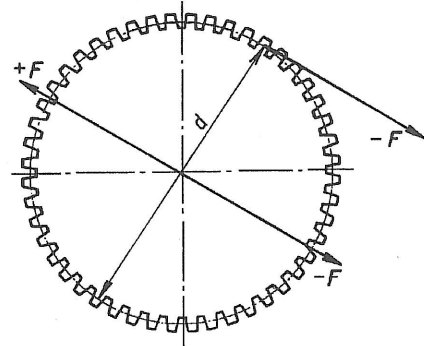
Otáčení kolem osy je způsobeno vždy dvojicí sil.

Příklad 1

Síla $-F$ na rameni a klíče (obr. 38) se tuhostí klíče přenáší do osy šroubu, který svou tuhostí odporuje této síle reakcí $+F$. Síly $+F$ a $-F$ na rameni a tvoří dvojici s momentem $-M = F \cdot a$. Síla $-F$ působí v ose šroubu a způsobuje namáhání ohybem.



Obr. 38. Rozložení sil při otáčení šroubu



Obr. 39. Přenášení obvodové síly ozubeným kolem

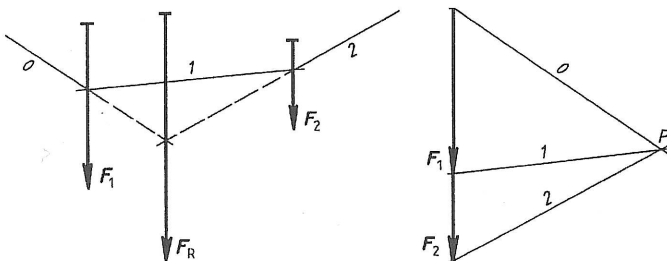
Příklad 2

Ozubené kolo znázorněné na obr. 39 přenáší obvodovou sílu $-F$. Může se zdát, že hřídel, na němž je upevněno ozubené kolo, je namáhán pouze na krut. Přidáme-li však do osy hřídele dvě síly ($+F$ a $-F$), zjistíme, že vznikla ze sil $+F$ a $-F$ dvojice s ramenem $\frac{d}{2}$, momentem $-M = F \cdot \frac{d}{2}$, který zkrucuje hřídel, a síla $-F$ v ose kola způsobí ještě namáhání ohybem.

4.2.4.2 Určení směru a velikosti výslednice rovnoběžných sil, rozklad dané síly do dvou daných směrů s ní rovnoběžných

Budeme uvažovat dvě rovnoběžné síly a) stejného smyslu, b) různých smyslů.

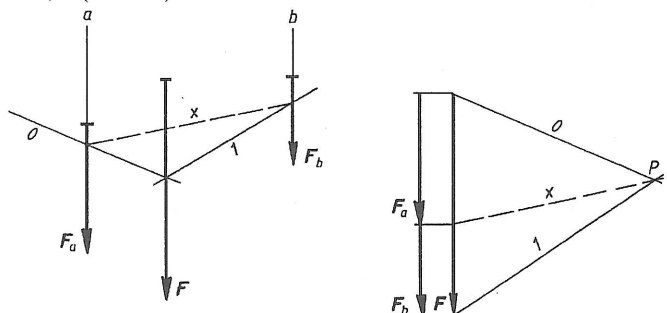
a) Výslednice dvou rovnoběžných sil stejného smyslu (obr. 40)



Obr. 40. Výslednice dvou rovnoběžných sil stejného smyslu

Délka výslednice dvou rovnoběžných sil stejného smyslu se rovná součtu délek těchto sil; výslednice má s nimi stejný směr a smysl, leží mezi nimi (blíže větší síly) a dělí spojnicí působíště sil v nepříímém poměru.

Řešíme opačnou úlohu, tzn. rozklad dané síly F do dvou daných rovnoběžných směrů, které jsou určeny rovnoběžkami a, b (obr. 41):

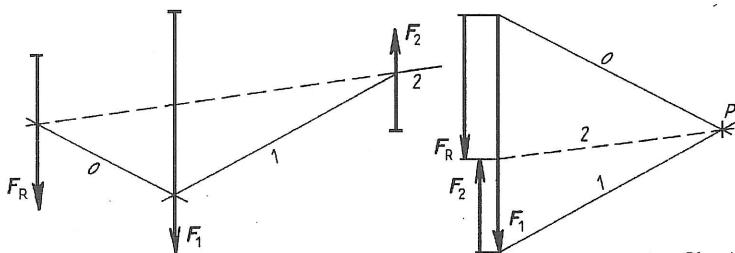


Obr. 41. Rozklad dané síly do dvou daných směrů, kdy rozkládaná síla leží mezi nimi

4 Základy statiky tuhých těles

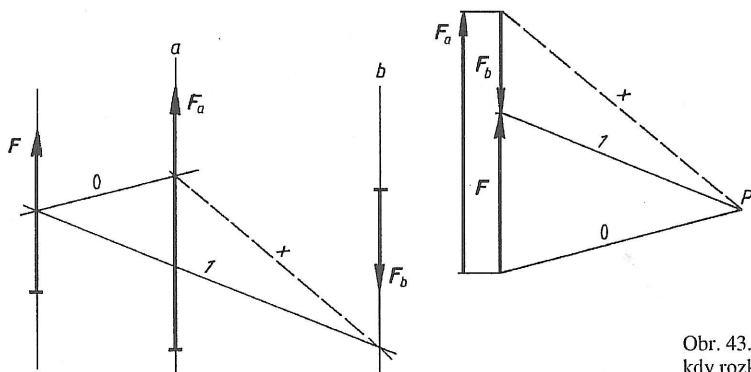
Ze zvoleného pólu P se vedou pólové paprsky ($0, 1$). Body, v nichž rovnoběžky s nimi protnou přímky a, b , určují pařsek x , který veden jako rovnoběžka zpětně pólem P rozděluje sílu F na F_a a F_b .

b) Výslednice dvou rovnoběžných sil různé velikosti (obr. 42) se rovná jejich rozdílu, má smysl větší síly a leží vně obou sil (blíže větší síly).



Obr. 42. Výslednice dvou rovnoběžných sil různých smyslů

Při rozkladu dané síly F do dvou daných rovnoběžných směrů postupujeme obdobně jako v předcházejícím případě. Síla F leží mimo dané směry (obr. 43).



Obr. 43. Rozklad dané síly do dvou daných směrů, kdy rozkládaná síla leží mimo tyto směry

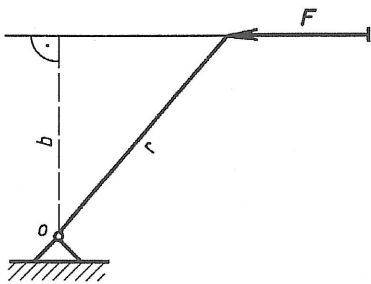
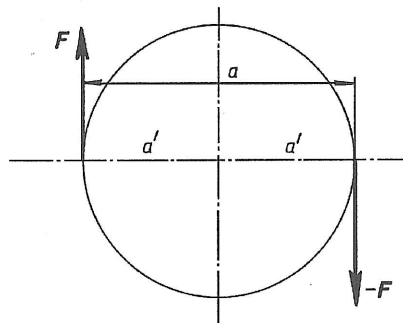
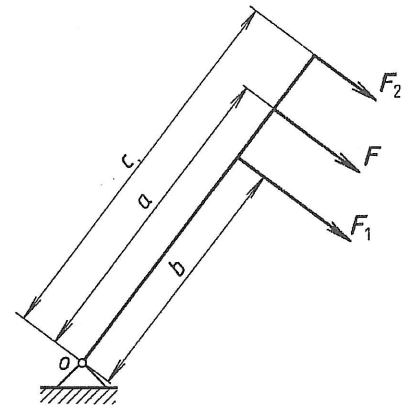
5 MOMENT SÍLY

K důležitým pojmům v mechanice patří *moment síly k ose*, tj. k pevnému otočnému bodu. Velikost momentu síly M k ose o se rovná součinu síly F a její kolmé vzdálenosti b (tj. ramene síly) od této osy (obr. 44):

$$M = F \cdot b.$$

Jak již víme, jednotkou momentu síly je newton metr (N . m).

V obrázku 44 je r délka páky, na níž síla F působí. Síla F není kolmá na páku

Obr. 44. Moment síly $M = F \cdot b$ Obr. 45. Moment točivé dvojice sil $M = -F \cdot a$ 

Obr. 46. Redukce momentů

Z pouhé úvahy a z obr. 45 je zřejmé, že *moment točivé dvojice sil* je: $M = -2 \cdot F \cdot a' = -F \cdot 2a' = -F \cdot a.$

5.1 Redukce momentů

Někdy je třeba nahradit točivý účinek jedné síly točivým účinkem jiné síly, popř. točivým účinkem několika sil. Přitom je nutné, aby se velikosti momentu k danému bodu rovnaly. Musí platit (obr. 46):

$$M = -F \cdot a = -F_1 \cdot b = -F_2 \cdot c, \quad \text{tedy} \quad \frac{F}{F_1} = \frac{b}{a}, \quad \frac{F}{F_2} = \frac{c}{a},$$

je-li $F_2 < F < F_1$, je $b < a < c$.

Síly se stejným momentem jsou v nepřímém poměru s příslušnými rameny.

5.2 Skládání momentů

Působí-li na těleso (páku) současně např. dvě síly F_1, F_2 (obr. 47), platí pro jejich momenty vzhledem k otočnému bodu tento vztah:

$$M_1 = -F_1 \cdot a, \quad M_2 = F_2 \cdot b.$$

Chceme-li zjistit celkový točivý účinek M_R , je nutné působící momenty algebraicky sečíst:

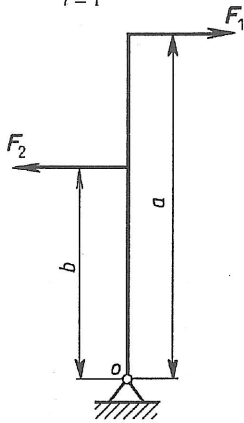
$$M_R = F_2 \cdot b - F_1 \cdot a.$$

Pro několik sil platí obecně tzv. *momentová (Varignonova) věta*:

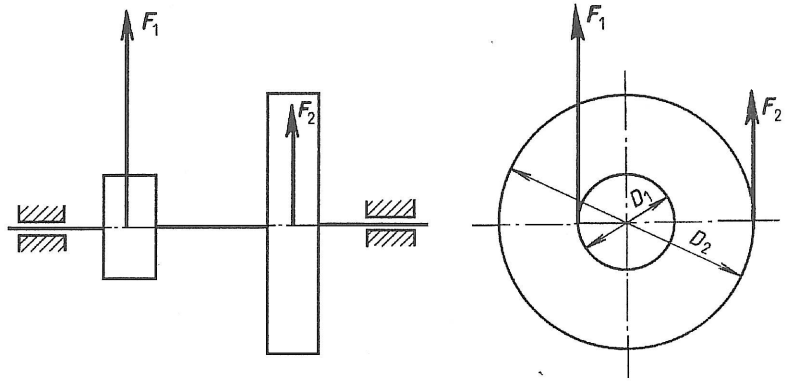
5 Moment síly

U rovinné soustavy sil se moment výslednice vzhledem k libovolnému bodu roviny, v níž leží, rovná algebraickému součtu momentů všech jejích složek v této rovině:

$$M_R = \sum_{i=1}^n M_i.$$



Obr. 47. Skládání momentů



Obr. 48

5.3 Rovnováha momentů

Podobně jako při rovnováze sil je výslednice sil rovna nule, je při rovnováze momentů výsledný moment roven nule:

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0.$$

Momentová podmínka rovnováhy:

Těleso je v rovnováze proti otáčení, jestliže se algebraický součet momentů všech sil (všech dvojic) k ose otáčení rovná nule.

Příklad

Na hřídeli je naklínována řemenice o průměru $D_1 = 200$ mm a řemenice o průměru $D_2 = 300$ mm (obr. 48). Je-li hnací síla $F_1 = 1\,000$ N, jak velká je síla F_2 ?

Řešení:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 M_i &= 0, & -F_1 \cdot \frac{D_1}{2} + F_2 \cdot \frac{D_2}{2} &= 0, \\ -1\,000 \text{ N} \cdot 200 \text{ mm} &= F_2 \cdot 300 \text{ mm}, & F_2 &= 666,67 \text{ N}. \end{aligned}$$

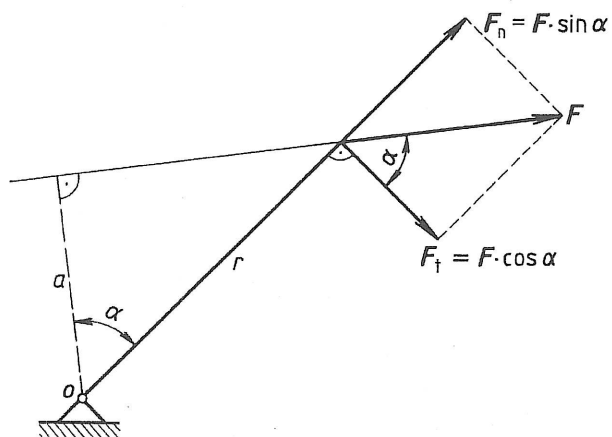
Kontrolní otázky

1. Co je točivá dvojice sil?
2. Jak se určí moment točivé dvojice sil?
3. Co je moment síly a v jakých jednotkách se udává?
4. Jak se určuje smysl momentu?
5. Co je to redukce momentů?

5.4 Velikost momentu

Působí-li síla nebo dvojice sil na těleso (páku) pod jiným úhlem než 90° (obr. 49), rozložíme sílu do složky kolmé k páce F_t a složky ve směru F_n . Moment má pouze síla F_t , síla ve směru páky F_n nemá k otočnému bodu moment, protože její nositelka prochází tímto bodem (délka ramena je rovna nule). Moment se vypočítá buď jako součin délky páky r a velikosti síly kolmé na páku F_t , nebo jako součin velikosti síly F a délky jejího ramene a .

5 Moment síly



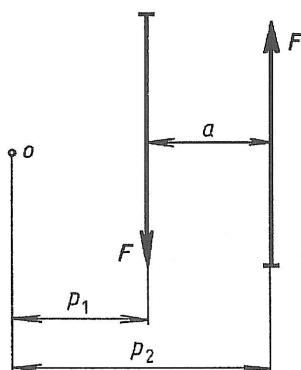
$$\begin{aligned} \text{a) } M &= -F_t \cdot r, \\ M &= -F \cdot \cos \alpha \cdot r; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } M &= -F \cdot a, \\ \cos \alpha &= \frac{a}{r} \Rightarrow a = r \cdot \cos \alpha, \\ M &= -F \cdot r \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Obr. 49. Určení velikosti momentu

5.5 Moment dvojice sil k libovolnému bodu v rovině

Moment dvojice sil vzhledem k libovolnému bodu v rovině dvojice je *stálý* (obr. 50). Proto lze dvojici sil v její rovině libovolně natočit, posunout a přeložit i do jiné roviny, která je s danou rovinou rovnoběžná a tvoří s ní tuhý celek.



$$\begin{aligned} M_1 &= +F \cdot p_2, \\ M_2 &= -F \cdot p_1, \\ M_1 + M_2 &= F \cdot p_2 - F \cdot p_1 = \\ &= F(p_2 - p_1) = F \cdot a. \end{aligned}$$

Obr. 50. Moment dvojice sil k libovolnému bodu v rovině

6 SÍLY PŮSOBÍCÍ NA TĚLESO OTOČNÉ KOLEM OSY

6.1 Statické podmínky pro rovnováhu tělesa v rovině

Těleso otočné kolem osy je představováno pákovým mechanismem různých tvarů, který je silově zatížen. K řešení těchto úloh použijeme dosud získané poznatky o skládání sil a momentech. Ve všech případech půjde o rovnováhu sil působících na ramenech páky a síly v uložení páky (v otočném bodě - kloubu).

Grafické řešení

bylo již probíráno v odst. 4.2.2.1 Rovnováha tří sil (obr. 19, 20 a 21).

Početní řešení:

soustava různoběžných sil v rovině je v rovnováze proti posunutí (tzn. nesmí se posouvat), jsou-li splněny tyto podmínky:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (1)$$

Mimo posunutí musí být soustava sil i v rovnováze proti otáčení, tzn., že také

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0. \quad (2)$$

Podmínky (1) a (2) jsou *statické podmínky rovnováhy v rovině*.

Pomocí statických podmínek pro rovnováhu v rovině lze řešit výpočtem všechny statické úlohy.

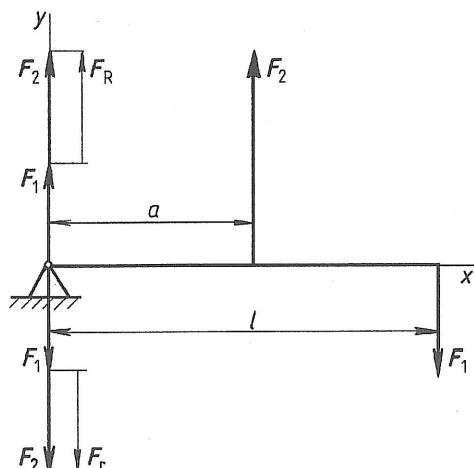
Poznámka:

Pro sestavování rovnic ze statických podmínek rovnováhy budeme dodržovat úmluvu týkající se smyslu působících sil. Za *kladnou* budeme považovat sílu, která působí zleva doprava a směrem nahoru, za *zápornou sílu* tu, která působí zprava doleva a směrem dolů; *kladný moment síly* při otáčení proti směru pohybu hodinových ručiček a *záporný moment síly* při otáčení ve směru pohybu hodinových ručiček.

6.1.1 Rovnováha na páce

Páka je tuhá tyč, která je otočná kolem osy a působí na ní dvě nebo více vnějších sil (obr. 51). Rovnováha na páce nastane, jestliže síly na ni působící nevyvolávají změnu jejího pohybového stavu. Musí být splněna rovnováha silové soustavy, která na páku působí.

Mějme dány rozměry páky a , l a sílu F_1 (obr. 51). Úkolem je určit sílu F_2 a reakci v otočném bodě F_r .



Obr. 51. Rovnováha na páce

6 Síly působící na těleso otočné kolem osy

Zvolíme vhodně soustavu souřadnic a vyšetříme statické podmínky rovnováhy.

Podmínka rovnováhy proti posunutí:

$$\begin{aligned} \text{ve směru osy } x & \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, & \text{ve směru osy } x \text{ síla nepůsobí,} \\ \text{ve směru osy } y & \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, & -F_1 + F_2 - F_r = 0, & \quad F_r = F_2 - F_1, \\ \text{Podmínka rovnováhy proti otáčení:} & \quad \sum_{i=1}^n M_i = 0, & -F_1 \cdot l + F_2 \cdot a = 0, & \quad F_2 = \frac{F_1 \cdot l}{a} \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice, sestavené z podmínek rovnováhy páky proti posunutí, lze určit reakci v otočném bodě:

$$F_r = \frac{F_1 \cdot l}{a} - F_1,$$

$$F_r = F_1 \cdot \left(\frac{l}{a} - 1 \right).$$

Příklad 1

Určete výpočtem velikost síly F a reakce F_r pro rovnováhu na páce zobrazené na obr. 21 na str. 18, kde $F_1 = 5\,000\text{ N}$, $a = 400\text{ mm}$, $b = 800\text{ mm}$; určete též směr reakce α_r .

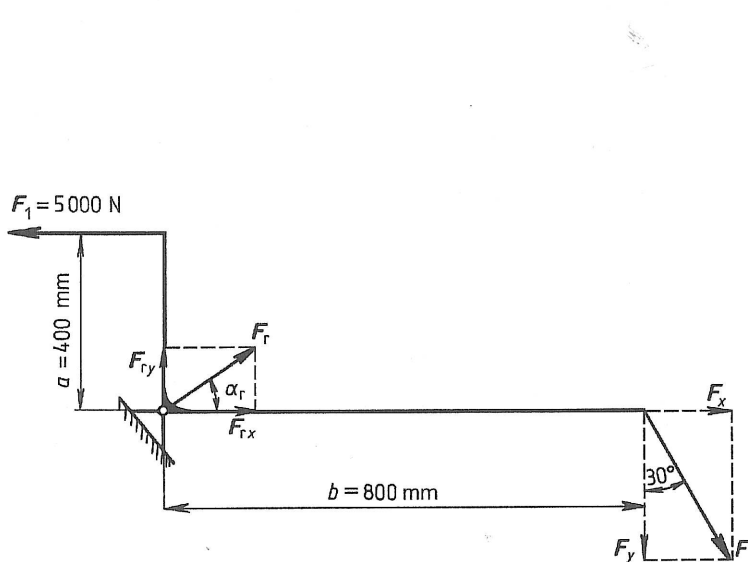
Řešení:

Graficky je tento příklad vyřešen na obr. 21. Při početním řešení budeme postupovat takto:

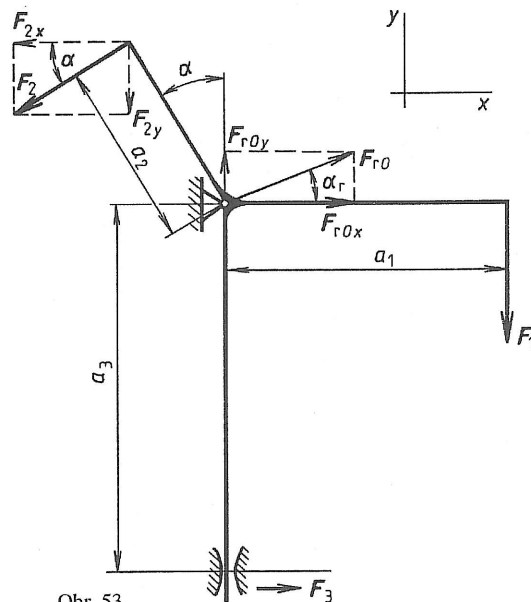
1. Nakreslíme schematický obrázek (nemusí být kreslen v měřítku, stačí okótované dané rozměry – obr. 52) a vyznačíme silové poměry, přičemž u sil, které neznáme, zvolíme jejich směr podle charakteru podpor. V pevné podpoře (kloubu) má síla obecně šikmý směr. Zvolíme také jejich orientaci. Tímto úkonem jsme těleso (páku) *uvolnili*.

Zvolíme-li orientaci některé síly chybně, vyjde ve výpočtu její velikost záporná. V tomto případě musíme nesprávnost volby odstranit tak, že do dalších výpočtů budeme tuto sílu dosazovat se záporným znaménkem.

2. Všechny síly rozložíme do směrů os x a y vhodně zvoleného systému souřadnic.



Obr. 52



Obr. 53

3. Stanovíme statické podmínky rovnováhy proti posunutí a otáčení:

$$\text{a) } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad -F_1 + F_{rx} + F_x = 0,$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad F_{ry} - F_y = 0,$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^n M_i = 0, \quad F_1 \cdot a - F_y \cdot b = 0.$$

6 Síly působící na těleso otočné kolem osy

4. Řešíme sestavenou soustavu rovnic a zjistíme velikost hledaných sil a směr síly v kloubu.

Z momentové rovnice (3c) zjistíme F_y :

$$F_y \cdot b = F_1 \cdot a, \quad F_y = \frac{F_1 \cdot a}{b}, \quad F_y = \frac{5\,000 \text{ N} \cdot 400 \text{ mm}}{800 \text{ mm}} = 2\,500 \text{ N}.$$

Z vyšrafovaného trojúhelníka na obr. plyne:

$$\cos 30^\circ = \frac{F_y}{F}, \quad F = \frac{F_y}{\cos 30^\circ}, \quad F = \frac{2\,500 \text{ N}}{0,866} = 2\,887 \text{ N}.$$

Z rovnice 3b zjistíme složku reakce v kloubu F_{ry} :

$$F_{ry} = F_y, \quad F_{ry} = 2\,500 \text{ N}.$$

Pomocí goniometrické funkce vypočteme F_x a z rovnice 3a potom složku reakce v kloubu F_{rx} :

$$F_x = F \cdot \sin 30^\circ, \\ F_{rx} = F_1 - F_x, \quad F_{rx} = F_1 - F \cdot \sin 30^\circ, \\ F_{rx} = 5\,000 \text{ N} - 2\,887 \text{ N} \cdot 0,5 = 5\,000 \text{ N} - 1\,443 \text{ N}, \\ F_{rx} = 3\,567 \text{ N}.$$

Velikost reakce v kloubu určíme pomocí Pythagorovy věty ze složek F_{rx} a F_{ry} :

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2}, \quad F_r = \sqrt{(3\,567 \text{ N})^2 + (2\,500 \text{ N})^2} = 4\,356 \text{ N}.$$

Směrový úhel reakce v kloubu α_r určíme pomocí goniometrické funkce:

$$\sin \alpha_r = \frac{F_{ry}}{F_r}, \quad \sin \alpha_r = \frac{2\,500 \text{ N}}{4\,356 \text{ N}} = 0,574, \quad \text{tomu odpovídá } \alpha_r = 35^\circ 2'.$$

Velikost síly F je 2 887 N, velikost reakce v kloubu F_r je 4 356 N, směrový úhel reakce v kloubu $\alpha_r = 35^\circ 2'$.

Pro informaci porovnáme zjištěné výsledky s výsledky grafického řešení (obr. 21).

Má-li páka více ramen, tzn., že je zatížena i více silami, je postup při početním řešení stejný jako u předcházejícího příkladu. Pro grafické řešení je nutné nejprve zjistit výslednici zadaných sil a potom řešit rovnováhu této výslednice a neznámých dvou sil; jde o rovnováhu tří sil v rovině a grafické řešení již známe.

Příklad 2

Určete výpočtem i graficky velikost síly F_3 a reakci F_{rO} v otočném bodě u tříramenné páky. Páka je zatížena silami $F_1 = 200 \text{ N}$, $F_2 = 250 \text{ N}$, rozměry ramen jsou $a_1 = 300 \text{ mm}$, $a_2 = 200 \text{ mm}$, $a_3 = 400 \text{ mm}$; úhel ramena páky, na němž působí síla F_2 - $\alpha_r = 30^\circ$ (schematický obr. 53).

Řešení:

I. Při výpočtu budeme postupovat obdobně jako v předchozím příkladu. Uvolníme páku, tj. zvolíme směr a orientaci reakce v otočném bodě O a orientaci síly F_3 ; směr reakce F_{rO} je dán podporou. Zvolíme systém souřadnic a rozložíme všechny síly do směru os x a y (podobně jako v obr. 52).

Podle statických podmínek rovnováhy proti posunutí ve směru x , y a otáčení k bodu O sestavíme rovnice:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0, & F_{rOx} - F_{2x} + F_3 &= 0, & F_{2x} &= F_2 \cos \alpha, \\ \text{b) } \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0, & F_{rOy} - F_{2y} - F_1 &= 0, & F_{2y} &= F_2 \sin \alpha, \\ \text{c) } \sum_{i=1}^n M_i &= 0, & F_2 \cdot a_2 + F_3 \cdot a_3 - F_1 \cdot a_1 &= 0, \\ & & F_3 = \frac{F_1 \cdot a_1 - F_2 \cdot a_2}{a_3}, & & F_3 = \frac{200 \text{ N} \cdot 300 \text{ mm} - 250 \text{ N} \cdot 200 \text{ mm}}{400 \text{ mm}} = 25 \text{ N}. \end{aligned}$$

Z rovnic a), b) vypočteme velikost složek reakce F_{rO} :

6 Síly působící na těleso otočné kolem osy

$$F_{rOx} = F_{2x} - F_3 = F_2 \cos \alpha - F_3, \quad F_{rOx} = 250 \text{ N} \cos 30^\circ - 25 \text{ N} = 250 \text{ N} \cdot 0,866 - 25 \text{ N} = 191,5 \text{ N};$$

$$F_{rOy} = F_{2y} + F_1 = F_2 \sin \alpha + F_1, \quad F_{rOy} = 250 \text{ N} \sin 30^\circ + 200 \text{ N} = 250 \text{ N} \cdot 0,5 + 200 \text{ N} = 325 \text{ N}.$$

Pomocí Pythagorovy věty určíme velikost reakce v otočném bodě O :

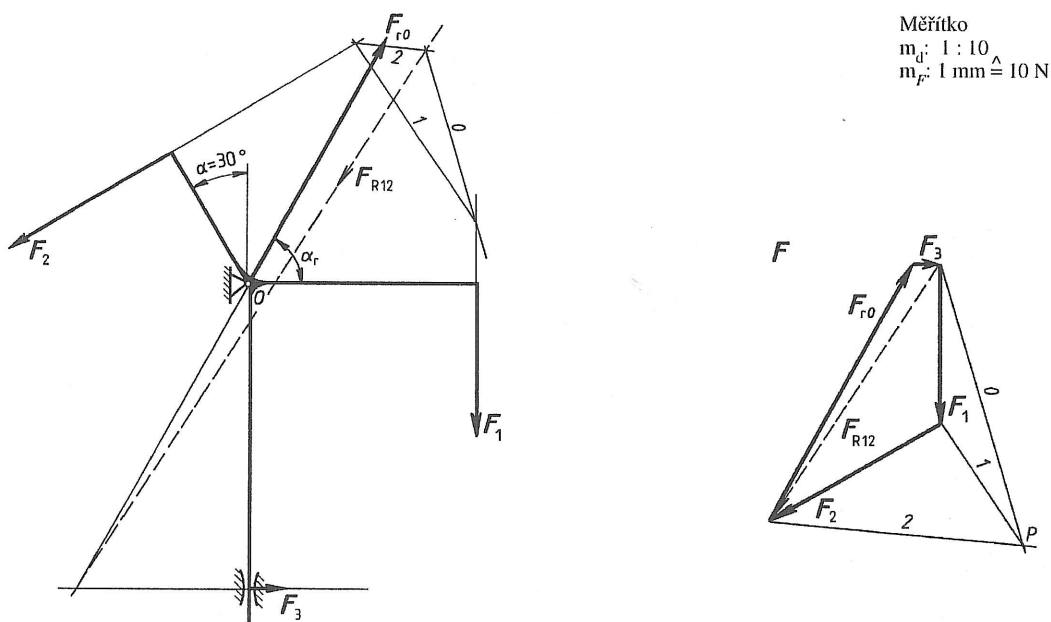
$$F_{rO} = \sqrt{F_{rOx}^2 + F_{rOy}^2}, \quad F_{rO} = \sqrt{(191,5 \text{ N})^2 + (325 \text{ N})^2} = 377,22 \text{ N}.$$

Směrový úhel reakce F_{rO} určíme pomocí goniometrické funkce:

$$\text{tg } \alpha_r = \frac{F_{rOy}}{F_{rOx}}, \quad \text{tg } \alpha_r = \frac{325 \text{ N}}{191,5 \text{ N}} = 1,697, \quad \text{tomu odpovídá } \alpha_r = 59^\circ 30'.$$

Tedy velikost síly F_3 je 25 N, reakce v otočném bodě tříramenné páky F_{rO} je 377,22 N (složky $F_{rOx} = 191,5 \text{ N}$, $F_{rOy} = 325 \text{ N}$) a směrový úhel $\alpha_r = 59^\circ 30'$.

II. Pro grafické řešení nakreslíme páku ve vhodném měřítku (obr. 54). Ze známých sil F_1 a F_2 , můžeme sestavit silový trojúhelník a vláknový mnohoúhelník. Určíme částečnou výslednici F_{R12} včetně jejího směru. Tím jsme úlohu převedli na rovnováhu tří sil F_{R12} , F_3 a F_{rO} ; jejich nositelky se musí protínat, jak již víme, v jednom bodě. Tímto bodem je průsečík vektorových přímk, nositelé F_{R12} a F_3 . Získaným průsečíkem a bodem O je určen směr reakce F_{rO} . Zbývá dokončit silový trojúhelník z částečné výslednice a hledaných sil. Odměřením a převodem podle měřítek zjistíme velikost sil F_{rO} a F_3 , změřením úhlu zjistíme směrový úhel reakce α_r .



Obr. 54

Výsledek získaný při grafickém řešení (měřením): $F_3 = 25 \text{ N}$, $F_{rO} = 380 \text{ N}$, $\alpha_r = 60^\circ$.

7 REAKCE NOSNÍKŮ

Nosníkem je nazývána tuhá součást, která má vzhledem ke své délce většinou menší průřezové rozměry (podle konstrukce mají tyto součásti různé tvary průřezu), uložená na podporách a namáhaná převážně ohybem (kap. 8). V praxi to jsou trámy, traverzy, hřídele, čepy apod. Pro pevnostní výpočet nosníků je třeba znát síly v uložení – podporách (druhy podpor byly zmíněny v kap. 3).

Reakce v podporách lze řešit výpočtem i graficky, řešení je založeno na podmínkách rovnováhy.

Řešení:

I. *Grafické* řešení provedeme podle známých postupů skládání různoběžných sil, pomocí silového a vláknového mnohoúhelníka.

II. Pro *výpočet* použijeme statické podmínky rovnováhy, neboť nosník musí být v klidu (v rovnováze).

1. Nakreslíme schematický obrázek nosníku (nemusí být v měřítku) a okótujeme v něm rozměry.

2. Uvolníme nosník, tj. odstraníme podpory, a podle jejich charakteru v nich zavedeme síly – reakce.

Začínáme vždy u volné podpory. Je-li směr reakce ve volné podpoře rovnoběžný se silami, které působí na nosník, je i reakce v pevné podpoře s nimi rovnoběžná, protože se jedná o rovnováhu rovnoběžných sil. Není-li reakce ve volné podpoře rovnoběžná se silami působícími na nosník, nebo jsou-li síly působící na nosník různoběžné, potom má reakce v pevné podpoře směr šikmý. Zvolíme orientaci reakcí. Bude-li orientace reakcí zvolena chybně, vyjde její velikost záporná. V dalších výpočtech musíme hned tuto nesprávnost odstranit.

3. Zavedeme systém souřadnic a všechny síly působící na nosník rozložíme do směrů os x , y .

4. Ze statických podmínek rovnováhy sestavíme soustavu rovnic. Pro napsání momentové podmínky rovnováhy je výhodné zvolit bod, k němuž budeme vztahovat momenty v pevné podpoře. Momentové rovnice se zjednoduší, protože jedna reakce má rameno délky nula a velikost momentu je také nula.

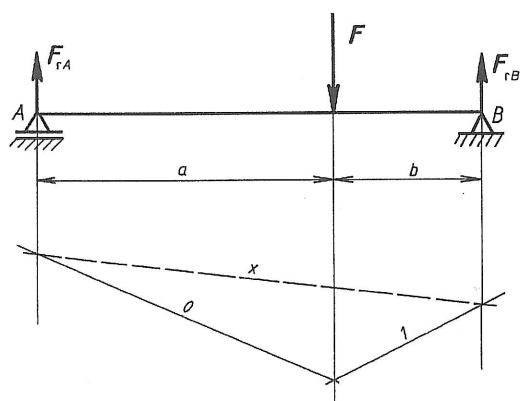
5. Řešíme soustavu rovnic sestavenou z podmínek rovnováhy, pomocí goniometrických funkcí zjistíme směry reakcí.

Příklad 1

Určete graficky a výpočtem velikost reakcí F_{rA} a F_{rB} u nosníku uloženého na dvou podporách A , B a zatíženého silou $F = 3\,000\text{ N}$, jejíž vzdálenost od podpory A je $a = 400\text{ mm}$, od podpory B je $b = 200\text{ mm}$ (obr. 55).

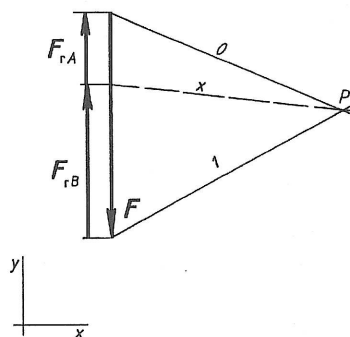
Řešení:

I. Graficky:



Obr. 55

Měřítko:
 $m_d: 1 : 10$
 $m_F: 1\text{ mm} \hat{=} 100\text{ N}$



$$F_{rA} \hat{=} 10\text{ mm} \hat{=} 1\,000\text{ N}, F_{rB} \hat{=} 20\text{ mm} \hat{=} 2\,000\text{ N}.$$

II. Výpočtem:

Ze statických podmínek rovnováhy dostaneme

$$\text{a) } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \text{ve směru osy } x \text{ nepůsobí žádná síla,}$$

7 Reakce nosníků

$$b) \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad F_{rA} - F + F_{rB} = 0,$$

$$c) \sum_{i=1}^n M_i = 0, \quad -F \cdot a + F_{rB} \cdot (a + b) = 0,$$

$$F_{rB} = \frac{F \cdot a}{a + b}, \quad F_{rA} = 3\,000 \text{ N} \cdot \frac{400 \text{ mm}}{600 \text{ mm}} = 2\,000 \text{ N}.$$

Z b) plyne

$$F_{rA} = F - F_{rB},$$

$$F_{rA} = 3\,000 \text{ N} - 2\,000 \text{ N} = 1\,000 \text{ N}.$$

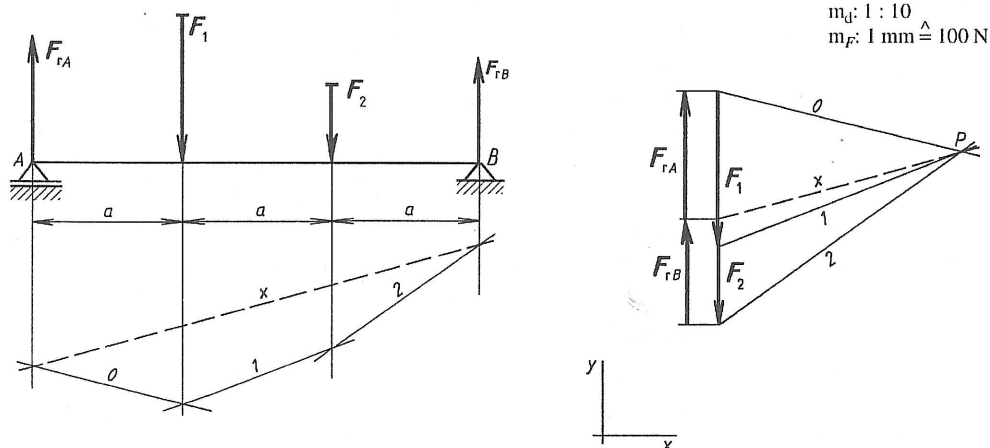
$$F_{rA} = 1\,000 \text{ N}, \quad F_{rB} = 2\,000 \text{ N}.$$

Příklad 2

Určete graficky a výpočtem velikost reakcí F_{rA} a F_{rB} u nosníku na podporách A, B zatíženého silami $F_1 = 2\,000 \text{ N}$, $F_2 = 1\,000 \text{ N}$; rozměr $a = 200 \text{ mm}$ (obr. 56).

Řešení:

I. Graficky:



Obr. 56

Směr paprsku x najdeme pomocí vláknového mnohoúhelníka tak, že spojíme průsečíky nositelek reakcí s krajními paprsky vláknového mnohoúhelníka. Rovnoběžka s paprskem x vedená z pólu P pólového obrazce určí velikost reakcí F_{rA} a F_{rB} .

$$F_{rA} \hat{=} 16,5 \text{ mm} \hat{=} 1\,650 \text{ N}, \quad F_{rB} \hat{=} 13,5 \text{ mm} \hat{=} 1\,350 \text{ N}.$$

II. Výpočtem:

Ze statických podmínek rovnováhy dostaneme

$$a) \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \text{ve směru osy } x \text{ nepůsobí žádná síla,}$$

$$b) \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad F_{rA} - F_1 - F_2 + F_{rB} = 0,$$

$$c) \sum_{i=1}^n M_i = 0, \quad -F_1 \cdot a - F_2 \cdot 2a + F_{rB} \cdot 3a = 0,$$

$$F_{rB} = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a}{3a}, \quad F_{rB} = \frac{2\,000 \text{ N} \cdot 200 \text{ mm} + 1\,000 \text{ N} \cdot 400 \text{ mm}}{600 \text{ mm}} = 1\,333 \text{ N}.$$

Z b) plyne

$$F_{rA} = F_1 + F_2 - F_{rB},$$

$$F_{rA} = 2\,000 \text{ N} + 1\,000 \text{ N} - 1\,333 \text{ N} = 1\,667 \text{ N}.$$

$$F_{rA} = 1\,667 \text{ N}, \quad F_{rB} = 1\,333 \text{ N}.$$

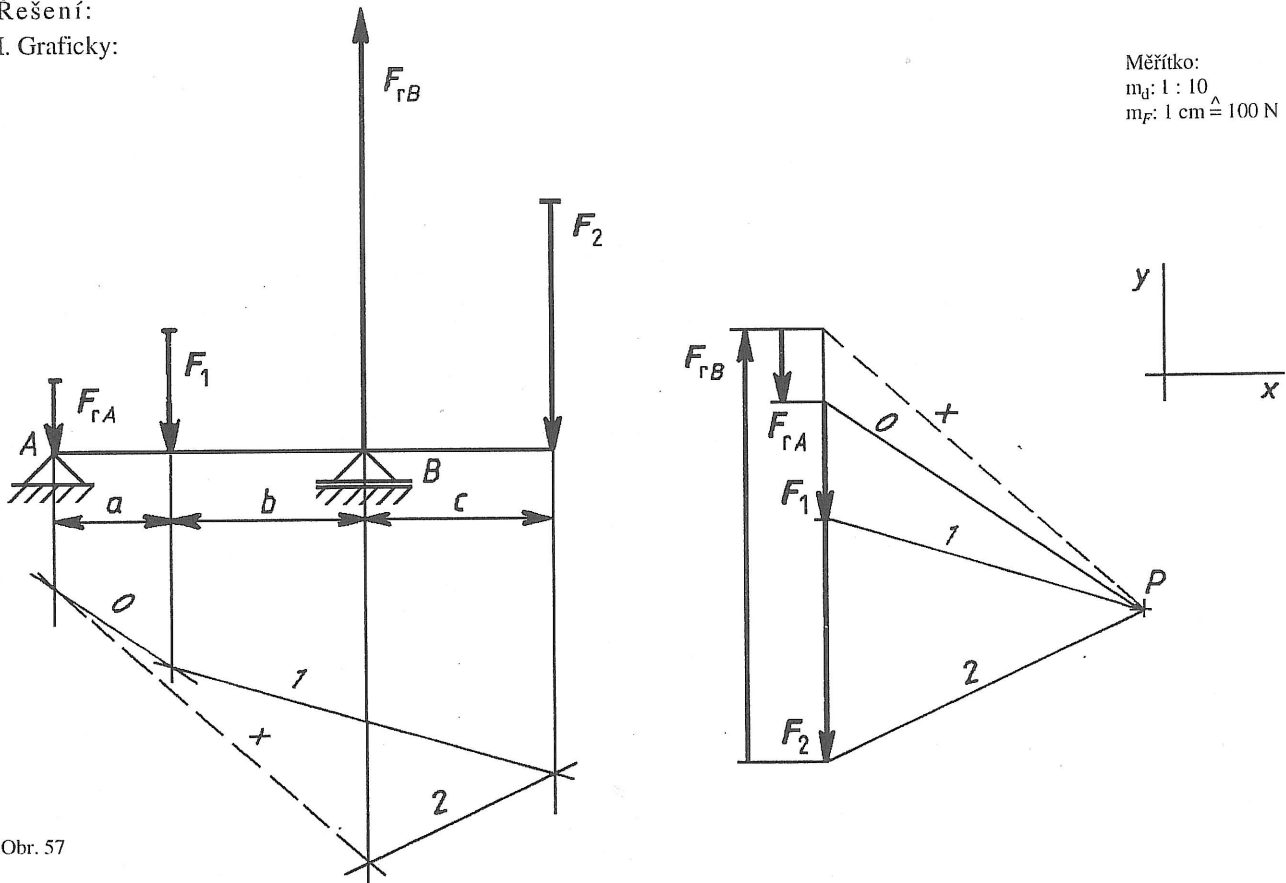
7 Reakce nosníků

Příklad 3

Určete graficky i výpočtem velikost reakcí F_{rA} a F_{rB} u nosníku zatíženého silami $F_1 = 160 \text{ N}$, $F_2 = 320 \text{ N}$; rozměry $a = 150 \text{ mm}$, $b = 250 \text{ mm}$, $c = 250 \text{ mm}$ (obr. 57).

Řešení:

I. Graficky:



Obr. 57

$$F_{rA} \hat{=} 0,95 \text{ cm} \hat{=} 95 \text{ N}, F_{rB} \hat{=} 5,75 \text{ cm} \hat{=} 575 \text{ N}.$$

II. Výpočtem:

Ze statických podmínek rovnováhy dostaneme

$$a) \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \text{ve směru osy } x \text{ nepůsobí žádná síla,}$$

$$b) \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad F_{rA} - F_1 + F_{rB} - F_2 = 0,$$

$$c) \sum_{i=1}^n M_i = 0, \quad -F_1 \cdot a + F_{rB} \cdot (a + b) - F_2 \cdot (a + b + c) = 0,$$

$$F_{rB} = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot (a + b + c)}{a + b},$$

$$F_{rB} = \frac{160 \text{ N} \cdot 150 \text{ mm} + 320 \text{ N} \cdot (150 \text{ mm} + 250 \text{ mm} + 250 \text{ mm})}{150 \text{ mm} + 250 \text{ mm}} =$$

$$= \frac{24\,000 \text{ N} \cdot \text{mm} + 208\,000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{400 \text{ mm}} = \frac{232\,000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{400 \text{ mm}} = 580 \text{ N}.$$

Z b) plyne

$$F_{rA} = F_1 - F_{rB} + F_2,$$

$$F_{rA} = 160 \text{ N} - 580 \text{ N} + 320 \text{ N} = -100 \text{ N}.$$

Pozor! Znaménko minus ve výpočtu velikosti reakce F_{rA} znamená, že *smysl této reakce je opačný, než jsme při výpočtu zpočátku předpokládali.*

$$F_{rA} = 100 \text{ N}, F_{rB} = 580 \text{ N}.$$

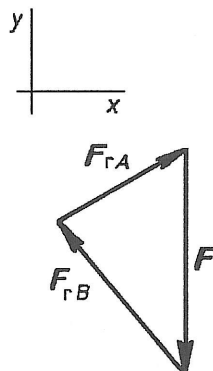
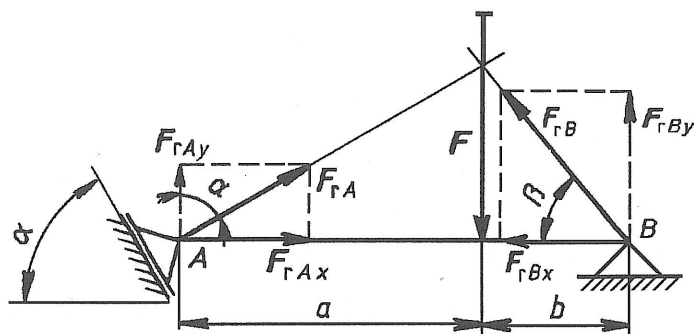
7 Reakce nosníků

Příklad 4

Určete graficky a výpočtem velikost reakcí F_{rA} a F_{rB} u nosníku zatíženého silou $F = 3\,000\text{ N}$; rozměry $a = 400\text{ mm}$, $b = 200\text{ mm}$, velikost úhlu sklonu volné podpory A $\alpha = 60^\circ$ (obr. 58). Určete také směr reakce v podpoře B . (Nosník má stejné zatížení a rozměry jako v příkladu 1, změna je pouze u volné podpory - viz obr. 55.)

Řešení:

I. Graficky:



Měřítko:
 $m_l: 1 : 10$
 $m_F: 1\text{ mm} \hat{=} 100\text{ N}$

Obr. 58

$$F_{rA} \hat{=} 20\text{ mm} \hat{=} 2\,000\text{ N}, F_{rB} \hat{=} 26,5\text{ mm} \hat{=} 2\,650\text{ N}, \beta = 49^\circ.$$

II. Výpočtem:

$$a) \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad F_{rAx} - F_{rBx} = 0,$$

$$b) \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad F_{rAy} + F_{rBy} - F = 0,$$

$$c) \sum_{i=1}^n M_i = 0, \quad F \cdot b - F_{rAy} \cdot (a + b) = 0,$$

$$F_{rAy} = \frac{F \cdot b}{a + b}, \quad F_{rAy} = \frac{3\,000\text{ N} \cdot 200\text{ mm}}{400\text{ mm} + 200\text{ mm}} = 1\,000\text{ N}.$$

Pomocí goniometrických funkcí získáme velikost reakce F_{rA} :

$$F_{rA} = \frac{F_{rAy}}{\cos \alpha}, \quad F_{rA} = \frac{1\,000\text{ N}}{\cos 60^\circ} = \frac{1\,000\text{ N}}{0,5} = 2\,000\text{ N},$$

z podmínky a) plyne

$$F_{rAx} = F_{rBx}, \quad F_{rAx} = F_{rA} \cdot \sin \alpha, \quad F_{rAx} = 2\,000\text{ N} \cdot \sin 60^\circ = 2\,000\text{ N} \cdot 0,866 = 1\,732,05\text{ N};$$

z podmínky b) plyne

$$F_{rBy} = F - F_{rAy}, \quad F_{rBy} = 3\,000\text{ N} - 1\,000\text{ N} = 2\,000\text{ N}.$$

Podle Pythagorovy věty

$$F_{rB} = \sqrt{F_{rBx}^2 + F_{rBy}^2}, \quad F_{rB} = \sqrt{(1\,732,05\text{ N})^2 + (2\,000\text{ N})^2} = 2\,645,75\text{ N}.$$

Směr reakce v podpoře B

$$\text{tg } \beta = \frac{F_{rBy}}{F_{rBx}}, \quad \text{tg } \beta = \frac{2\,000\text{ N}}{1\,732,05\text{ N}} = 1,154\,7, \quad \beta = 49^\circ 6'.$$

$F_{rA} = 2\,000\text{ N}$, $F_{rB} = 2\,647,75\text{ N}$, velikost směrového úhlu reakce v podpoře B je $49^\circ 6'$.

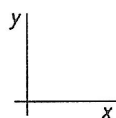
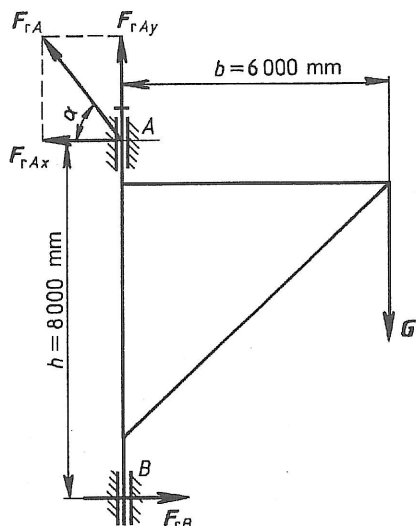
Příklad 5

Určete velikost reakcí F_{rA} a F_{rB} a úhel α reakce F_{rA} u skladištního jeřábu, který je zatížen silou G o velikosti 6 kN na rameni $b = 6\text{ m}$, přičemž vzdálenost uložení jeřábu $h = 8\text{ m}$.

Tento příklad jsme graficky řešili již na str. 17 (obr. 20). Nyní, při znalosti statických podmínek rovnováhy, vyřešíme tentýž příklad i početně (obr. 59).

7 Reakce nosníků

Řešení:



Obr. 59

$$a) \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad -F_{rAx} + F_{rB} = 0,$$

$$b) \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad F_{rAy} - G = 0, \text{ tedy } F_{rAy} = 6\,000 \text{ N},$$

$$c) \sum_{i=1}^n M_i = 0, \quad -G \cdot b + F_{rB} \cdot h = 0,$$

$$F_{rB} = \frac{G \cdot b}{h},$$

$$F_{rB} = \frac{6\,000 \text{ N} \cdot 6\,000 \text{ mm}}{8\,000 \text{ mm}} = 4\,500 \text{ N};$$

z a) plyne

$$F_{rAx} = F_{rB}$$

$$F_{rAx} = 4\,500 \text{ N},$$

pomocí Pythagorovy věty

$$F_{rA} = \sqrt{F_{rAx}^2 + F_{rAy}^2},$$

$$F_{rA} = \sqrt{(4\,500 \text{ N})^2 + (6\,000 \text{ N})^2} = \sqrt{56\,250\,000 \text{ N}^2},$$

$$F_{rA} = 7\,500 \text{ N}.$$

Úhel α

$$\sin \alpha = \frac{F_{rAy}}{F_{rA}},$$

$$\sin \alpha = \frac{6\,000 \text{ N}}{7\,500 \text{ N}} = 0,8,$$

$$\alpha = 53^\circ 10'.$$

$$F_{rA} = 7\,500 \text{ N}, \quad F_{rB} = 4\,500 \text{ N}, \quad \alpha = 53^\circ 10'.$$

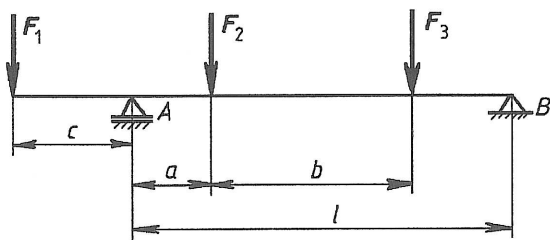
Úlohy

1. Určete výpočtem a graficky velikost reakcí v podporách F_{rA} a F_{rB} nosníku zatíženého silami $F_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = 1 \text{ kN}$ a $F_3 = 1,5 \text{ kN}$. Rozměry nosníku jsou $a = 80 \text{ mm}$, $b = 200 \text{ mm}$, $c = 120 \text{ mm}$ a $l = 380 \text{ mm}$ (obr. 60).

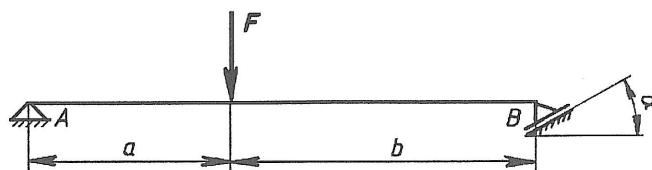
(Výsledek: $F_{rA} = 3,82 \text{ kN}$, $F_{rB} = 0,684 \text{ kN}$.)

2. Určete výpočtem a graficky velikost reakcí v podporách F_{rA} a F_{rB} nosníku zatíženého silou $F = 1\,000 \text{ N}$. Rozměry nosníku jsou $a = 200 \text{ mm}$, $b = 300 \text{ mm}$, úhel sklonu volné podpory $\alpha = 30^\circ$ (obr. 12).

(Výsledek: $F_{rA} = 643 \text{ kN}$, $F_{rB} = 462 \text{ kN}$.)



Obr. 60



Obr. 61

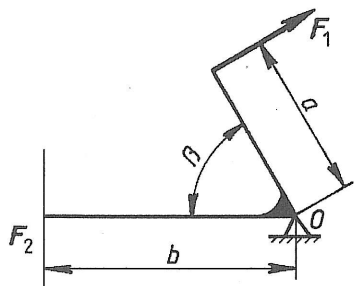
7 Reakce nosníků

3. Určete sílu F_2 a reakci v otočném bodě F_{rO} páky (obr. 62) zatížené silou $F_1 = 300$ N; rozměry páky jsou $a = 80$ mm, $b = 120$ mm a úhel mezi rameny páky $\beta = 60^\circ$.

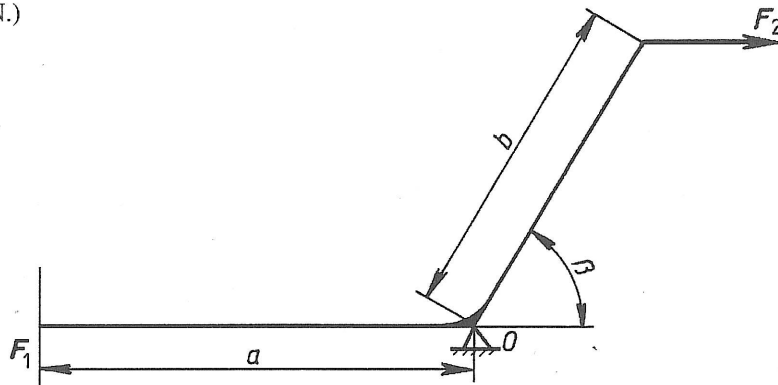
(Výsledek: $F_2 = 200$ N, $F_{rO} = 264,57$ N.)

4. Určete sílu F_1 a reakci v otočném bodě F_{rO} páky (obr. 63) zatížené silou $F_2 = 800$ N; rozměry páky jsou $a = 200$ mm, $b = 150$ mm a úhel sklonu ramene $\beta = 60^\circ$.

(Výsledek: $F_1 = 519,6$ N, $F_{rO} = 953,9$ N.)



Obr. 62



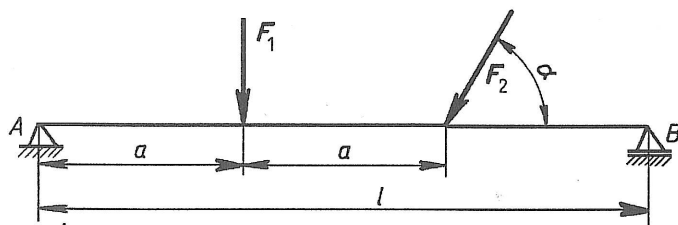
Obr. 63

5. Určete výpočtem a graficky velikost reakcí v podporách F_{rA} a F_{rB} nosníku zatíženého silami $F_1 = 1$ kN a $F_2 = 1,5$ kN, síla F_2 svírá s nosníkem úhel $\alpha = 60^\circ$; rozměry nosníku jsou $a = 200$ mm, $l = 600$ mm (obr. 64).

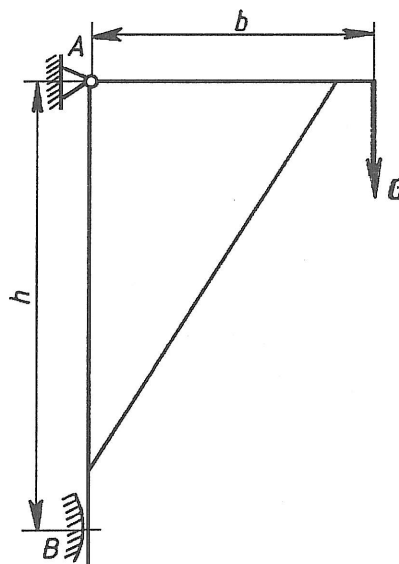
(Výsledek: $F_{rA} = 1,33$ kN, $F_{rB} = 1,2$ kN.)

6. Určete velikosti reakcí v podporách konzoly (obr. 65) zatížené břemenem $G = 60$ kN; rozměry konzoly jsou $b = 1$ m, $h = 1,6$ m.

(Výsledek: $F_{rA} = 78,1$ kN, $F_{rB} = 50$ kN.)



Obr. 64



Obr. 65

8 PRUTOVÁ SOUSTAVA

Soustava těles, kde je každé těleso spojeno s ostatními členy jen klouby, se nazývá *prutová soustava*, někdy též *příhradová konstrukce* (obr. 69 až 80). Tělesa prutové soustavy mívají hranolovitý konstantní průřez s převládajícím délkovým rozměrem, proto jsou nazývány *pruty*. Prutové soustavy jsou nosnými konstrukcemi mostů, jeřábů, sloupů, střešních konstrukcí, letadel apod.

Pruty se znázorňují úsečkami. *Průřezy prutů* mají různé tvary; mohou být kruhové, mezikruhové (trubky), často jsou tvořeny válcovanými profily (úhelníky L, U, I). *Osami prutů* jsou těžištové osy, které se protínají v jednom bodě a musí ležet v jedné rovině. Tato podmínka musí být splněna, aby byly pruty namáhány pouze tahem nebo tlakem (příp. vzpěrem).

Místo (kloub), kde se stýkají konce prutů, se nazývá *styčník*. V jednom styčníku se stýkají nejméně dva pruty. Ve styčnicích jsou pruty spojeny čepy, nýty nebo svary, které pokládáme za klouby, aby byl nosník řešitelný statickými podmínkami rovnováhy. Prutová soustava je uložena na základním rámu stejně jako tělesa vytvořená z jednoho kusu. Připojení k rámu je provedeno ve styčnicích.

V případech často se vyskytujících *rovinných prutových soustav* představují zatěžující síly rovinnou soustavu sil. Zatěžující síly jako břemena, vlastní tíha a reakce nazýváme *vnějšími silami*. Vnější síly působí zpravidla ve styčnicích. Působí-li *osamělé břemeno* (tj. idealizované zatížení prutu silou, která působí v určitém *průřezu*) mimo styčník, nahrazujeme jeho účinek dvěma stejně velkými silami, které působí v koncích zatíženého prutu (tj. v sousedních styčnicích). Je-li nosník zatížen břemenem rovnoměrně rozloženým, nahradíme účinek břemena osamělými silami ve styčnicích tak, že jejich velikost určíme z celkové velikosti břemene. Při styčníkovém zatížení (kdy se zanedbává např. vlastní tíha prutů) existují v prutech jen osové síly v tahu nebo tlaku, které nazýváme *vnitřními silami*. Protože osové síly v prutech jakožto vnitřní síly jsou v rovnováze, jejich orientace (šipky) mohou směřovat buď do styčniců, nebo od styčniců. Směřují-li do styčniců, je *prut namáhán tlakem* (–), šipky směřující od styčniců označují *prut namáhaný tahem* (+):



Pruty tvoří nejčastěji trojúhelníkové obrazce; potom bývá taková soustava (konstrukce) *staticky určitá*, tzn., že k určení všech složek reakcí vnějších i vnitřních vazeb a složek výslednice vnitřních sil každého průřezu postačí použít statické podmínky rovnováhy celé konstrukce nebo vhodně volených jejích částí.

Statická určitost prutové soustavy se ověří výpočtem z podmínky $z = 2k - 3$, kde z je počet prutů a k je počet styčniců.

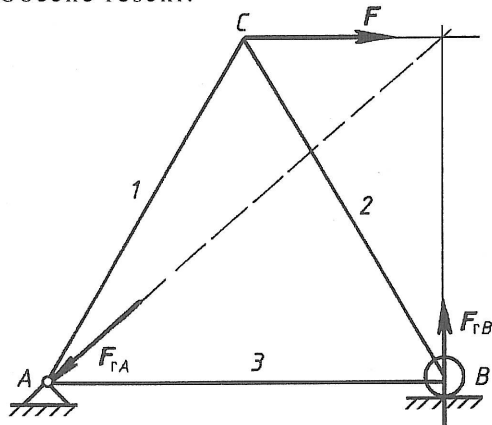
Prutová soustava, která je tvarově a staticky určitá, má vždy *lichý počet prutů*.

Prutové soustavy lze řešit výpočtem, což však bývá zdlouhavé, a graficky. Grafické řešení se používá častěji, protože je rychlejší ve většině jednodušších případů. Při řešení se vychází z poznatku, že *síly působící ve styčníku jsou v rovnováze*.

Příklad

Je dána jednoduchá trojúhelníková konstrukce (obr. 66). Její horní vrchol (C) je namáhán vodorovnou silou F , levý spodní vrchol je uchycen v kloubu (A), pravý spodní vrchol je uchycen na volné podpoře (B). Vypočtěte velikosti osových sil, které na jednotlivé pruty působí.

Obecné řešení:



Označíme pruty 1, 2, 3 a zjistíme, zda je prutová soustava staticky určitá:

$$z = 2k - 3, \text{ počet prutů } z = 3, \text{ počet styčniců } k = 3,$$

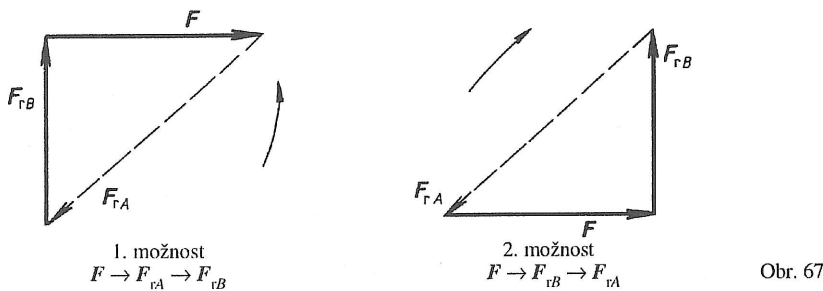
a protože $3 = 2 \cdot 3 - 3 = 3$, daná prutová soustava je staticky určitá.

Určíme všechny vnější síly, tj. reakce F_{rA} a F_{rB} . Poněvadž se jedná o tři síly, určí se velikost reakcí snadno z podmínek rovnováhy tří sil.

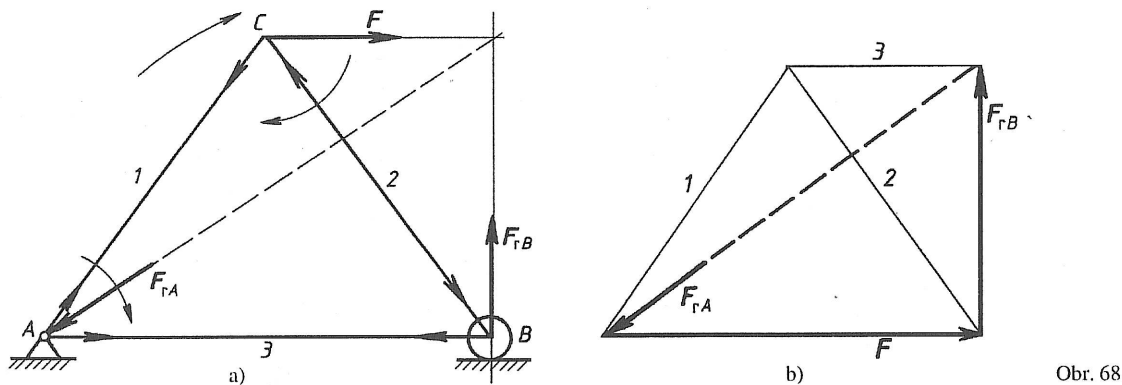
Obr. 66

8 Prutová soustava

Při kreslení silového mnohoúhelníka (v našem případě trojúhelníka) zvolíme pořadí vnějších sil takové, jak obcházíme prutovou soustavu. Existují dvě možnosti (obr. 67).



Zvolíme např. 2. možnost, nakreslíme silový mnohoúhelník (trojúhelník) z vnějších sil (obr. 68) a poté silové mnohoúhelníky pro styčníky.



Řešení styčníku C

Styčník C obcházíme ve stejném smyslu, v jakém jsme obcházeli prutovou soustavu při kreslení silového trojúhelníka z vnějších sil. K síle F v silovém trojúhelníku (obr. 68b) připojíme nejprve směr osové síly v prutu 2 a uzavřeme silový trojúhelník směrem osové síly v prutu 1. Osově síly v prutech 1 a 2 jsou v rovnováze se silou F , proto je dána i jejich orientace (sled šipek musí být souhlasný).

Řešení styčníku B

Na vnější sílu F_{rB} v silovém trojúhelníku bude navazovat směr osové síly v prutu 3 a silový trojúhelník tohoto styčníku bude uzavírat osová síla prutu 2, která je již vyřešena styčníkem C.

Podle směru šipek zjistíme, že pruty 1 a 3 jsou namáhány tahem a prut 2 je namáhán tlakem. Změřením délky úseček a vynásobením příslušným měřítkem zjistíme velikost osových sil, které na jednotlivé pruty působí; tu zapíšeme do tabulky:

Číslo prutu	1	2	3
Osová síla (N)			

8.1 Grafické řešení

Při grafickém řešení prutové soustavy se nejdříve řeší styčník se dvěma pruty, tzv. *dvojný styčník*, a postupně další styčníky, obsahující vždy jen dvě neznámé osové síly (protože silové mnohoúhelníky lze uzavřít pouze dvěma známými směry). Vyskytnou-li se při grafickém řešení styčníky obsahující tři nebo více neznámých osových sil, je nutno použít jiné metody nebo zvláštní obraty (např. řešit soustavu z jedné strany, až dojdeme ke styčníku s více neznámými osovými silami, pak pokračujeme v řešení z druhé strany; nebo postupovat nezávisle na sobě, kde se nachází vždy dvě neznámé osové síly). Silové obrazce jednotlivých styčníků se nekreslí zvlášť, nýbrž do jednoho obrazce – diagramu. Využívá se přitom skutečnost, že osové síly (vnitřní síly) u prutů v soustavě jsou vždy dvě a dvě stejné, ale opačné orientace. Každý prut je společný dvěma styčníkům. Zjištěná velikost síly (délka příslušné strany) v jednom silovém mnohoúhelníku se využije v dalším silovém mnohoúhelníku, silové mnohoúhelníky se tak sloučí.

8 Prutová soustava

Silový obrazec sestrojený podle naznačeného postupu tak, že se žádná osová síla neopakuje, se nazývá *Cremonův obrazec (diagram)*. Není-li možné se obejít bez opakování sil, snažíme se o to, aby se jich opakoval co nejmenší počet.

Postup při kreslení Cremonova obrazce (obr. 69 až 80)

1. Nakreslíme prutovou soustavu v příslušném měřítku, označíme všechny pruty arabskými číslicemi, styčníky římskými číslicemi, určíme všechny vnější síly (včetně reakcí) a zvolíme smysl obcházení prutové soustavy.
2. Nakreslíme silový mnohoúhelník z vnějších sil tak, že sled vnějších sil po obvodu prutové soustavy a sled těchto sil v silovém mnohoúhelníku musí být stejný.
3. Při sestrování silového mnohoúhelníku z vnitřních a vnějších sil styčníku kreslíme osové síly každého styčníku v Cremonově diagramu za sebou tak, jak následují v prutové soustavě příslušné pruty, přičemž styčník obcházíme v témž smyslu v jakém jsme postupovali u vnějších sil prutové soustavy. V prutové soustavě šipkami vyznačíme způsob namáhání toho kterého prutu.
4. Tvoří-li pruty v prutové soustavě uzavřený obrazec, vycházejí v Cremonově diagramu osové síly těchto prutů ze společného bodu.
5. Po nakreslení Cremonova diagramu změříme velikosti sil a po vynásobení měřítkem zapíšeme jejich velikosti do tabulky.

Příklad 1

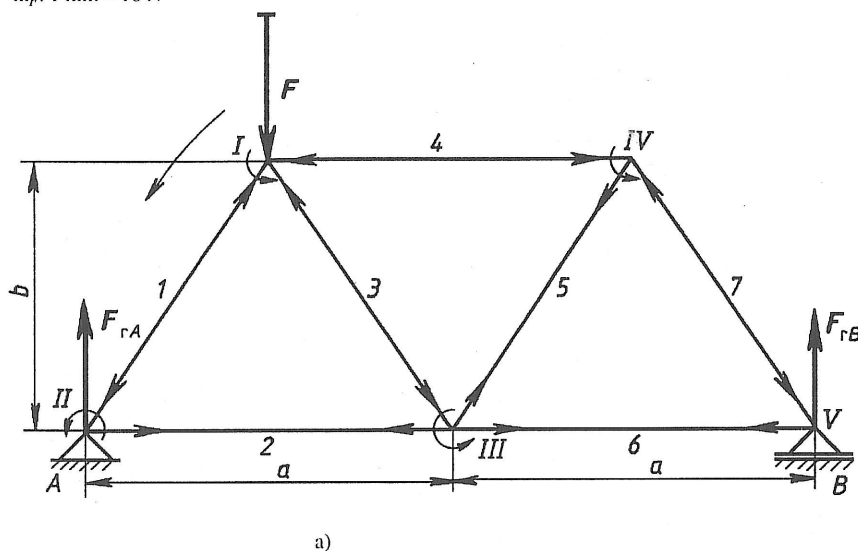
Určete osové síly v prutech prutové soustavy zatížené silou $F = 800$ N, uložené na podporách A, B o rozměrech $a = 4,8$ m, $b = 3,5$ m (obr. 69a).

Řešení:

Měřítko

$m_d: 1 : 100$

$m_f: 1 \text{ mm} \hat{=} 10 \text{ N}$



Obr. 69

Zvolíme smysl obcházení prutové soustavy proti smyslu otáčení hodinových ručiček a očíslováme pruty arabskými a styčníky římskými číslicemi.

Zkontrolujeme statickou určitost: počet prutů $z = 7$, počet kloubů $k = 5$, a protože $7 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$, je uvažovaná prutová soustava staticky určitá.

V měřítku nakreslíme z vnějších sil silový mnohoúhelník v pořadí zvoleného obcházení nosníku: $F - F_{rA} - F_{rB}$ (obr. 69b).

Výpočtem nebo graficky určíme velikost reakcí: $F_{rA} = 600 \text{ N}, F_{rB} \hat{=} 200 \text{ N};$

Řešení styčníku II

Tento styčník řešíme první, protože v něm neznáme pouze dvě osové síly v prutech 1 a 2. Při kreslení silového mnohoúhelníka kreslíme síly ve stejném pořadí, jako jsme obcházeli prutovou soustavu: $F_{rA} - 2 - 1$. Při kreslení šipek k řešenímu styčníku vycházíme z toho, že síly v styčníku jsou v rovnováze, proto jsou šipky v jednom sledu. Smysly osových sil vyznačíme k řešenímu styčníku, opačný smysl ihned označíme u protilehlého styčníku. Podobně řešíme i další styčníky.

8 Prutová soustava

- Řešení styčníku I: pořadí sil je $F - 1 - 3 - 4$.
 Řešení styčníku III: pořadí sil je $3 - 2 - 6 - 5$.
 Řešení styčníku IV: pořadí sil je $4 - 5 - 7$.
 Řešení styčníku V lze provést jako kontrolu.

Podle šípek je zřejmé, že pruty 2, 5 a 6 jsou namáhány tahem, pruty 1, 3, 4 a 7 jsou namáhány tlakem. Změříme úsečky v Cremonově diagramu a po vynásobení měřítkem zapíšeme velikost osových sil do tabulky.

Poznámka: Pro přehlednost orientaci osových sil v Cremonově diagramu nekreslíme; také odměřování velikosti úseček by bylo nepřesné..

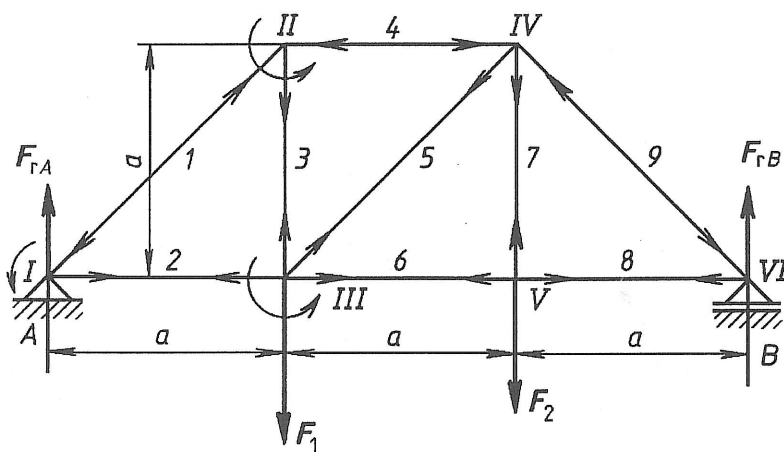
Číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7
Osová síla (N)	-725	410	-240	-265	240	130	-240

Příklad 2

Určete osově síly v prutech prutové soustavy zatížené silami $F_1 = 400 \text{ N}$ a $F_2 = 155 \text{ N}$, uložené na podporách A, B, rozměr $a = 3,1 \text{ m}$ (obr. 70a).

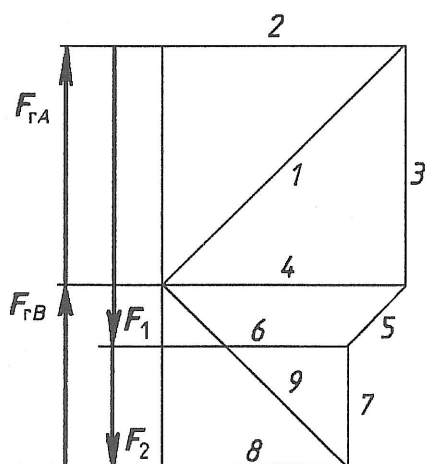
Řešení:

Měřítko
 $m_d: 1 : 100$
 $m_f: 1 \text{ mm} \hat{=} 10 \text{ N}$



a)

Obr. 70



b)

Zvolíme smysl obcházení prutové soustavy proti smyslu otáčení hodinových ručiček a očísujeme pruty a styčníky.

Daná prutová soustava je staticky určitá, protože má 9 prutů a 6 styčníků a platí $9 = 2 \cdot 6 - 3 = 9$.

V měřítku nakreslíme z vnějších sil silový mnohoúhelník v pořadí zvoleného obcházení nosníku: $F_{rA} - F_1 - F_2 - F_{rB}$ (obr. 70b).

Výpočtem nebo graficky určíme velikost reakcí: $F_{rA} \hat{=} 315 \text{ N}$, $F_{rB} \hat{=} 240 \text{ N}$.

Vyřešíme styčníky a zapíšeme velikost osových sil do tabulky:

Číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Osová síla (N)	-450	320	320	-320	110	250	160	250	-340

V odst. 8.2.1 vyřešíme tento příklad výpočtem tzv. styčníkovou metodou.

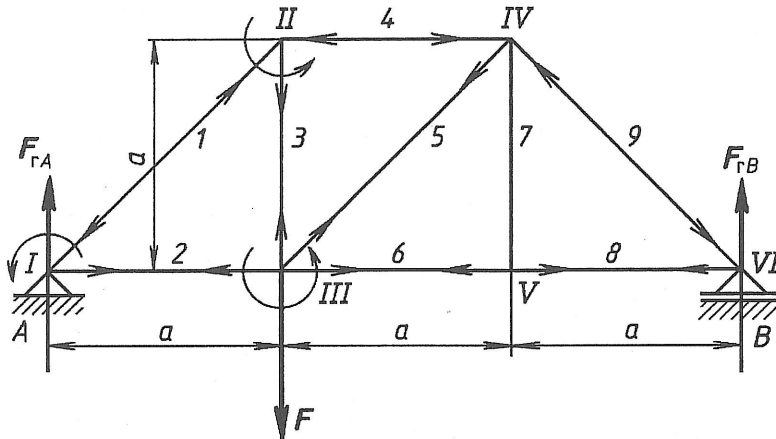
8 Prutová soustava

Příklad 3

Určete osové síly v prutech prutové soustavy zatížené silou $F = 470 \text{ N}$, uložené na podporách A, B , rozměr $a = 3,1 \text{ m}$ (obr. 71a).

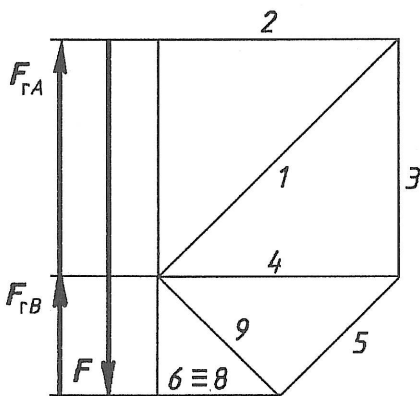
Řešení:

Měřítko
 $m_d: 1 : 100$
 $m_F: 1 \text{ mm} \hat{=} 10 \text{ N}$



a)

Obr. 71



b)

Zvolíme smysl obcházení prutové soustavy proti smyslu otáčení hodinových ručiček a očíslováme pruty a styčníky.

Daná prutová soustava je staticky určitá, protože má 9 prutů a 6 styčníků a platí $9 = 2 \cdot 6 - 3 = 9$.

V měřítku nakreslíme z vnějších sil silový mnohoúhelník v pořadí zvoleného obcházení nosníku: $F_{rA} - F - F_{rB}$ (obr. 71).

Výpočtem nebo graficky určíme velikost reakcí: $F_{rA} \hat{=} 310 \text{ N}$, $F_{rB} \hat{=} 160 \text{ N}$.

Vyřešíme styčníky a zapíšeme velikost osových sil do tabulky:

Číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Osová síla (N)	-450	320	320	-320	220	160	0	160	-220

Poznámka:

V některých případech může být osová síla v prutu rovna nule (např. prut č. 7 v příkladu 3). Je to proto, že trojný styčník má dva průběžné pruty a není zatížen vnější silou. Uvedený poznatek platí zcela všeobecně. V těchto případech by se mohlo zdát, že pruty s nulovou silou jsou přebytečné. Jsou však použity pro tvarovou určitost a vyvíjejí osovou sílu při bočním zatížení. O správnosti řešení se lze přesvědčit výpočtem (čl. 8.2, např. obr. 74).

8.2 Početní řešení

Řešení prutové soustavy výpočtem je náročnější, využíváme při něm poznatky o soustavě různoběžných sil, které jsou v rovnováze. Početní metoda je vhodnější pro kontrolu sil v některých prutech, nikoli pro výpočet celé prutové soustavy. Existuje několik metod výpočtu prutových soustav, my se budeme zabývat pouze metodou styčníkovou a průsečnou.

8 Prutová soustava

8.2.1 Styčnicková metoda

1. Jednotlivé styčnický soustavy uvolníme, tzn. přerušíme pruty řezem, a zavedeme v nich osové síly.
2. Zvolíme orientaci neznámých sil v prutech, přičemž předpokládáme, že jsou pruty namáhány tahem. Výsledek s kladným znaménkem znamená, že v prutu je skutečně tah, záporné znaménko znamená, že prut je namáhán opačně, tj. tlakem. Tento poznatek platí pro všechny početní metody.
3. Řešení začneme ve dvojném styčnicku, kde jsou neznámé pouze dvě osové síly. To proto, že ze statických podmínek rovnováhy sestavíme pouze dvě rovnice, a to pro směry os x a y , do nichž jsme všechny vnější a vnitřní síly ve styčnicku rozložili.
4. Další styčnický řešíme v takovém pořadí, kde jsou neznámé pouze dvě osové síly. Přerušíme pruty okolo styčnicku, zavedeme místo nich opět osové síly, z nichž pouze dvě neznáme. Postup je podobný jako u grafického řešení. I zde platí vše, co bylo uvedeno o určování vnějších reakcí ze tří statických podmínek rovnováhy.

Příklad

Určete osové síly v prutech prutové soustavy zatížené silami $F_1 = 400$ N a $F_2 = 155$ N, jsou-li A, B podpory, rozměr $a = 3,1$ m (tento příklad jsme řešili graficky jako Příklad 2 na obr. 70).

Řešení:

Výpočtová metoda se používá pro kontrolu, proto pro ilustraci budeme řešit pouze styčnický I a II. Na výřezu z obr. 70 vyznačíme síly, které v daném styčnicku působí, tj. vnější i vnitřní (osové) síly v prutech, rozměry a příslušné úhly mezi pruty jsou na obr. 72; $\alpha = 45^\circ$. Již jsme vypočetali, že $F_{rA} = 315$ N.

Řešení styčnicku I

Ze statických podmínek rovnováhy dostaneme

$$a) \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad F_{s1} \cdot \cos 45^\circ + F_{s2} = 0,$$

$$b) \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad F_{rA} + F_{s1} \cdot \sin 45^\circ = 0, \text{ tedy}$$

$$F_{s1} \cdot \sin 45^\circ = -F_{rA},$$

$$F_{s1} = -\frac{F_{rA}}{\sin 45^\circ},$$

$$F_{s1} = -\frac{315 \text{ N}}{0,707} = -445,5 \text{ N.}$$

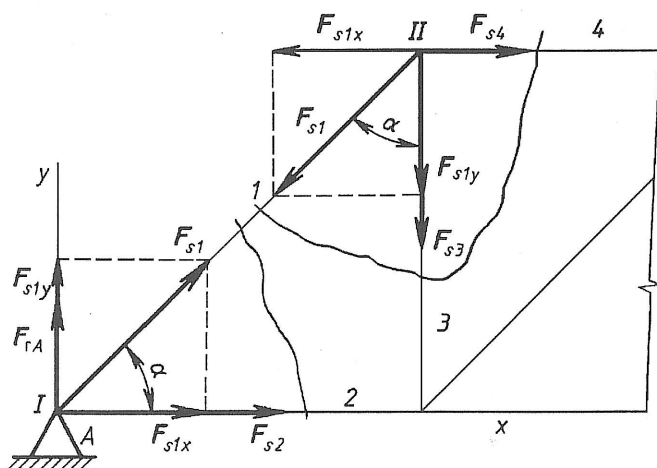
Záporný výsledek znamená, že prut I je namáhán tlakem. Při dalším výpočtu je nutno u této síly se znaménkem minus stále počítat.

Dosadíme do rovnice a):

$$F_{s2} = -F_{s1} \cdot \cos 45^\circ,$$

$$F_{s2} = -(-445,5 \text{ N}) \cdot 0,707 = 315 \text{ N,}$$

což znamená, že prut 2 je namáhán tahem.



Obr. 72

Řešení styčnicku II

Ze statických podmínek rovnováhy dostaneme

$$a) \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad -F_{s1} \cdot \sin 45^\circ + F_{s4} = 0,$$

$$F_{s4} = F_{s1} \cdot \sin 45^\circ,$$

$$F_{s4} = -445,5 \text{ N} \cdot 0,707 = -315 \text{ N,}$$

$$b) \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad -F_{s1} \cdot \cos 45^\circ - F_{s3} = 0,$$

$$F_{s3} = -F_{s1} \cdot \cos 45^\circ,$$

$$F_{s3} = -(-445,5 \text{ N}) \cdot 0,707 = 315 \text{ N;}$$

tedy prut 4 je namáhán tlakem, prut 3 tahem. Podobně můžeme pokračovat v řešení dalších styčnicků.

8 Prutová soustava

Z příkladu je vidět, že řešení osových sil prutů styčnickovou metodou je zdoluhavé. Je nutné dávat pozor při určování správných znamének u sil. Osově síly jednotlivých styčníků můžeme řešit jen postupně.

8.2.2 Průsečná metoda

1. Prutovou soustavu při průsečné (někdy též řezové) metodě rozdělíme myšleným řezem na dvě části. Řezem přerušíme nejvýše tři pruty, které neprocházejí jedním bodem. Z jednoho styčnicku (bodu) mohou vycházet pouze dva pruty s neznámými osovými silami.
2. Místo přerušených prutů zavedeme osové síly a zvolíme orientaci neznámých sil v prutech, přičemž předpokládáme, že jsou pruty namáhány tahem. Výsledek s kladným znaménkem znamená, že v prutu je skutečně tah, záporné znaménko znamená, že prut je namáhán opačně, tj. tlakem.
3. Po připojení osových sil pro každou část soustavy platí, že vnější síly příslušné části a osové síly přerušených prutů jsou v rovnováze. Při řešení jde o rovnováhu obecné rovinné soustavy sil, proto používáme tři statické podmínky rovnováhy. Neznámé jsou právě tři hledané osové síly v přerušených prutech. Obsahuje-li styčník více než dvě neznámé osové síly, nelze průsečnou metodu použít.

Předností průsečné metody je, že můžeme přerušit nosník v kterémkoli poli myšleným řezem a vypočítat tři neznámé osové síly. Při praktickém početním řešení se používá výhodně kombinace metody styčnickové i průsečné.

Příklad

Určete osové síly v prutech prutové soustavy zatížené silou $F = 470 \text{ N}$, jsou-li A, B podpory a rozměr $a = 3,1 \text{ m}$ (obr. 71a). (tento příklad jsme řešili graficky jako Příklad 3 na obr. 71; víme, že $F_{rA} = 310 \text{ N}$ (výpočetem 313 N), $F_{rB} = 160 \text{ N}$ (výpočetem 157 N), $\alpha = 45^\circ$).

Řešení:

Praktické použití průsečné metody si ukážeme na zjištění osových sil v prutech 6, 7 a 9 (obr. 73).

Ze statických podmínek rovnováhy ve styčnicku III sestavíme rovnice:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad F_{s6} + F_{s9x} = 0, \quad F_{s9x} = F_{s9} \cdot \sin 45^\circ, \quad F_{s9} = -\frac{F_{s6}}{\sin 45^\circ}, \\ \text{b) } \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad F_{rA} - F - F_{s7} - F_{s9y} = 0, \quad F_{s9y} = F_{s9} \cdot \cos 45^\circ, \quad F_{s7} = F_{rA} - F - F_{s9} \cdot \cos 45^\circ, \\ \text{c) } \sum_{i=1}^n M_i = 0, \quad -F_{rA} \cdot 2a + F \cdot a + F_{s6} \cdot a = 0, \quad F_{s6} = \frac{2F_{rA} \cdot a - F \cdot a}{a} = 2F_{rA} - F, \end{aligned}$$

$$F_{s6} = 2 \cdot 313 \text{ N} - 470 \text{ N} = 156 \text{ N},$$

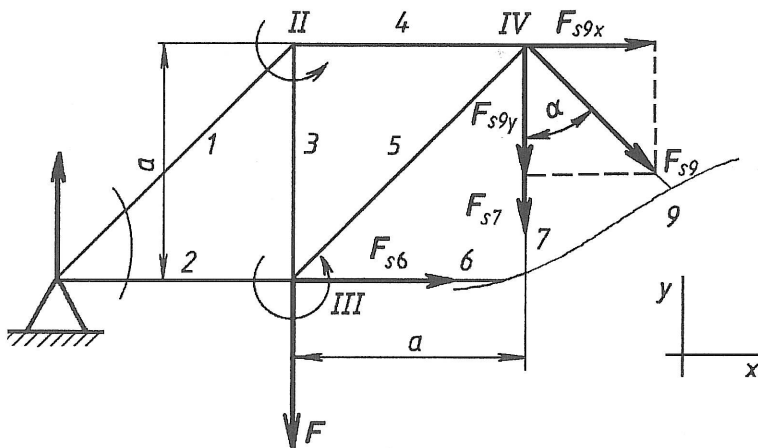
tedy prut 6 je namáhán tahem.

Po dosazení do rovnice a) dostaneme prut 9 je namáhán tlakem (znaménko je minus).

$$F_{s9} = -\frac{156 \text{ N}}{0,707} = -220,65 \text{ N},$$

Po dosazení do rovnice b) dostaneme tzn., že osová síla v prutu 7 je rovna nule.

$$F_{s7} = 313 \text{ N} - 470 \text{ N} - (-220,65 \text{ N}) \cdot 0,707 = 0.$$



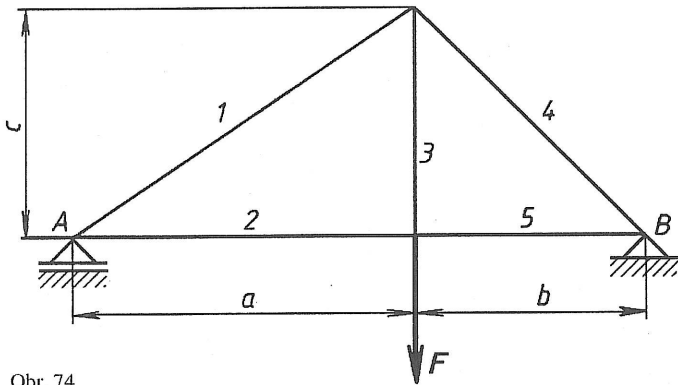
Obr. 73

Provedeným výpočtem jsme ověřili správnost grafického řešení.

8 Prutová soustava

Úlohy

1. Určete výpočtem a graficky osové síly v prutové soustavě zatížené silou $F = 5$ kN, rozměry soustavy jsou $a = 3$ m, $b = 2$ m, $c = 2$ m (obr. 74).

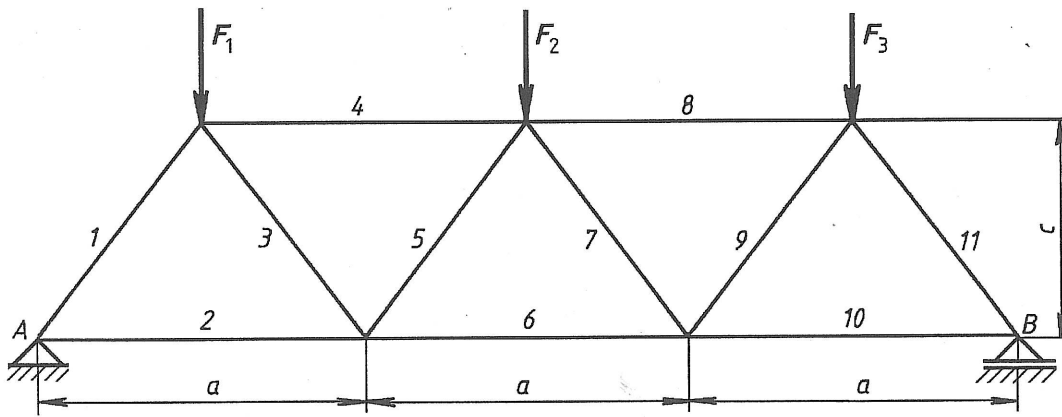


(Výsledek: $F_{rA} = 2$ kN, $F_{rB} = 3$ kN, $F_{s1} = -3,6$ kN, $F_{s2} = 3$ kN, $F_{s3} = 5$ kN, $F_{s4} = -4,25$ kN, $F_{s5} = 3$ kN.)

2. Najděte grafickou metodou osové síly v prutech prutové soustavy zatížené silami $F_1 = F_2 = F_3 = 4$ kN o rozměrech $a = 3$ m, $c = 2$ m. Výpočtem určete síly v prutech 1, 2, 6, 7 a 8 (obr. 75).

(Výsledek: $F_{rA} = F_{rB} = 6$ kN, $F_{s1} = F_{s11} = -7,5$ kN, $F_{s2} = F_{s10} = 4,5$ kN, $F_{s3} = F_{s9} = 2,5$ kN, $F_{s4} = F_{s8} = -6,2$ kN, $F_{s5} = F_{s7} = -2,5$ kN, $F_{s6} = 7,7$ kN.)

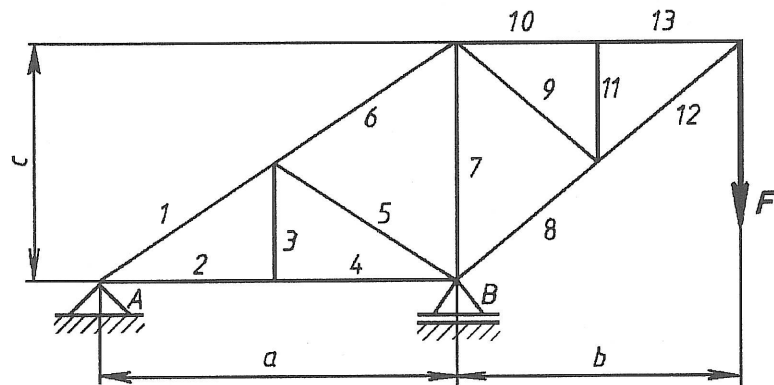
Obr. 74



Obr. 75

3. Určete graficky osové síly v prutech prutové soustavy zatížené silou $F = 7,5$ kN o rozměrech $a = 1,5$ m, $b = 1,2$ m, $c = 1$ m (obr. 76).

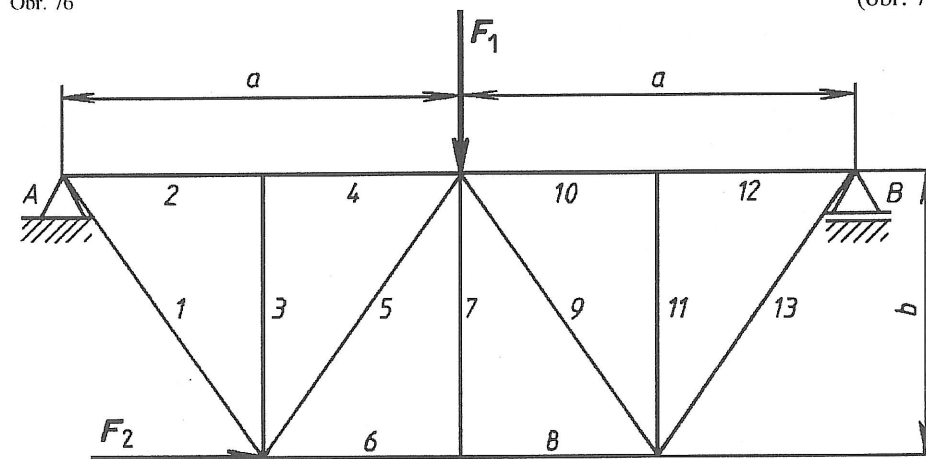
(Výsledek: $F_{rA} = 6$ kN, $F_{rB} = 13,5$ kN, $F_{s1} = F_{s6} = 10,7$ kN, $F_{s2} = F_{s4} = -8,8$ kN, $F_{s3} = F_{s5} = F_{s9} = F_{s11} = 0$, $F_{s7} = -6$ kN, $F_{s8} = F_{s12} = -11,7$ kN, $F_{s10} = F_{s13} = 8,8$ kN.)



Obr. 76

4. Určete graficky osové síly v prutech prutové soustavy zatížené silami $F_1 = 12,5$ kN, $F_2 = 8,5$ kN o rozměrech $a = 5$ m, $b = 3,5$ m. Výpočtem určete síly v prutech 8, 9 a 10 (obr. 77).

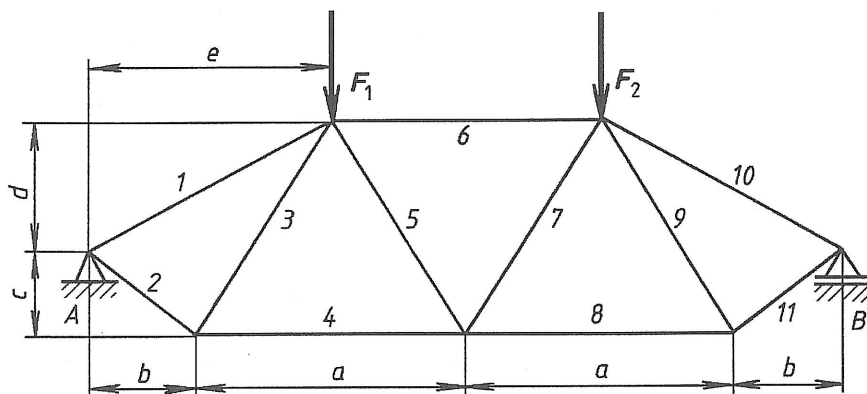
(Výsledek: $F_{rA} = 12,54$ kN, $F_{rB} = 3,27$ kN, $F_{s1} = 11,3$ kN, $F_{s2} = F_{s4} = 2$ kN, $F_{s3} = F_{s7} = F_{s11} = 0$, $F_{s5} = -11,3$ kN, $F_{s6} = F_{s8} = 4,5$ kN, $F_{s9} = -4$ kN, $F_{s10} = F_{s12} = -2,2$ kN, $F_{s13} = 4$ kN.)



Obr. 77

8 Prutová soustava

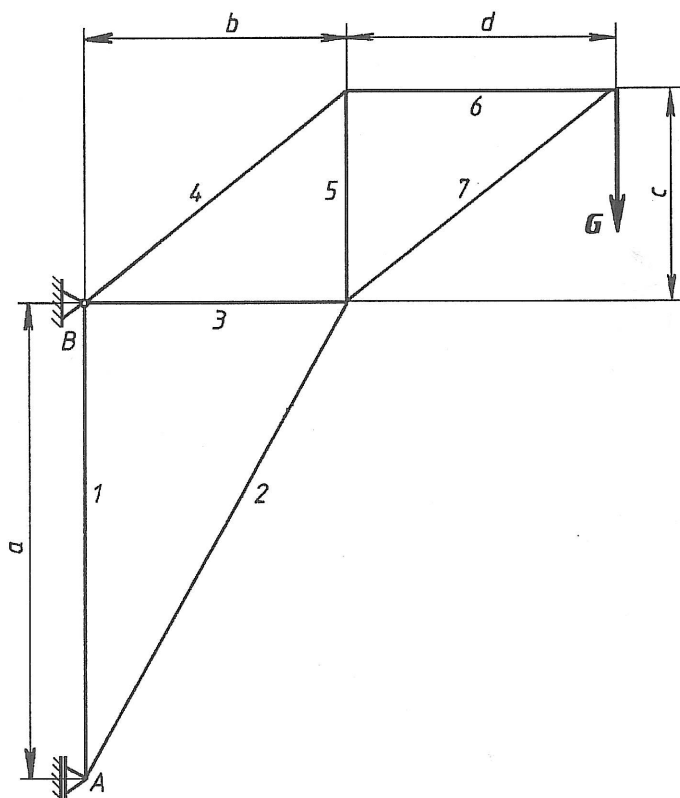
5. Najděte graficky osové síly v prutech prutové soustavy zatížené silami $F_1 = 30 \text{ kN}$, $F_2 = 50 \text{ kN}$ o rozměrech $a = 2,5 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $c = 0,8 \text{ m}$, $d = 1,2 \text{ m}$, $e = 2,25 \text{ m}$ (obr. 78).



(Výsledek: $F_{rA} = 36,43 \text{ kN}$,
 $F_{rB} = 43,57 \text{ kN}$, $F_{s1} = -31 \text{ kN}$,
 $F_{s2} = 35 \text{ kN}$, $F_{s3} = -26 \text{ kN}$,
 $F_{s4} = 41 \text{ kN}$, $F_{s5} = -45 \text{ kN}$,
 $F_{s6} = 8 \text{ kN}$, $F_{s7} = -8 \text{ kN}$,
 $F_{s8} = 49,5 \text{ kN}$, $F_{s9} = -31 \text{ kN}$,
 $F_{s10} = -37 \text{ kN}$, $F_{s11} = 42 \text{ kN}$.)

Obr. 78

6. Určete osové síly v prutech jeřábové konstrukce, která je zatížena břemenem o tíze $G = 25 \text{ kN}$, rozměry konstrukce jsou $a = 4,5 \text{ m}$, $b = 2,5 \text{ m}$, $c = 2 \text{ m}$, $d = 2,6 \text{ m}$ (vlastní tíha jeřábu je zanedbána) - obr. 79. Řešení provedte graficky a výpočtem.



(Výsledek: $F_{rA} = 28,33 \text{ kN}$, $F_{rB} = 37,78 \text{ kN}$,
 $F_{s1} = 51 \text{ kN}$, $F_{s2} = -58,5 \text{ kN}$, $F_{s3} = -5 \text{ kN}$,
 $F_{s4} = 42,25 \text{ kN}$, $F_{s5} = -26 \text{ kN}$, $F_{s6} = 33,5 \text{ kN}$,
 $F_{s7} = -42 \text{ kN}$.)

Obr. 79

Kontrolní otázky

1. Co to je příhradová konstrukce?
2. Jaký je obecný postup při grafickém řešení prutové soustavy?
3. Jak lze prutovou soustavu řešit výpočtem?
4. Kdy je osová síla v prutu rovna nule?
5. Co je podmínkou statické určitosti prutové soustavy?

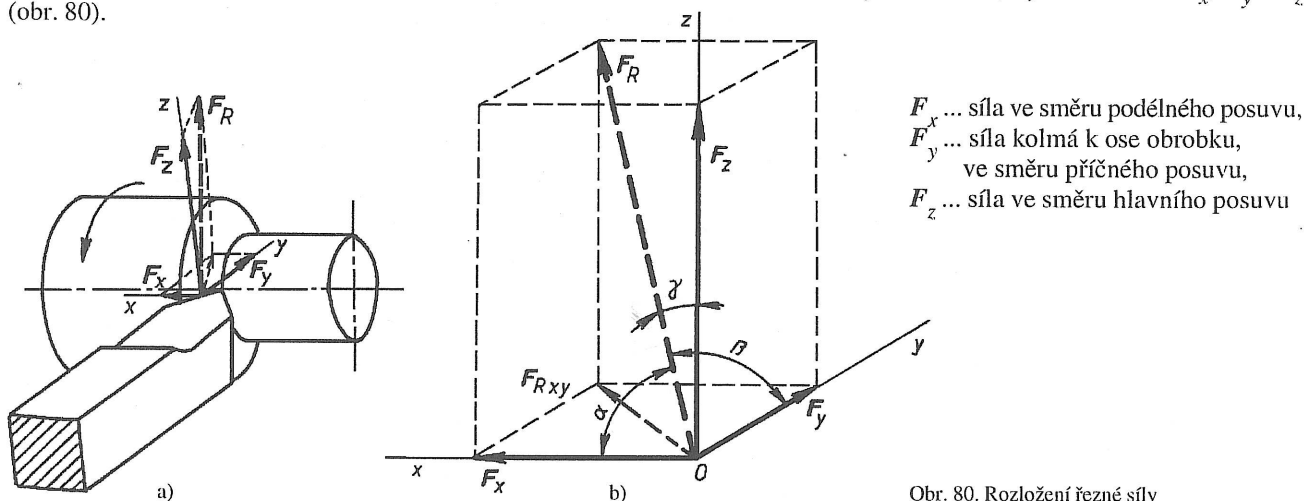
9 SOUSTAVA SIL V PROSTORU

Jestliže nelze nositelkami sil tvořících soustavu sil proložit jednu rovinu, jedná se o soustavu sil v prostoru. Řešení prostorové soustavy je velmi náročné, proto se omezíme pouze na jednoduché případy, kdy síly procházejí společným působištěm a když jsou síly v prostoru rovnoběžné.

9.1 Síly se společným působištěm

Síly navzájem kolmé

V praxi se často setkáváme se silami, které jsou navzájem kolmé, a hledáme jejich výsledný účinek. Takový případ nastává např. při obrábění, kdy vektor řezné síly má obecný směr v prostoru, a proto je potřeba jej rozložit do tří složek. Příkladem může být i soustružení, kde řeznou sílu rozložíme ve směru os soustavy souřadnic $Oxyz$ do složek F_x , F_y a F_z (obr. 80).



Obr. 80. Rozložení řezné síly

Výsledná řezná síla F_R , která působí na soustružnický nůž, je v tomto případě tělesová úhlopříčka silového rovnoběžnostěnu (obr. 80b). Její velikost se vypočítá pomocí dvojnásobného použití Pythagorovy věty:

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2};$$

směrové úhly výslednice F_R určíme ze vztahu:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F_R}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F_R}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F_R}.$$

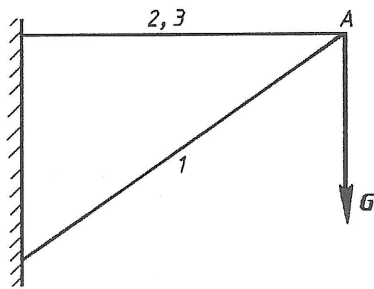
Různoběžné síly ve zvláštní poloze

U prostorových prutových soustav nastává speciální případ, kdy máme určit osové síly v prutech 1, 2, 3 zatížené břemenem G , kde pruty 2 a 3 jsou souměrné podle roviny procházející prutem 1 a nositelkou tíhy G (obr. 81).

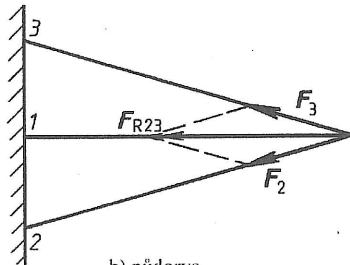
Řešení:

- Prutem 1 a vektorovou přímkou síly G proložíme rovinu, ve které leží i částečná výslednice F_{R23} osových sil v prutech 2 a 3. Tyto tři síly tvoří rovinnou soustavu sil procházejících jedním bodem. Podle známých postupů se vyšetří podmínky pro rovnováhu tří sil v rovině a určí se velikost osové síly F_1 v prutu 1 a velikost částečné výslednice F_{R23} (obr. 81a, tj. nárys situace v prostoru).
- Částečná výslednice F_{R23} leží ve vodorovné rovině určené pruty 2 a 3, proto ji můžeme do směrů těchto prutů rozložit. Jedná se opět o rovinnou soustavu sil procházejících jedním bodem. Rozkladem získáme velikosti sil F_2 a F_3 (obr. 81b, půdorys situace v prostoru).

9 Soustava sil v prostoru

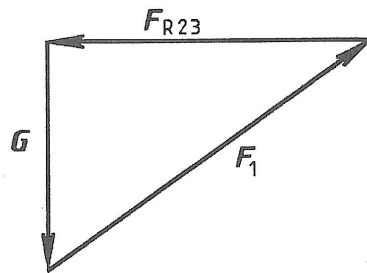


a) nárys



b) půdorys

Při početním řešení se využívají znalosti z výpočtu obecného, příp. pravoúhlého trojúhelníka.



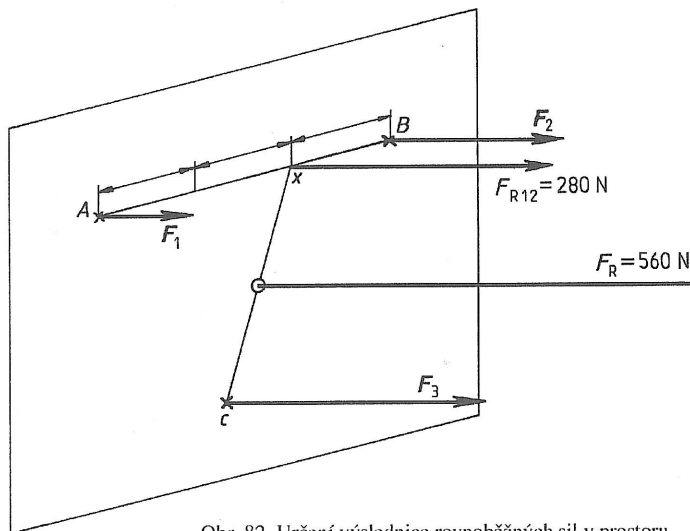
Obr. 81

9.2 Rovnoběžné síly

Rovnoběžné síly v prostoru je možno skládat i rozkládat, podobně jako v rovině, několika způsoby. Nemají-li skládané síly působíště v jedné rovině, využijeme toho, že síly lze po jejich vektorových přímkách libovolně posouvat, aniž se změní jejich silové účinky. Posuneme síly po jejich vektorových přímkách tak, aby jejich působíště ležela v jedné rovině a potom danou úlohu řešíme (podobně jako následující příklad).

Příklad

Jsou dány tři síly $F_1 = 90 \text{ N}$, $F_2 = 190 \text{ N}$, $F_3 = 280 \text{ N}$ s působíšti A , B , C (obr. 82). Určete velikost výslednice.



Obr. 82. Určení výslednice rovnoběžných sil v prostoru

Řešení (obr. 83):

Použijeme způsob postupného skládání sil.

1. Silami F_1 a F_2 je určena rovina, proto je můžeme složit jako síly působící v jedné rovině a získat tak částečnou výslednici F_{R12} . Stejným způsobem jako u rovinné soustavy určíme její působíště X , které leží na přímce určené body A a B ; tato přímka je průsečnicí roviny určené vektorovými přímkami sil F_1 a F_2 a roviny určené třemi působíšti (body) A , B , C .

Rovinu sklopíme do nárysny (obr. 83), dostaneme sklopené síly (F_1) a (F_2), které graficky složíme (jako rovnoběžné síly působící v jedné rovině) v částečnou výslednici (F_{R12}). Polohu částečné výslednice (F_{R12}) najdeme pomocí vláknového mnohoúhelníka, v našem případě trojúhelníka. Působíště X leží na průsečnici roviny určené body A , B , C a roviny určené vektorovými přímkami sil F_1 a F_2 , tj. na přímce procházející body A a B .

2. Částečná výslednice F_{R12} a další skládaná síla F_3 určují rovinu, ve které leží výslednice F_R ; její působíště leží na přímce určené body X a C (obr. 83). Působíště výslednice F_R , bod Y , najdeme podobně jako působíště X částečné výslednice (viz bod 1).

3. Velikost výslednice F_R rovnoběžných sil F_1 , F_2 a F_3 , které tvoří prostorovou soustavu sil, se rovná algebraickému součtu skládaných sil.

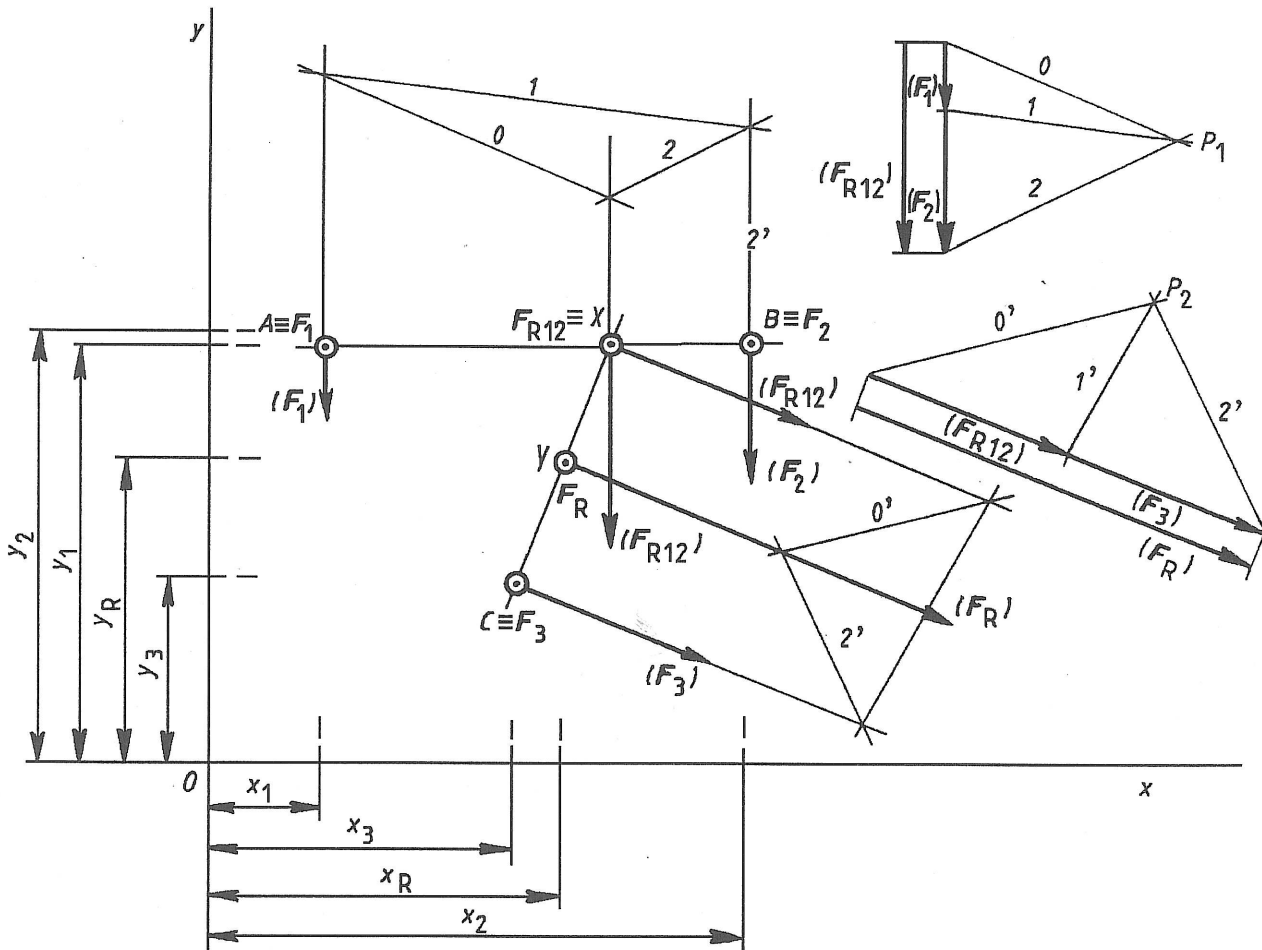
Při početním řešení zjistíme velikost výslednice z algebraického součtu $F_R = \sum_{i=1}^n F_i$.

9 Soustava sil v prostoru

Polohu (souřadnice x_R , y_R) působiště výslednice nalezneme z momentových podmínek k osám souřadnic x a y (obr. 83).

$$M_{R_x} = F_R \cdot x_R = \sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i \qquad M_{R_y} = F_R \cdot y_R = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i$$

Měřítko:
 $m_l: 1 : 10$
 $m_F: 1 \text{ cm} \hat{=} 100 \text{ N}$



Obr. 83

9.3 Rozklad síly do tří rovnoběžných směrů

Příklad

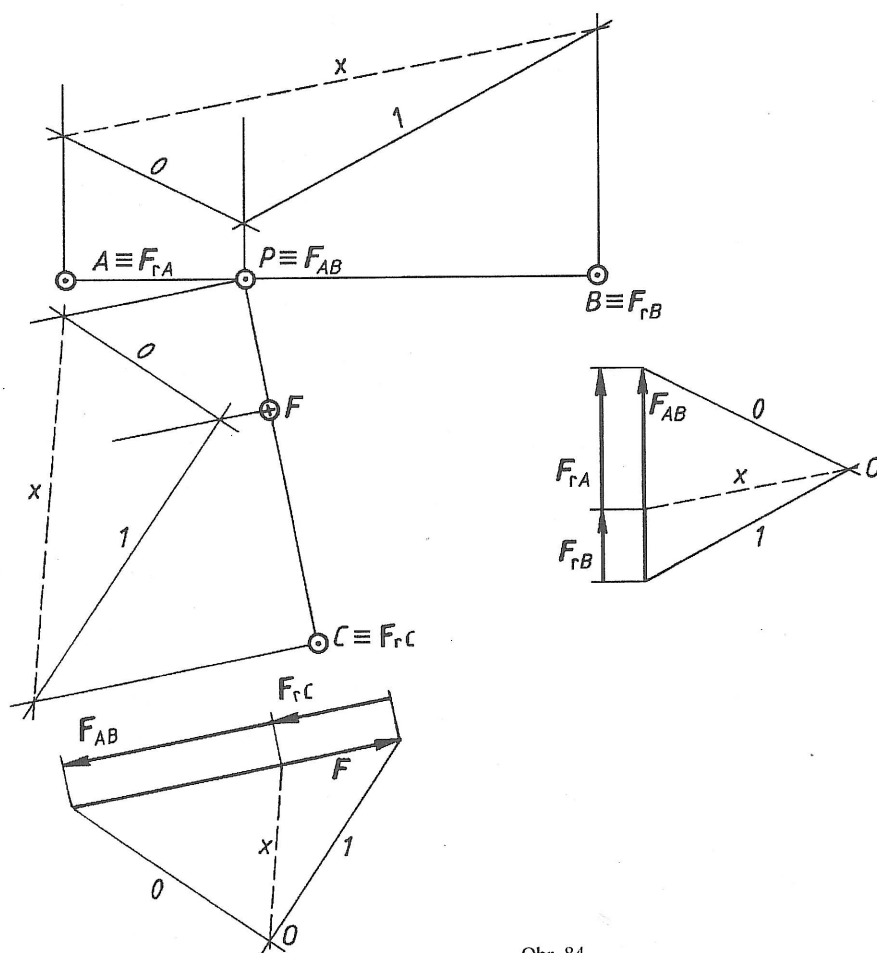
Na podložku, která je uložena na třech podporách A , B a C , působí kolmá síla $F = 450 \text{ N}$; vektorová přímka síly F je rovnoběžná s vektorovými přímkami reakcí. Určete velikost reakcí v podporách. Vzdálenosti podpor jsou: $\overline{AB} = 710 \text{ mm}$, $\overline{AC} = 590 \text{ mm}$, $\overline{BC} = 610 \text{ mm}$, vzdálenost síly F od podpory A je 320 mm od podpory B je 470 mm (obr. 84).

Řešení:

1. Nakreslíme průměty podpor A , B a C a síly F . Sestrojíme přímky CF a AB . Průsečík těchto přímek, bod P , je působištěm síly F_{AB} . Pomocí vláknového mnohoúhelníka rozložíme sílu F na síly F_{rC} a F_{AB} .
2. Opět pomocí vláknového mnohoúhelníka rozložíme sílu F_{AB} na síly F_{rA} a F_{rB} .

(Výsledek: $F_{rA} = 190 \text{ N}$, $F_{rB} = 100 \text{ N}$, $F_{rC} = 160 \text{ N}$.)

9 Soustava sil v prostoru



Měřítko:
 $m_d: 1 : 10$
 $m_F: 1 \text{ cm} \hat{=} 100 \text{ N}$

Obr. 84

9.4 Rovnováha soustavy sil v prostoru

Při rovnováze soustavy sil v prostoru musí být výsledný silový účinek roven nule, tj. velikost výslednice všech působících sil je rovna nule.

U *různoběžných* sil procházejících jedním bodem musí být dodrženy podmínky proti posunutí ve směru všech tří os:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0.$$

U *rovnoběžných* sil musí dodržena podmínka proti posunutí a podmínky proti otáčení:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0.$$

Osmidílná STROJÍRENSKÁ PŘÍRUČKA

Příručka vyplňuje citelnou mezeru v naší strojírenské literatuře. Je zpracována podle nejnovějších poznatků a norem a obsahuje základní znalosti téměř ze všech hlavních odvětví strojírenství a souvisejících oborů. Není určena přímo ke studiu příslušného oboru, je však souhrnem nejaktuálnějších znalostí a slouží proto jako nepostradatelná každodenní pomůcka při řešení teoretických i praktických problémů strojírenského inženýra a technika. Obsahuje základní výpočtové vzorce, fyzikální a technické hodnoty, návody k řešení a praktické příklady. Látka je rozvržena do osmi svazků.

Cena (vč. DPH) - sv. 1: Kč 47,30; sv. 2: Kč 63,-;
sv. 3: Kč 62,50; sv. 4: Kč 65,70; sv. 5: Kč 78,80;
sv. 6: Kč 89,30; sv. 7: Kč 95,-; sv. 8: Kč 149,10.

Při zakoupení celého souboru cena pouze Kč 504,- (vč. DPH)!

Pro školu a praxi


Scientia

pedagogické nakladatelství

Scientia, spol. s r. o.
Radimova 37/50, 169 00 Praha 6
tel.: 02/ 333 502 01, 205 103 69
fax: 02/ 205 102 74
e-mail: obchod@scientia.cz
<http://www.scientia.cz>

STROJNICKÉ TABULKY

Chcete vyrábět kvalitní výrobky rychle a hospodárně? Chcete se vyrovnat nejlepším světovým strojírenským podnikům? Jistě ano. K realizaci Vašich rozhodnutí potřebujete informace. Strojnické tabulky shrnují nejdůležitější poznatky a údaje z odborné literatury a platných norem potřebné pro samostatnou práci ve škole i v praxi, např. pro navrhování, výpočty a volbu materiálu, polotovarů, součástí a nástrojů, pro řešení konstrukčních úloh, technologických cvičení atd. Obsahuje údaje z matematiky, normalizace, mechaniky, základy technického kreslení, výběr materiálů, technologie obrábění, tváření, odlévání, svařování, pájení, upínací prvky, převody atd. Nové vydání zohledňuje úpravy norem až do května 1999.

Třetí, upravené a doplněné vydání. Cena Kč 399,- (vč. DPH)

PŘÍRUČKA OBRÁBĚNÍ

Chcete vyrábět kvalitní výrobky rychle a hospodárně? Chcete se vyrovnat nejlepším světovým strojírenským podnikům? Jistě ano. K realizaci Vašich rozhodnutí potřebujete informace. Ty přináší nejnovější publikace firmy Sandvik-Coromant. Příručka obrábění obsahuje nejmodernější poznatky z oboru obrábění kovů, seznamuje s obrobiteľností, informuje o nejnovějších rezných materiálech, probírá opotřebení břitů nástrojů a ukazuje možnosti a cesty ke zvýšení hospodárnosti obrábění. Jednotlivé kapitoly seznamují čtenáře se všemi typy obrábění - soustružením, soustružením děr, upichováním, výrobou zápichů a závitů, frézováním, vrtáním, vrtáním hlubokých děr - a představují modulární nástrojové systémy. Závěrem jsou uvedeny technické informace a souhrn rezných podmínek pro jednotlivé druhy obrábění.

Cena Kč 294,- (vč. DPH)

Ing. Jan Leinveber, Ing. Josef Švercl a kol.:

TECHNICKÉ KRESLENÍ a základy deskriptivní geometrie

Učebnice vysvětluje v první části význam technického kreslení, důležitost technické dokumentace a normalizace. Seznamuje s kreslením náčrtů, se způsoby technického zobrazování a kótování na strojnických výkresech, pojednává o předpisování přesnosti rozměrů, tvaru, polohy a jakosti povrchu, o kreslení strojních součástí a spojů i o výrobních výkresech. V druhé části jsou probrány základy deskriptivní geometrie. Učivo je zpracováno podle platných pravidel a zásad technického kreslení zakotvených v normách českých (ČSN), evropských (EN) i mezinárodních (ISO).

Publikace je určena pro žáky středních škol, zejména středních průmyslových škol strojnických, pro techniky v praxi i pro vysoké školy technické strojírenského zaměření a pro všechny, kteří potřebují ke své práci technické kreslení a základní poznatky z deskriptivní geometrie.

Nové, přepracované vydání. Cena Kč 168,- (vč. DPH)

*Těšíme se na Vaše objednávky! Navštivte nás, napište, zavolejte!
Objednané tituly Vám zašleme obratem!*

10 TĚŽIŠTĚ

Můžeme si představit, že každé těleso je složeno ze značného počtu malých hmotných částí - bodů (obr. 85). Působením zemské přitažlivosti se každá částice projevuje tíhovou silou, směřující do středu Země. Vzhledem k značné velikosti poloměru Země (6 378 km) lze vektorové přímkové těchto sil pokládat za rovnoběžky. Výslednice uvedených sil je rovna součtu jednotlivých tíhových sil, celkové tíže tělesa G . Natočíme-li těleso do jiné polohy, např. o 90° , nemění se směr tíhových sil jednotlivých bodů. Vektorová přímková výslednice nenatočeného tělesa se protne s vektorovou přímkou výslednice natočeného tělesa v bodě, který se nazývá *těžiště*.

Tedy: *Těžiště tělesa* je bod, jímž prochází při libovolném potočení tělesa vzhledem k Zemi přímková, na níž leží vektor jeho tíhy. Tato přímková se nazývá *těžnice*. Udává směr a polohu výslednice soustavy rovnoběžných sil, a proto ji lze stanovit také graficky silovým a vláknovým mnohoúhelníkem.

Těžiště tělesa zavěšeného v jednom bodě leží v rovnovážné poloze tělesa vždy na svislé přímkové procházející tímto bodem. Těžiště je průsečíkem všech těžnic tělesa příslušejících jeho různým potočením vzhledem k Zemi.

Existují i jiné definice těžiště, např.: „*Těžiště* tělesa je působíště výslednice všech tíhových sil působících na jednotlivé hmotné body tělesa.“

Poloha těžiště tuhého tělesa je stálá a závisí na rozložení látky v tělese (např. zčásti naplněná skříň má těžiště níž než prázdná skříň).

Těžiště *nestejnorodých a nepravidelných* těles se určuje výpočtem (vyžaduje často hlubší matematické znalosti), graficky nebo experimentálně. U těles, jejichž převládajícím rozměrem je délka, lze určit přibližně polohu těžiště *podpíráním* (podepřeme-li např. trubku tak, aby byla ve vodorovné rovnovážné poloze, je její těžiště právě nad místem podepření).

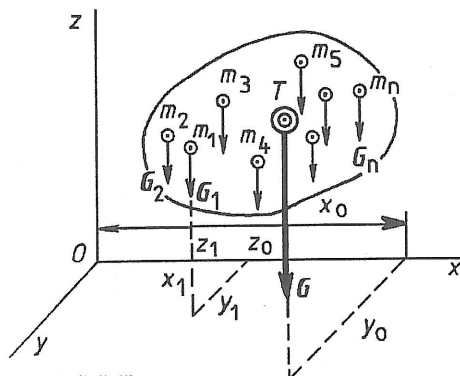
Poloha těžiště *stejnorodého* tělesa nezávisí na jeho hmotnosti, ale na jeho geometrickém tvaru. Proto lze hovořit i o *těžišti ploch a čar*, ačkoliv nemají hmotnost, tedy ani tíhu. S určitou nepřesností si lze představit, že plocha je těleso s nulovou tloušťkou a čára tyč s průměrem rovným nule. Při zjišťování jejich těžiště předpokládáme, že plochy a čáry mají hmotnost, která je u plochy úměrná jejímu obsahu a u čáry je úměrná její délce. U *pravidelných stejnorodých* těles leží těžiště v jejich geometrickém středu (těžiště *kruhu* leží ve středu kruhu). Některá tělesa (např. prázdná váza, obruč) mají těžiště mimo látku tělesa.

U některých strojních součástí a strojů je nutné, aby jejich těžiště bylo v žádané poloze. Například těžiště setrvačnicku, hřídele parní turbíny apod. má být v ose otáčení, jinak vznikají nevyvážené odstředivé síly, které způsobí chvění stroje apod.

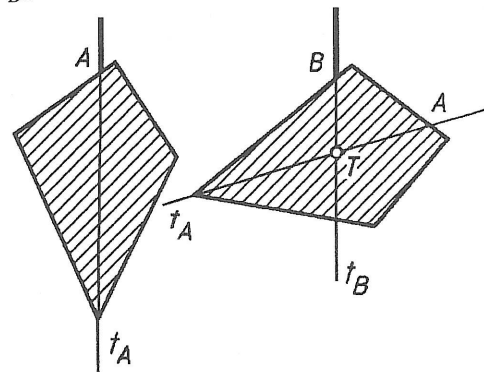
Určení správné polohy těžiště má velký význam např. při stavbě letadel, lodí, při výrobě prostřihovacích a lisovacích nástrojů, při výpočtu odstředivých sil hlavně u vysokootáčkových strojů apod. Poloha těžiště je rozhodující také např. při posuzování stability strojů a konstrukcí.

10.1 Určení těžiště rovinného obrazce

Experimentálně lze nalézt těžiště např. tenké nepravidelné desky opakovaným *zavěšováním* alespoň ve dvou různých bodech na jejím obvodu (body A, B - obr. 86). Po každém zavěšení se nakreslí na desku přímková ve směru prodlouženého závěsu a v průsečíku těchto přímkových leží těžiště T desky (přímkové t_A, t_B jsou těžnice).



Obr. 85. Těžiště tělesa



Obr. 86. Příklad experimentálního zjišťování těžiště

10 Těžiště

Kromě pokusu lze polohu těžiště zjistit graficky a výpočtem. Metody vyplývají z definice těžiště. Těžiště je bod, kterým prochází výslednice tíhových sil; budeme proto hledat nejprve polohu výslednice, abychom našli polohu těžiště.

V praxi je velmi často třeba určit těžiště složitějších útvarů. Využívá se přitom toho, že tyto složitější útvary bývají obvykle složeny ze základních geometrických útvarů.

Obecný postup při určování těžiště:

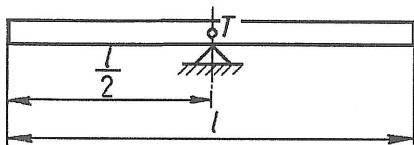
1. Útvar (těleso) rozdělíme na takové části, u nichž známe polohu těžiště.
2. Zjistíme velikost těchto částí a do těžišť jednotlivých částí zavedeme „síly“, jejichž velikosti odpovídají velikostem příslušných částí.
3. Najdeme polohu výslednice těchto „sí“ ve dvou směrech, nejlépe na sebe kolmých. Při početním řešení dostaneme dvě souřadnice polohy těžiště. Je-li úloha řešena graficky, bude těžiště v průsečíku vektorových přímků výslednic.

Je-li celé těleso z jednoho druhu materiálu, stačí místo tíhy tělesa určit jen objem, neboť tíha je úměrná objemu.

U těles, ploch a čar, které jsou souměrné kolem jedné osy, stačí při určování polohy těžiště zjistit jen jednu souřadnici, neboť těžiště leží na ose souměrnosti.

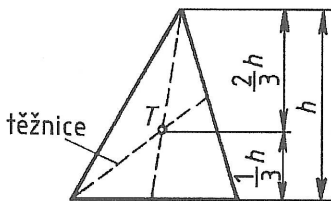
10.1.1 Těžiště základních geometrických útvarů (obr. 87)

a)



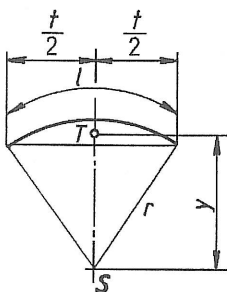
Těžiště *stejnorodých tyčí stálého průřezu* je v polovině jejich délky.

c)



Těžiště *trojúhelníka* je v průsečíku těžnic.

e)



Těžiště *kružnicového oblouku* délky l leží na ose příslušného středového úhlu ve vzdálenosti

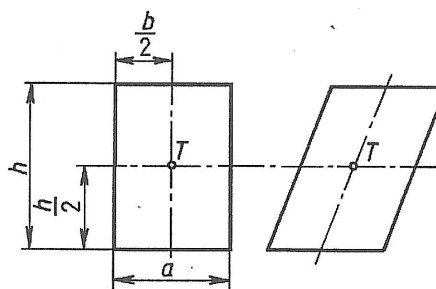
$$y = \frac{r \cdot t}{l} \text{ od středu kružnice, na níž oblouk leží}$$

(t je délka tětiny příslušné k danému oblouku kružnice).

Je-li oblouk *půlkružnice* ($t = 2r$, $l = \pi \cdot r$), leží těžiště

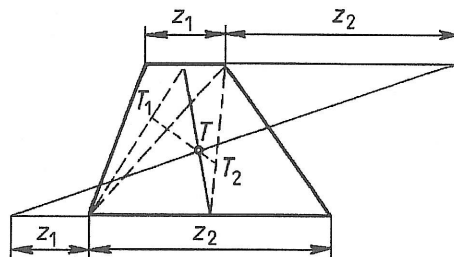
$$\text{ve vzdálenosti } y = \frac{2}{3}r.$$

b)



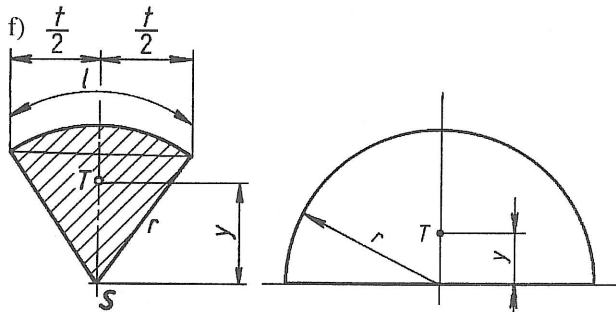
Těžiště *obdélníka a kosodélníka* leží v průsečíku os souměrnosti.

d)



Těžiště *lichoběžníka* lze určit graficky dvojným způsobem patrným z obrázku.

f)



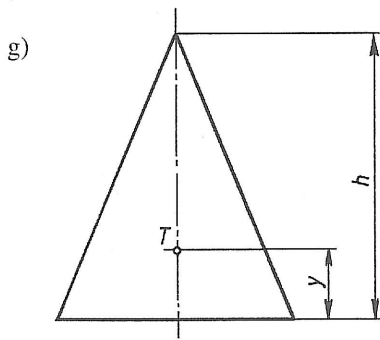
Těžiště *kruhové výseče* leží na ose souměrnosti dané kruhové výseče ve vzdálenosti

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot t}{l} \text{ od středu příslušné kružnice.}$$

Je-li *kruhová výseč půlkruh* ($t = 2r$, $l = \pi \cdot r$), leží těžiště

$$\text{ve vzdálenosti } y = \frac{4r}{3\pi}.$$

10 Těžiště



Těžiště kužele a jehlanu

$$y = \frac{h}{4}, \text{ kde } h \text{ je výška.}$$

Obr. 87

10.1.2 Poloha těžiště rovinného obrazce – příklady

Příklad 1

Určete graficky a výpočtem polohu těžiště obrazce zobrazeného na obr. 88.

Řešení:

I. Graficky:

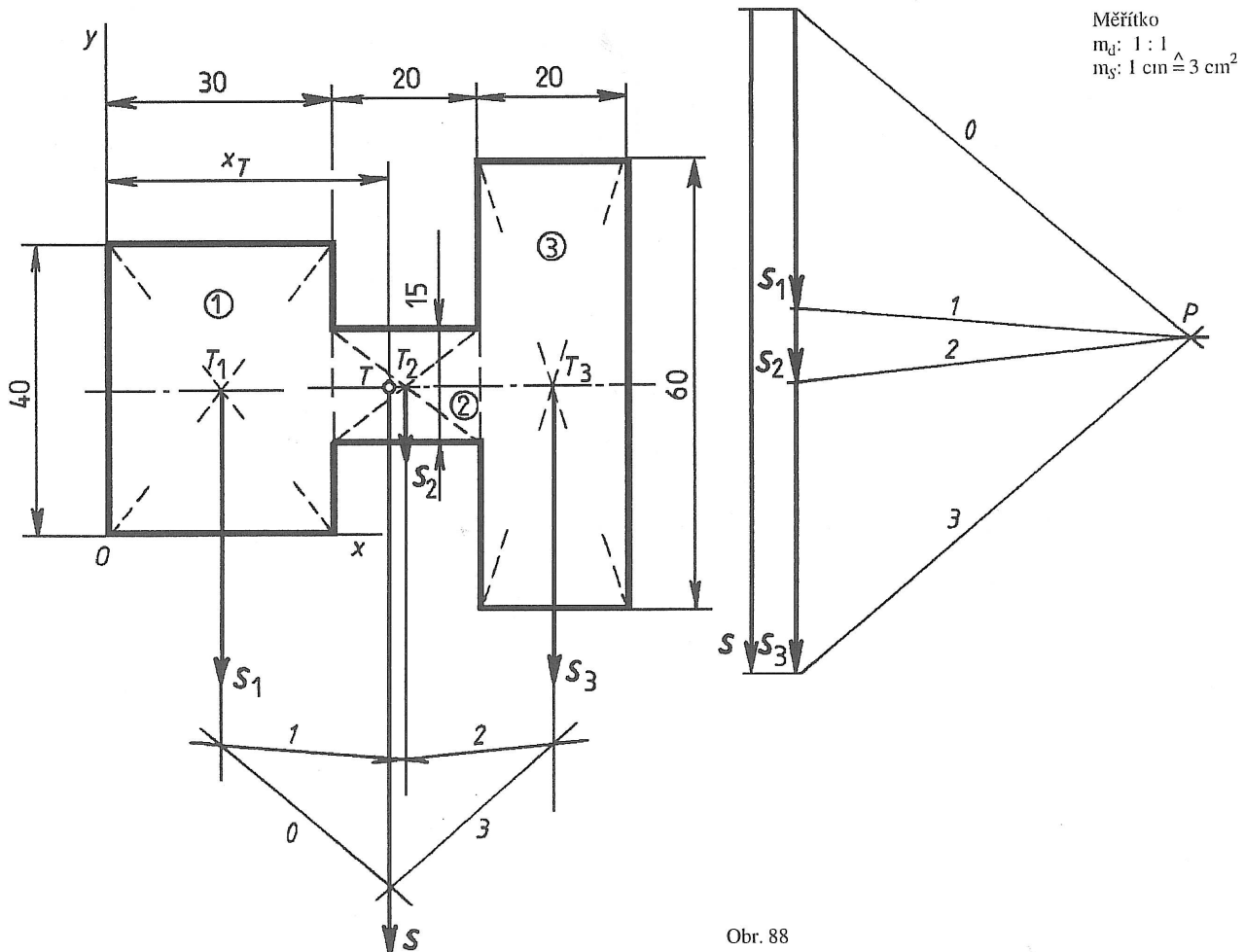
1. Nakreslíme obrazec ve vhodném měřítku délek stran. Zvolíme vhodnou soustavu souřadnic Oxy .
2. Plochu obrazce rozdělíme na dílčí plochy, u nichž umíme určit těžiště, tj. v tomto případě na tři obdélníky 1, 2 a 3. Určíme těžiště a obsahy těchto dílčích ploch:

$$S_1 = 12 \text{ cm}^2, S_2 = 3 \text{ cm}^2, S_3 = 12 \text{ cm}^2; \quad \text{celková plocha } S = S_1 + S_2 + S_3 = 12 \text{ cm}^2 + 3 \text{ cm}^2 + 12 \text{ cm}^2 = 27 \text{ cm}^2.$$

3. Zvolíme měřítko obsahu ploch ($m_S: 1 \text{ cm}^2 \hat{=} 3 \text{ cm}^2$) a nakreslíme „silový“ a vláknový mnohoúhelník.

Směr sil se volí zpravidla kolmý k ose.

V příkladu 1 vyšetřujeme pouze jednu souřadnici (x_T) těžiště, protože obrazec je souměrný podle osy o a těžiště leží na ose souměrnosti.



Obr. 88

10 Těžiště

II. Výpočetem:

1. Plochu složeného obrazce nahradíme plochami, u nichž těžiště umíme určit. V těžištích těchto dílčích ploch zavedeme „síly“, jejichž velikosti jsou úměrné velikostem ploch.

2. Z momentové podmínky k libovolnému bodu v rovině (např. O) sestavíme rovnici podle pravidla, že moment výslednice k libovolnému bodu se rovná součtu momentů jednotlivých „sil“ k témuž bodu. K určení momentu potřebujeme znát délky ramen „sil“ k témuž bodu O , tj. $x_1 = 1,5 \text{ cm}$, $x_2 = 4 \text{ cm}$, $x_3 = 6 \text{ cm}$.

Výsledný moment bude záporný, protože výslednice S leží vpravo od bodu O !

$$M_R = \sum_{i=1}^n M_i, \quad -M_R = -S_1 \cdot x_1 - S_2 \cdot x_2 - S_3 \cdot x_3,$$

$$M_R = 12 \text{ cm}^2 \cdot 1,5 \text{ cm} + 3 \text{ cm}^2 \cdot 4 \text{ cm} + 12 \text{ cm}^2 \cdot 6 \text{ cm} = 102 \text{ cm}^3.$$

Protože

$$M_R = S \cdot x_T, \quad x_T = \frac{M_R}{S} \quad (S = 27 \text{ cm}^2)$$

je souřadnice x_T těžiště

$$x_T = \frac{102 \text{ cm}^3}{27 \text{ cm}^2} = 3,8 \text{ cm}.$$

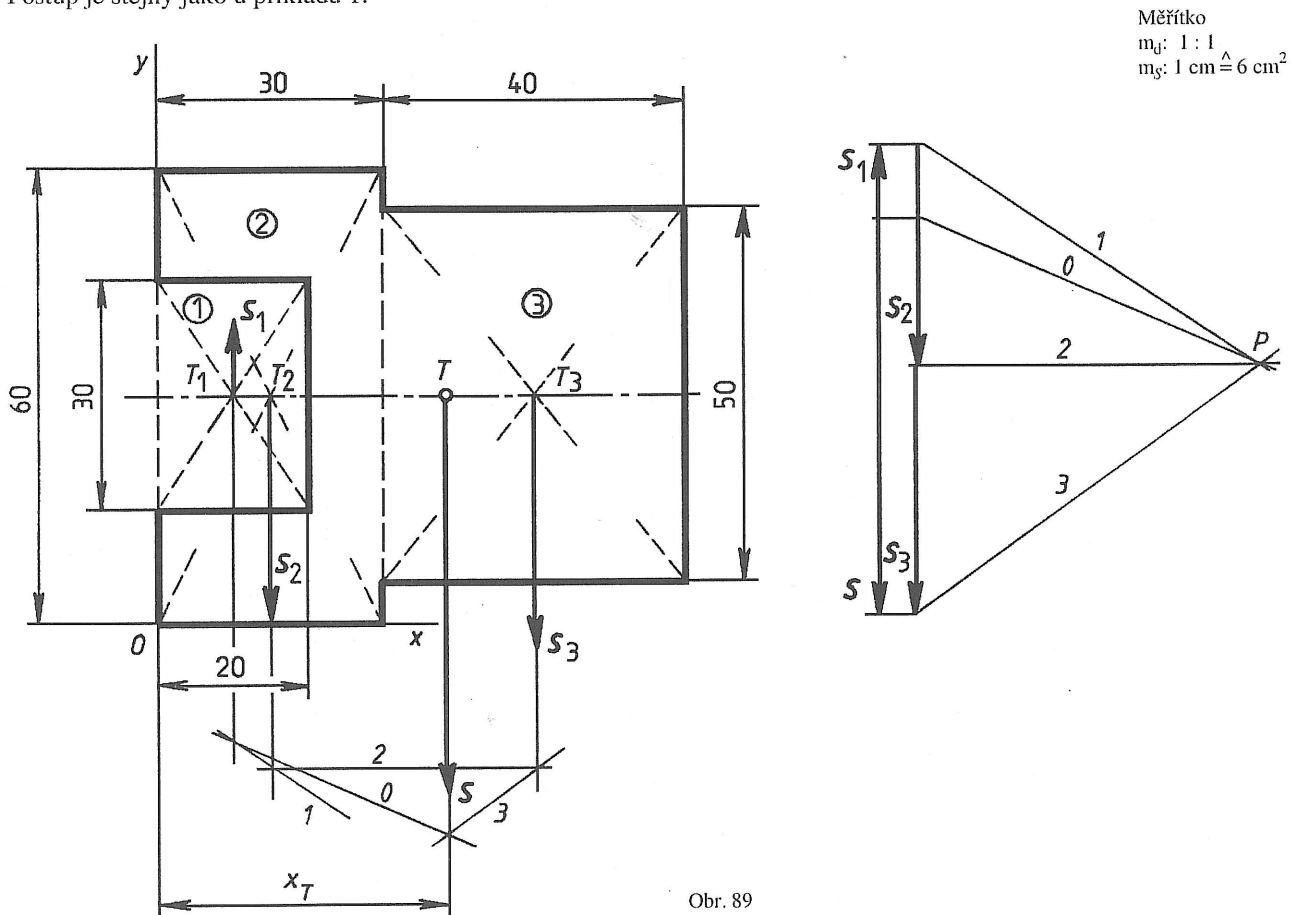
Příklad 2

Určete graficky a výpočtem polohu těžiště plochy zobrazené na obr. 89.

Řešení:

I. Graficky:

Postup je stejný jako u příkladu 1.



Obr. 89

II. Výpočetem:

Plochu obrazce opět rozdělíme na dílčí základní plochy. Můžeme např. obsah plochy S_2 uvažovat jako úplný obdélník a potom musíme od obsahu S_2 plochy 2 odečíst obsah S_1 plochy 1:

$$S = S_2 - S_1 + S_3, \quad S_1 = 3 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2, \quad S_2 = 6 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2, \quad S_3 = 4 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}^2,$$

$$S = 18 \text{ cm}^2 - 6 \text{ cm}^2 + 20 \text{ cm}^2 = 32 \text{ cm}^2.$$

10 Těžiště

Momentovou podmínku ke zvolenému bodu O určíme podobně jako v příkladu 1.

Souřadnice x těžišť jednotlivých dílčích ploch: $x_1 = 1 \text{ cm}, x_2 = 1,5 \text{ cm}, x_3 = 5 \text{ cm}.$

$$M_R = \sum_{i=1}^n M_i, \quad -M_R = S_1 \cdot x_1 - S_2 \cdot x_2 - S_3 \cdot x_3,$$

$$M_R = -6 \text{ cm}^2 \cdot 1 \text{ cm} + 18 \text{ cm}^2 \cdot 1,5 \text{ cm} + 20 \text{ cm}^2 \cdot 5 \text{ cm} = 121 \text{ cm}^3.$$

Protože

$$M_R = S \cdot x_T, \quad x_T = \frac{M_R}{S},$$

je souřadnice x_T těžiště obrazce

$$x_T = \frac{121 \text{ cm}^3}{32 \text{ cm}^2} = 3,78 \text{ cm}.$$

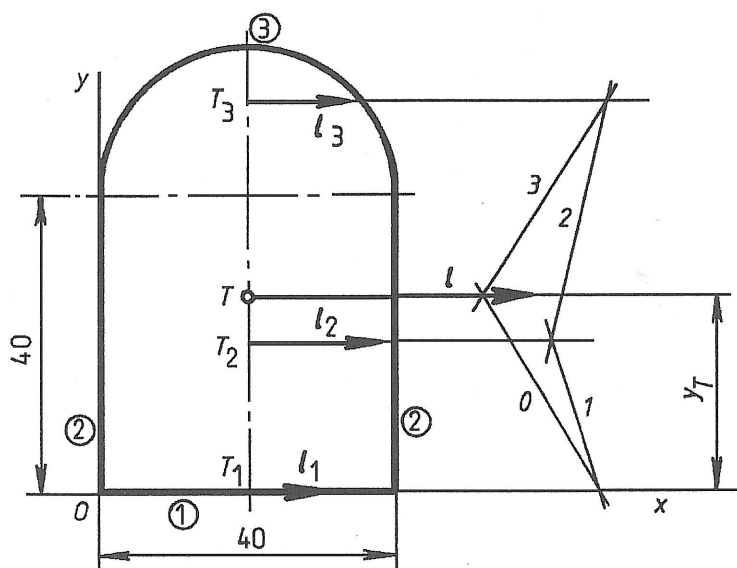
I v tomto příkladu vyšetřujeme pouze jednu souřadnici (x_T) těžiště, protože obrazec je souměrný podle osy o a těžiště leží na ose souměrnosti. Moment „síly“ S_1 má opačný smysl.

Příklad 3

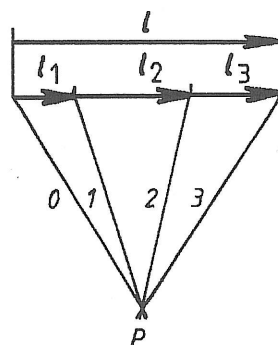
V plechu má být vystřižen otvor tvaru, který je znázorněn na obr. 90, přičemž tlak střížníku musí být po celém obvodu rovnoměrně rozložen. Je proto třeba určit těžiště obvodové čáry.

Řešení:

I. Graficky:



Měřítko
 $m_d: 1:1$
 $m_v: 1 \text{ cm} \hat{=} 5 \text{ mm}$



Obr. 90

II. Výpočtem:

Postup je stejný jako u předcházejících příkladů. Rozdíl je pouze v tom, že musíme určit délky l_1, l_2, l_3 dílčích obvodových čar:

$$l_1 = 40 \text{ mm}, l_2 = 2 \cdot 40 \text{ mm} = 80 \text{ mm}, l_3 = \pi \cdot 20 \text{ mm} = 3,14 \cdot 20 \text{ mm} = 62,8 \text{ mm},$$

$$\text{délka obvodu otvoru} \quad l = 182,8 \text{ mm}.$$

Obrazec je souměrný podle osy o , budeme proto zjišťovat pouze souřadnice y .

Těžiště T_1, T_2 mají souřadnice $y_1 = 0 \text{ mm}, y_2 = 20 \text{ mm},$

$$\text{souřadnice těžiště } T_3: \quad y_3 = l_2 + \frac{2R}{\pi}, \quad y_3 = 40 \text{ mm} + \frac{2 \cdot 20 \text{ mm}}{3,14} = 52,7 \text{ mm}.$$

Protože

$$M_R = \sum_{i=1}^n M_i, \quad M_R = l \cdot y$$

a výsledný moment bude záporný (výslednice L leží vpravo od bodu O), bude

$$-l \cdot y_T = -l_1 \cdot y_1 - l_2 \cdot y_2 - l_3 \cdot y_3,$$

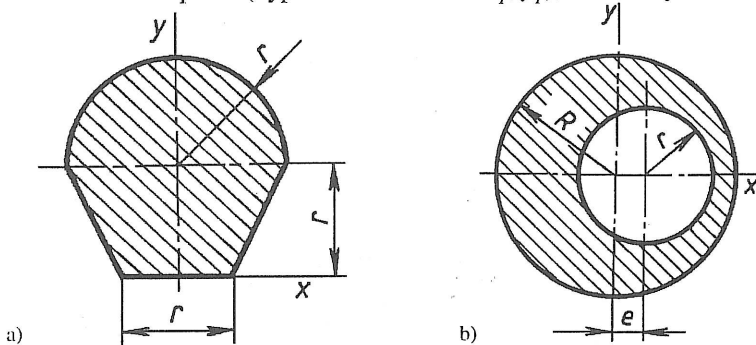
10 Těžiště

odtud vypočteme po dosazení souřadnice y těžiště T :

$$y_T = \frac{40 \text{ mm} \cdot 0 \text{ mm} + 80 \text{ mm} \cdot 20 \text{ mm} + 62,8 \text{ mm} \cdot 52,7 \text{ mm}}{182,8 \text{ mm}} = 26,86 \text{ mm}.$$

Úloha

Stanovte těžiště ploch (vypočítejte souřadnice x_T, y_T), naznačených v obr. 91a, b.



Obr. 91

(Výsledek: a) $x_T = 0, y_T = r$, b) $x_T = -\frac{er^2}{R^2 - r^2}, y_T = 0$.)

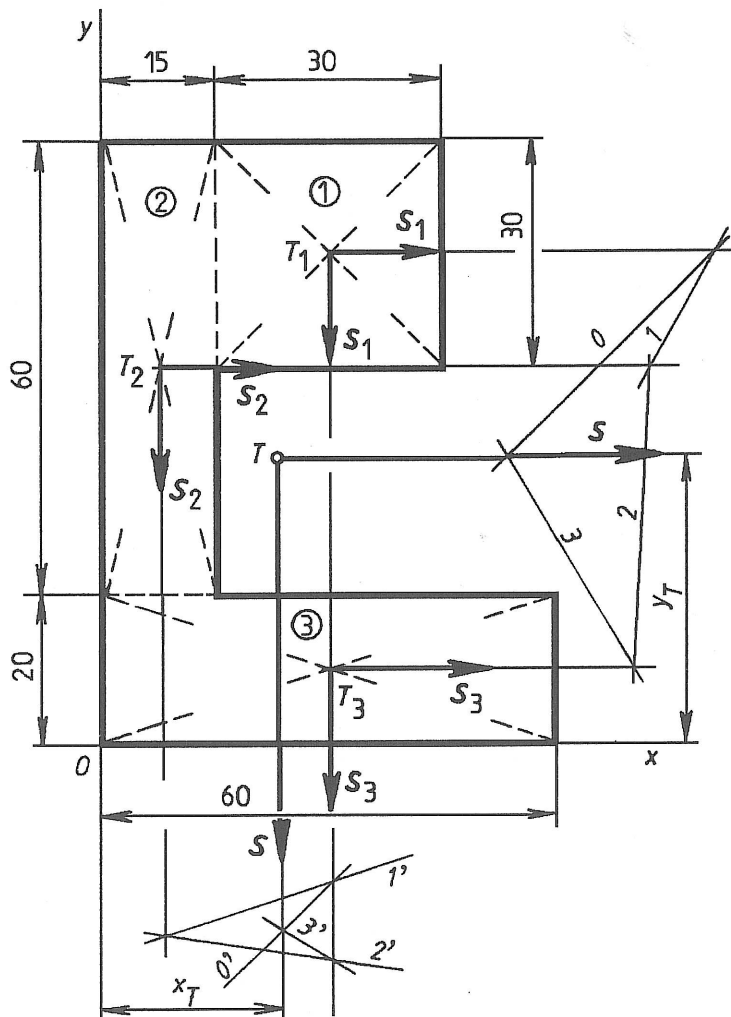
Příklad 4

Určete výpočtem a graficky těžiště *nesouměrné* plochy (obr. 92).

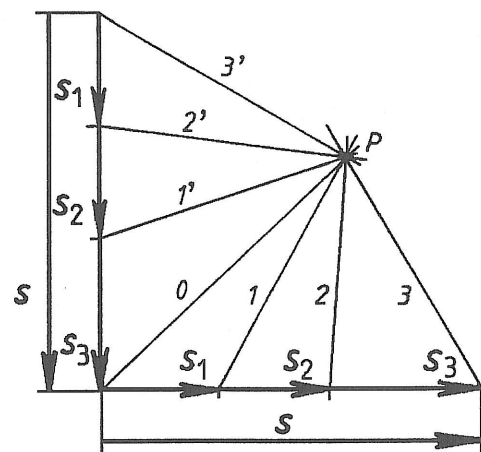
Řešení:

Postup je obdobný jako u předchozích příkladů, protože se však jedná o nesouměrný útvar, je třeba najít obě souřadnice.

I. Graficky (využijeme možnost sloučit silové obrazce):



Měřítko
 $m_d: 1:1$
 $m_s: 1 \text{ cm} \triangleq 6 \text{ cm}^2$



Obr. 92

10 Těžiště

II. Výpočtem:

Velikost dílčích ploch

$$S_1 = 3 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 9 \text{ cm}^2,$$

$$S_2 = 6 \text{ cm} \cdot 1,5 \text{ cm} = 9 \text{ cm}^2,$$

$$S_3 = 2 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2,$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 9 \text{ cm}^2 + 9 \text{ cm}^2 + 12 \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2.$$

Určíme souřadnici x

$$M_R = \sum_{i=1}^n -M_R = -S \cdot x_T = -S_1 \cdot x_1 - S_2 \cdot x_2 - S_3 \cdot x_3,$$

$$x_T = \frac{9 \text{ cm}^2 \cdot 3 \text{ cm} + 9 \text{ cm}^2 \cdot 0,75 \text{ cm} + 12 \text{ cm}^2 \cdot 3 \text{ cm}}{30 \text{ cm}^2},$$

$$x_T = 2,32 \text{ cm},$$

Souřadnice těžišť

ve směru x	ve směru y
$x_1 = 3 \text{ cm},$	$y_1 = 6,5 \text{ cm},$
$x_2 = 0,75 \text{ cm},$	$y_2 = 5 \text{ cm}$
$x_3 = 3 \text{ cm},$	$y_3 = 1 \text{ cm}.$

a souřadnici y těžiště:

$$M_R = \sum_{i=1}^n -M_R = -S \cdot y = -S_1 \cdot y_1 - S_2 \cdot y_2 - S_3 \cdot y_3,$$

$$y_T = \frac{9 \text{ cm}^2 \cdot 6,5 \text{ cm} + 9 \text{ cm}^2 \cdot 5 \text{ cm} + 12 \text{ cm}^2 \cdot 1 \text{ cm}}{30 \text{ cm}^2},$$

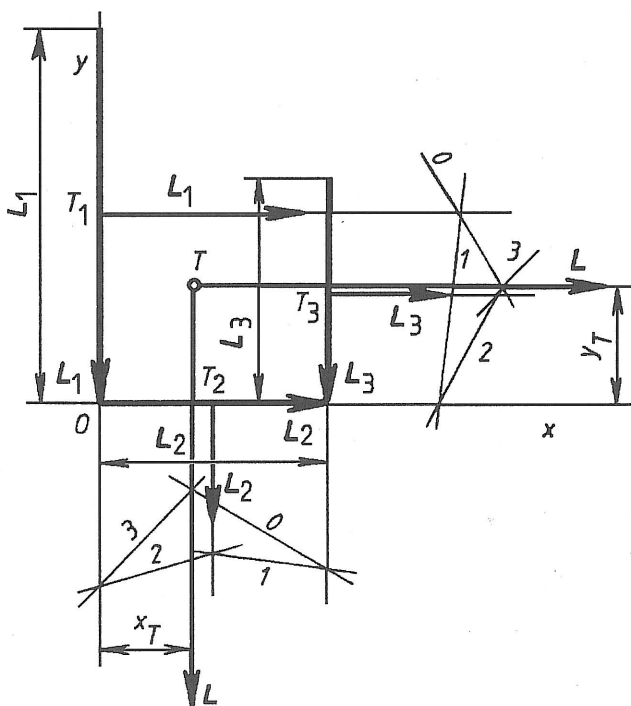
$$y_T = 3,85 \text{ cm}.$$

Příklad 5

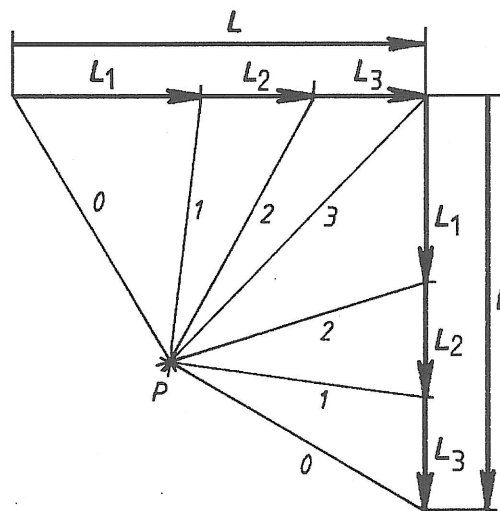
V plechu je prostřihována lomená drážka, kterou si lze zjednodušeně představit jako lomenou čáru (obr. 93a). Pro konstrukci nástroje je potřeba určit těžiště této čáry. Jsou známy úsečky lomené čáry (obr. 93b): $L_1 = 50 \text{ mm}$, $L_2 = 30 \text{ mm}$, $L_3 = 30 \text{ mm}$. Určete graficky těžiště lomené čáry.

Řešení:

Měřítko
m_l: 1 cm $\hat{=}$ 2 cm



a)



b)

Obr. 93

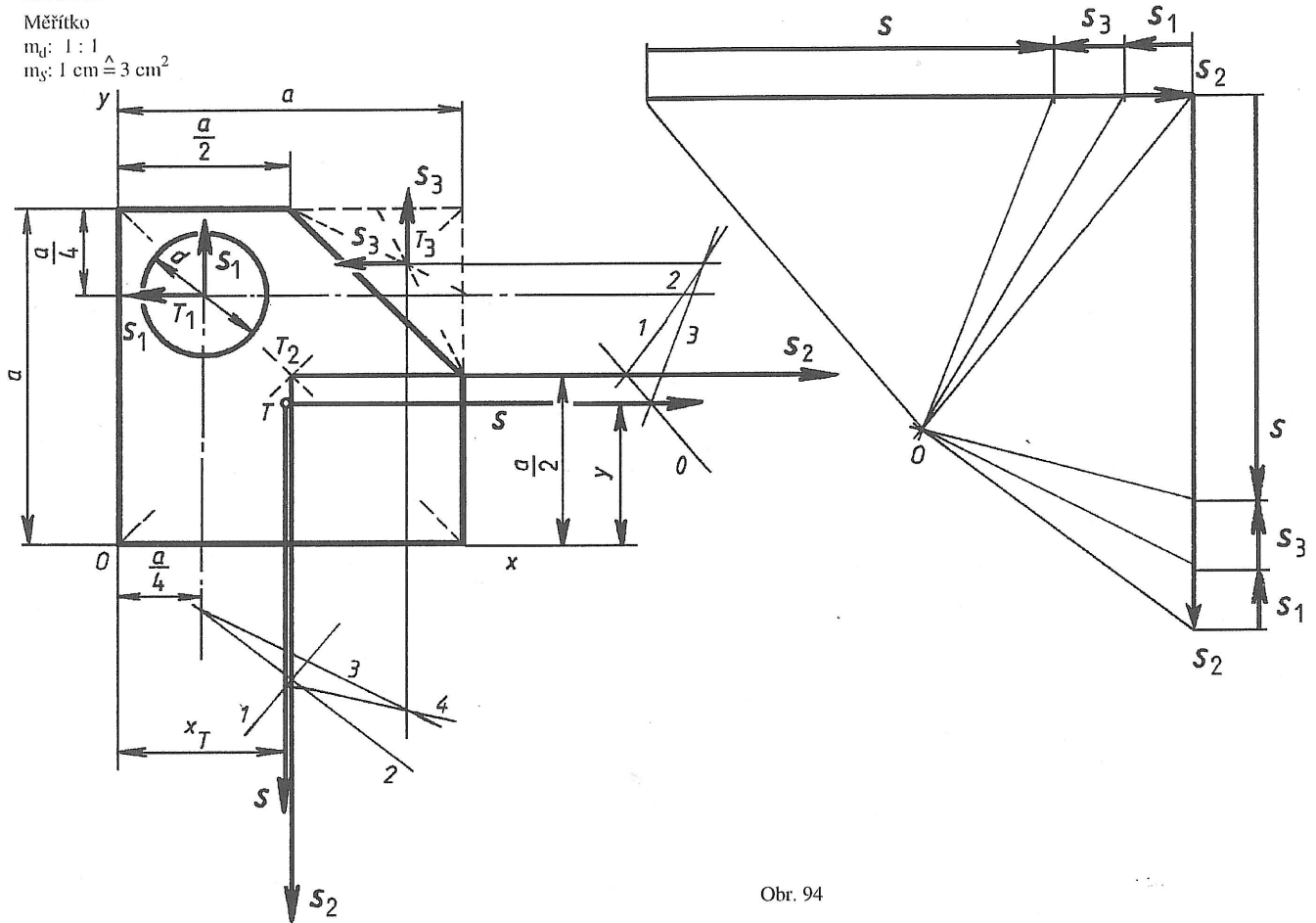
Poloha těžiště je určena: $T [12,5; 15,5]$.

Příklad 6

Určete graficky těžiště plochy zobrazené na obr. 94, která má tyto rozměry: $a = 46 \text{ mm}$, $d = 17 \text{ mm}$.

Řešení:

Měřítko
 $m_x: 1:1$
 $m_y: 1 \text{ cm} \hat{=} 3 \text{ cm}^2$



Obr. 94

Plocha je rozdělena na dílčí plochy (abychom počítali s „menšími“ čísly, převedeme ve výpočtu milimetry na centimetry):

$$S_1 = \pi \cdot \frac{d^2}{4},$$

$$S_2 = a^2,$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2^2},$$

$$S_1 = 3,14 \cdot \frac{1,7^2 \text{ cm}^2}{4} = 2,268 \text{ cm}^2,$$

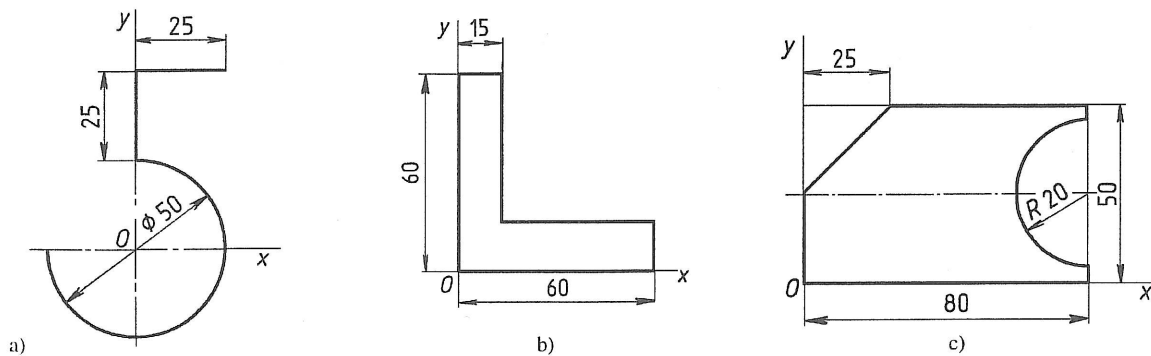
$$S_2 = 4,6^2 \text{ cm}^2 = 21,16 \text{ cm}^2,$$

$$S_3 = \frac{21,16^2 \text{ cm}^2}{8} = 2,645 \text{ cm}^2.$$

Poloha těžiště je určena: $T [22; 19]$

Úlohy

Určete výpočtem i graficky polohu těžiště útvarů na obr. 95a až c a porovnejte výsledky obou řešení.



Obr. 95

(Výsledky: a) $x_T = 5,58 \text{ mm}$, $y_T = 9,3 \text{ mm}$, b) $x_T = y_T = 20 \text{ mm}$, c) $x_T = 36,3 \text{ mm}$, $y_T = 23,7 \text{ mm}$.)

Kontrolní otázky

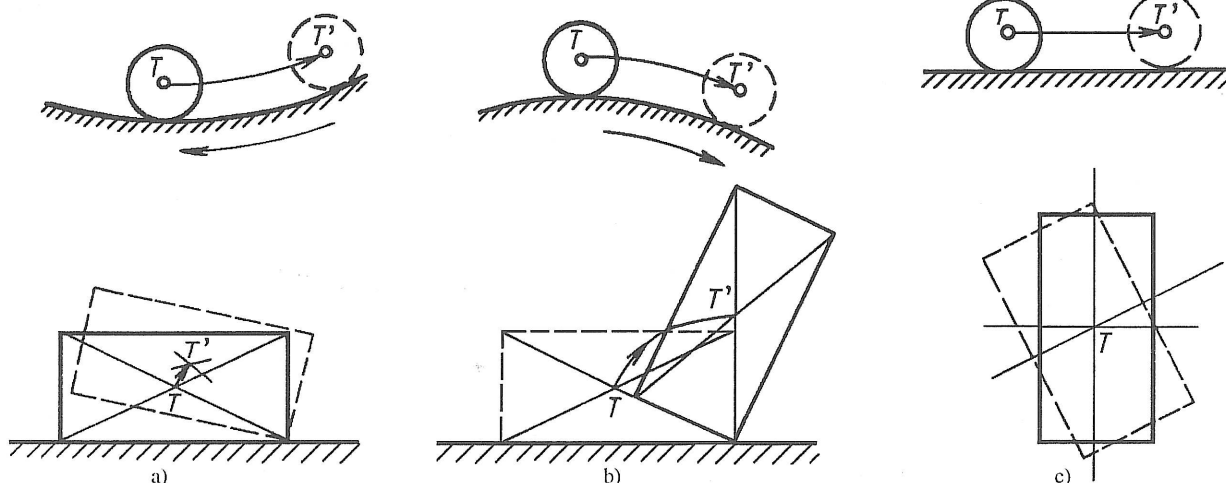
1. Co je těžiště tělesa?
2. Proč nás poloha těžiště zajímá a jak se určuje?
3. Určete těžiště lichoběžníkové plochy.
4. Kde leží těžiště pravidelných stejnorodých těles?
5. Kde leží těžiště půlkružnice a kde těžiště půlkruhu?
6. Jak určíme těžiště složených ploch?
7. Popište a zdůvodněte, jak se určuje těžiště při vystřihování různých tvarů z plechu.
8. Odhadněte polohu těžiště kladiva.
9. Jak se mění poloha těžiště nákladního automobilu, z něhož se vykládá náklad?

10.2 Stabilita těles

Těleso je v *rovnovážné poloze*, jestliže síly, které na ně působí, jsou v rovnováze. Je-li např. závaží zavěšeno na vlákně a vlákno je ve svislém směru, je závaží v klidu, neboť tíha, kterou působí závaží na závěs, je v rovnováze s pevností závěsu.

Na tělesa (stroje) nacházející se v klidu, v rovnovážné poloze, mohou kromě jejich vlastní tíhy působit i jiné síly, které se snaží je vychýlit z této rovnovážné polohy. Při takovém silovém působení se změní rozložení sil a tím i podmínky rovnováhy. Přestane-li daná síla působit, mohou nastat tři možnosti rovnovážné polohy tělesa.

Rovnovážná poloha	Přestane-li po vychýlení síla působit	Příklad
1. <i>Stálá</i> neboli <i>stabilní</i>	Těleso se do původní polohy vrací. Těžiště je v nejnižší možné poloze.	Koule v nejnižším bodě misky (obr. 96a).
2. <i>Vratká</i> neboli <i>labilní</i>	Těleso přechází do nové stálé polohy (dále se pohybuje). Těžiště je v nejvyšší možné poloze.	Koule v nejvyšším bodě převrácené misky (obr. 96b).
3. <i>Volná</i> neboli <i>indiferentní</i>	Těleso zůstává v jakékoli nové poloze. Výška těžiště se nemění.	Koule na vodorovné rovině (obr. 96c).



Obr. 96. Tři případy rovnovážné polohy: a) stálá, b) vratká, c) volná

Pro praxi je velice důležitá *stabilita těles* (např. u strojů), související se stabilní rovnovážnou polohou.

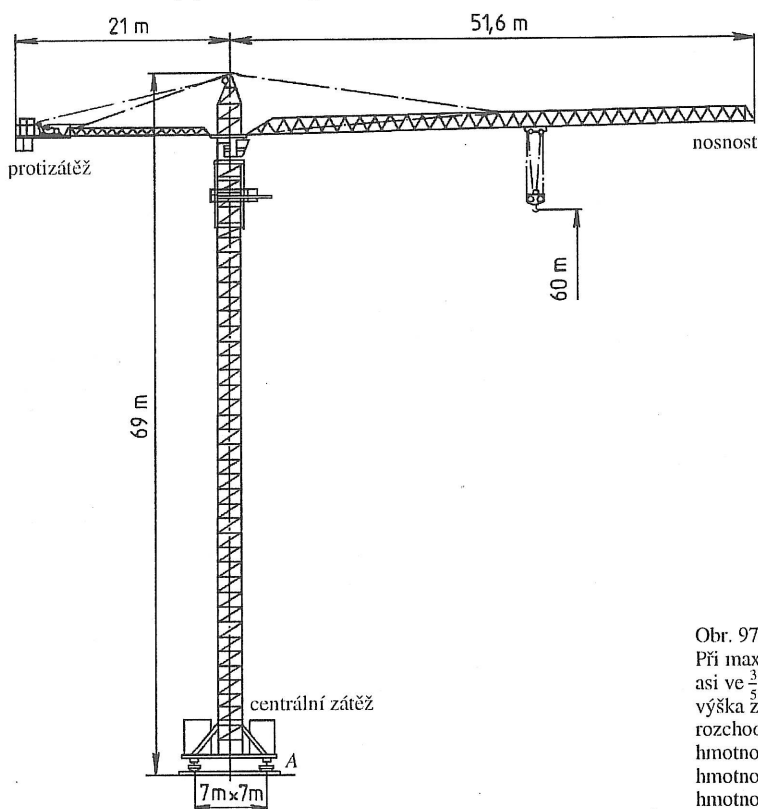
Z hlediska bezpečnosti je nutné odpovědně posuzovat stabilitu strojů; příkladem nám může být stavební věžový jeřáb se značnou délkou výložníku.

Např. u typu MB 2043 (obr. 97) má tíha břemene 29,43 kN působící na rameni délky 51,6 m za následek tzv. *klopný moment* M_{kl} k bodu A, $M_{kl} = 1\,518,6$ kN · m. Tento moment má snahu jeřáb převrhnout, proti převržení však působí *moment stability* M_{st} , který tvoří protizátěž tíhy 107,9 kN na rameni 21 m, tj. 2 266 kN · m, a centrální zátěž tíhy 1 020 kN umístěná na rozchodu (uvažujeme-li vliv její poloviční tíhy na rameni délky 7 m, působí zde 510 kN · 7 m, tj. 3 570 kN · m). Tedy moment stability

$$M_{st} = (2\,266 + 3\,570) \text{ kN} \cdot \text{m} = 5\,836 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

10 Těžiště

Moment stability je v tomto případě více než 3,8krát větší než klopný moment M_{kl} . Lze tedy předpokládat, že ani extrémní povětrnostní podmínky (silný vítr, bouře) nemohou narušit stabilitu jeřábu. Při výpočtu nebyla uvažována vlastní tíha jeřábu, která ještě moment stability zvětšuje.



U jeřábů starší konstrukce se centrální zátěž prováděla tak, že se do spodní části věže uložily cihly, pytle s cementem apod. Potřebné množství zátěže bylo nutno velice zodpovědně vypočítat, jinak hrozilo nebezpečí převržení jeřábu spolu s nedozírnými následky.

U jeřábů starší konstrukce se centrální zátěž prováděla tak, že se do spodní části věže uložily cihly, pytle s cementem apod. Potřebné množství zátěže bylo nutno velice zodpovědně vypočítat, jinak hrozilo nebezpečí převržení jeřábu spolu s nedozírnými následky.

Obr. 97. Schéma stavebního věžového jeřábu MB 2043
Při maximální délce výložníku 51,6 m nosnost 3 000 kg,
asi ve $\frac{3}{5}$ délky (30 m) nosnost 8 000 kg;
výška zdvihu pojízdného jeřábu 60 m;
rozchod krát rozvor 7 m x 7 m;
hmotnost ocelové konstrukce jeřábu 97 Mg (t),
hmotnost pojízdného jeřábu při zakotvení 140 Mg (t);
hmotnost protizátěže 11 Mg (t), hmotnost centrální zátěže 104 Mg (t)

Stabilita tělesa se měří těž prací (W), kterou je nutno vykonat, abychom uvedli těleso ze stálé rovnovážné polohy do polohy vratké. Je-li F_G velikost tíhové síly, kterou při tom překonáváme, m je hmotnost tělesa a h výška, o kterou se zvedne těžiště tělesa při změně ze stálé polohy do polohy vratké, platí:

$$W = F_G h = mgh.$$

Obecně platí, že *stabilita tělesa je tím větší*, čím je těleso těžší, čím níže má těžiště a čím větší je vzdálenost svislé těžnice od hrany překlápění.

Proto se u většiny strojů dosahuje potřebná stabilita např. širokými podstavci s velkou hmotností.

Kontrolní otázky

1. Kdy je těleso v rovnovážné poloze?
2. Jak určíme stabilitu tělesa?
3. Jakou rovnovážnou polohu má dětská hračka, která se při vychýlení vždy vrátí do vzpřímené polohy?
4. Zdůvodněte, které vozidlo má větší stabilitu – osobní nebo nákladní automobil?
5. Má větší stabilitu nákladní automobil naložený pískem nebo senem o stejné hmotnosti?

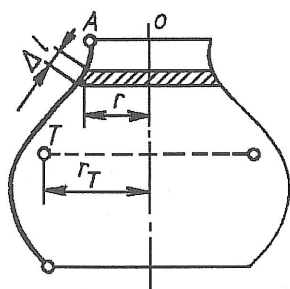
10.3 Guldinovy věty

Guldin Habakuk Pavel byl švýcarský matematik žijící v letech 1577 až 1640. Proslavil se formulací dvou tzv. Guldinových vět. *Guldinovy věty* jsou matematické poučky používané k určení povrchu, popř. objemu rotačních těles ze známé polohy těžiště. Lze podle nich též naopak určit polohu těžiště rotačního tělesa ze známého povrchu, popř. objemu.

10.3.1 Povrch rotačního tělesa

Povrch rotačního tělesa vzniká otáčením tvořící rovinné čáry délky l kolem osy o tělesa. Jak je zřejmé z obr. 98, takto vzniklou rotační plochu je možno složit z elementárních proužků o výšce Δl se základnou (tj. délka kružnice) $2\pi r$. Povrch

10 Těžiště



jednoho takového proužku je tedy $\Delta S = 2\pi r \cdot \Delta l$ a plocha celého pláště

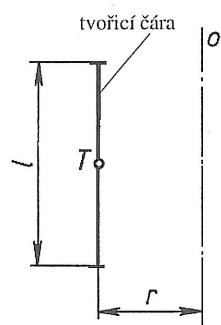
$$S = \sum \Delta S = \sum 2\pi \cdot r \cdot \Delta l = 2\pi \cdot \sum r \cdot \Delta l.$$

Protože $r \cdot \Delta l$ je statický moment oblouku Δl k ose o , je $\sum r \cdot \Delta l$ statický moment tvořící čáry AB o délce l k těžce ose o . Je tedy $\sum r \cdot \Delta l = r_T \cdot l$, kde r_T je vzdálenost těžiště od osy o , takže povrch rotačního tělesa

$$S = 2\pi r_T \cdot l.$$

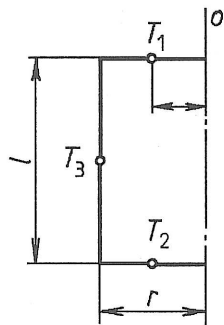
Obr. 98. Výpočet povrchu rotačního tělesa

1. Guldinova věta: Povrch rotačního tělesa vypočítáme, násobíme-li délku (obvod) kružnice opsané těžištěm tvořící čáry při jedné otočce kolem osy tělesa délkou této tvořící čáry.



a) Plášť válce

$$S = 2\pi r l$$

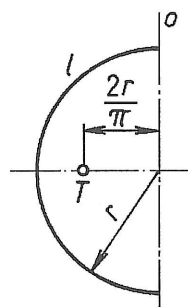


b) Povrch válce

$S = \text{povrch podstav} + \text{povrch pláště}$

$$S = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot r + 2\pi r \cdot l$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r l$$



c) Povrch koule

$$S = 2\pi \cdot \frac{2r}{\pi} \cdot \pi \cdot r$$

Poloha těžiště půlkruhového oblouku viz obr. f) na str 56.

$$S = 4\pi r^2$$

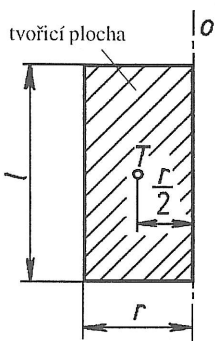
Obr. 99

10.3.2 Objem rotačního tělesa

Rotační těleso vzniká otáčením tvořící plochy kolem osy otáčení o . Obdobnou úvahou jako v odst. 10.3.1 dostaneme pro výpočet objemu rotačního tělesa tento vzorec:

$$V = S \cdot 2\pi r_T$$

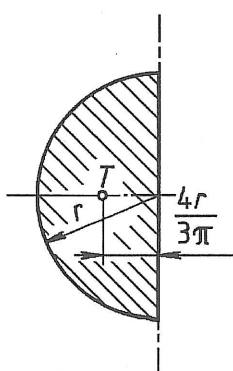
2. Guldinova věta: Objem rotačního tělesa vypočítáme, násobíme-li délku (obvod) kružnice opsané těžištěm tvořící plochy při jedné otočce kolem osy tělesa plošným obsahem této plochy.



a) Objem válce

$$V = 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot r \cdot l$$

$$V = \pi r^2 l$$



b) Objem koule

$$V = 2\pi \cdot \frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{2}$$

Poloha těžiště půlkruhu viz obr. f) na str 56.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

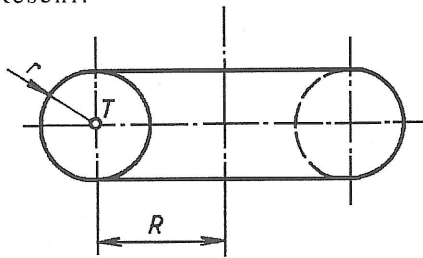
Obr. 100

10 Těžiště

Příklad

Určete obecně povrch a objem anuloidu (prstence) na obr. 101.

Řešení:



Povrch: $S = 2\pi \cdot R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr.$

Objem: $V = 2\pi \cdot R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2.$

Obr. 101

Úloha

Určete obecně objem kužele, jehož základna má průměr $2r$ a výška kužele je l . Porovnejte s objemem válce stejných rozměrů.

(Výsledek: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 l$. Objem kužele je roven jedné třetině objemu válce.)

11 PASIVNÍ ODPORY

Dosud jsme vzájemné působení těles při rovnováze v klidu, příp. v pohybu, vyšetřovali za ideálního stavu, kdy stykové plochy byly dokonale hladké. Za těchto předpokladů byly reakce ve stykových plochách těles kolmé k příslušným plochám ve všech stykových bodech. Skutečnost nás přesvědčuje o tom, že tomu tak není, neboť stykové plochy jsou drsné (mají jemné nerovnosti), což se projevuje tím, že ve stykových plochách tělesa na sebe působí i tečnými reakcemi, které způsobují odpor proti pohybu. Tento tzv. *pasivní odpor*, vznikající při silovém styku dvou suchých vzájemně se pohybujících ploch, se nazývá *suché tření*; leží-li mezi plochami tenká vrstva viskózního média, jedná se o tzv. *polosuché* nebo *viskózní tření*.

Je-li vzájemný pohyb takový, že se body ve stykových plochách vzhledem k sobě pohybují tak, že se po sobě smýkají, potom se jedná o suché *smykové tření*. Tření smykové se vždy projevuje jako odpor proti pohybu. Odpory proti pohybu jsou pozorovány i u pohybů, kde je ve stykových plochách relativní klid, např. při valení těles; takové se nazývají *valivé odpory* (nesprávně valivé tření!). Mezi suchá tření patří i *čepové tření*. K viskóznímu tření patří viskózní odpor otáčejícího se čepu v mazaném ložisku apod. Jiné odpory vznikají např. při navíjení a odvíjení lan, příp. řetězců. Východiskem pro získání poznatku a posouzení uvedených odporů bude v této knize smykové tření.

Při překonání tření se spotřebuje mechanická práce (energie), která se v tomto případě mění v teplo.

Mnohdy je tření na závadu (např. při pohybu suportu obráběcích strojů, ve vedení výtahu, v pánvích kluzných ložisek apod.), a proto se ho snažíme zmenšit, a tak snížit ztráty hnací energie. Jindy je zase důvod, aby tření bylo co největší (např. u spojek, brzd, při chůzi apod.). Lze tedy konstatovat, že někdy nám tření prospívá, jindy škodí.

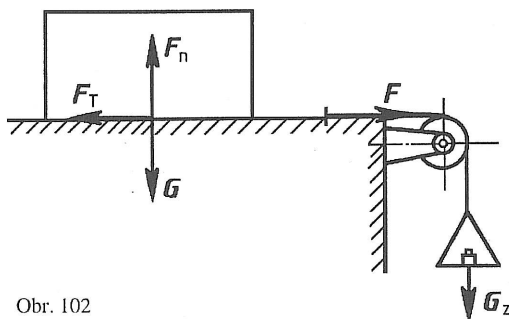
11.1 Smykové tření na rovině

Vznik *smykového tření* (někdy též nazývaného *Coulombovo tření*) je možno vysvětlovat různě, ve své podstatě je však dáno nerovnostmi stykových ploch, které svými výstupky do sebe zasahují. Při vzájemném pohybu se nerovnosti povrchů deformují. Z toho lze soudit, že pasivní odpory jsou převážně závislé na materiálu a jakosti stykových ploch, poměry za klidu jsou odlišné od poměrů za pohybu.

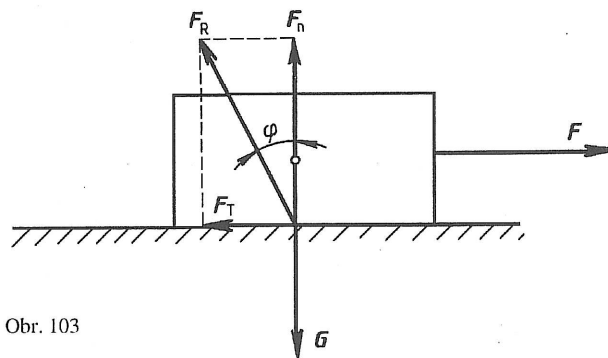
K odvození vlastností drsných ploch a příslušných sil budeme vyšetřovat základní případ, přímočaře se posouvající těleso.

Těleso tíhy G , spočívající na vodorovné podložce, je v rovnováze a klidu i při působení boční síly F do té doby, než tato síla přesáhne jistou hodnotu. Tuto rovnováhu umožňuje styková drsná plocha, protože vyvíjí kromě normálové reakce též tečnou reakci F_T , která se nazývá *třecí síla*. Třecí síla působí na těleso vždy proti směru pohybu.

Provedeme pokus (obr. 102), pomocí něhož zjistíme, že pokud tíha závaží G_z nepřestoupí určitou hodnotu, zůstává těleso v klidu. Účinek síly v laně $F = G_z$ je zde zrušen silou ve styčné ploše F_T .



Obr. 102



Obr. 103

Budeme-li postupně měnit tíhu tělesa G , aniž změníme jakost stykové plochy, zjistíme, že i tíha závaží G_z se bude úměrně měnit. Zjistíme, že poměr $G_z : G$, tedy $F : G$, je konstantní.

Napíšeme-li podmínky rovnováhy (obr. 103)

$$\text{a) } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad F - F_T = 0, \quad F = F_T, \quad \text{tzn., že v závislosti na velikosti síly } F \text{ může nabýt tření } F_T \text{ za klidu tělesa každé hodnoty mezi } 0 \text{ a } F_T \text{ (velikost tažné síly } F \text{ je v rovnováze s třecí silou } F_T, \text{ způsobující odpor proti pohybu);}$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad F_n - G = 0, \quad G = F_n, \quad \text{tzn. normálová složka reakce se ruší tíhou tělesa,}$$

11 Pasivní odpory

potom i poměr $\frac{F_T}{F_n} = \text{konst}$; konstanta, označovaná μ nebo f , se nazývá *součinitel smykového tření*.

Při jednoduchých výpočtech se třecí síla vyjadřuje podle tzv. *Coulombova zákona*:

Velikost třecí síly se rovná součinu velikosti kolmé tlakové síly na třecí plochu a součinitele smykového tření.

$$F_T = F_n \cdot \mu.$$

Kdybychom prováděli pokusy dále tak, že bychom nejprve měnili jen velikost stykové plochy a potom její jakost, zjistili bychom, že součinitel smykového tření nezávisí při menších rychlostech ($v = 0,5$ až $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) na velikosti stykové plochy, nýbrž pouze na její jakosti. Součinitel smykového tření závisí na: *druhu materiálu třecích ploch, drsnosti stykových ploch, mazání stykových ploch*. V menší míře závisí též na rychlosti a teplotě.

V tabulce 2 jsou uvedeny hodnoty součinitele smykového tření μ (někdy f) pro běžné případy.

$$\mu = \text{tg } \varphi$$

Materiál, stav třecích ploch	Součinitel smykového tření	
	za klidu $\mu_0 (f_0)$	za pohybu $\mu (f)$
Ocel na oceli, suché	0,15	0,10
Ocel na bronz, suché	0,18	0,16
Ocel na bronz, dobře mazáno	0,10	0,01
Ocel na dřevě, průměr	0,55	0,35
Ocel na ledě	–	0,027
Dřevo na dřevě, průměr	0,65	0,30
Dřevo na ledě nebo sněhu	–	0,035
Kůže na kovu	0,60	0,25
Kožený řemen na litině	0,56	0,28
Kožený řemen na dřevě	0,47	0,27
Přez (pneumatika) na náledí	0,1 až 0,2	–
Přez na mokřím asfaltu	0,2 až 0,5	–
Přez na suchém asfaltu	0,55	–
Přez na dlažbě (velké kostky)	0,60	–
Přez na dlažbě (malé kostky)	0,6 až 0,7	–
Přez na betonu	0,7 až 0,8	–

Tab. 2. Hodnoty součinitele smykového tření některých základních materiálů

$\mu (f)$	φ [rad]	φ [°]
0,01	0,01	0°34'
0,02	0,02	1°9'
0,03	0,03	1°43'
0,04	0,04	2°17'
0,05	0,05	2°52'
0,06	0,06	3°26'
0,07	0,07	4°4'
0,08	0,08	4°34'
0,09	0,09	5°9'
0,10	0,10	5°43'
0,20	0,20	11°19'
0,30	0,29	16°42'
0,40	0,38	21°48'
0,50	0,46	26°34'
0,60	0,54	30°58'
0,70	0,61	35°0'
0,80	0,67	38°40'
0,90	0,73	41°59'

Tab. 3. Úhel tření φ

Z obr. 103 je zřejmé, že poměr $\frac{F_T}{F_n} = \text{tg } \varphi$, kde φ je *úhel tření (třecí úhel)*.

Součinitel smykového tření $\mu (f)$ je tedy tangentou třecího úhlu φ . Základní vztahy mezi součinitelem smykového tření $\mu (f)$ a velikostí třecího úhlu φ udává tab. 3.

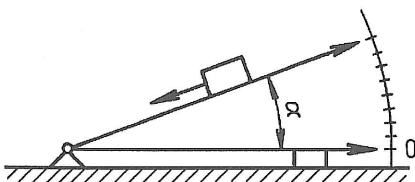
Výslednice F_R sil F_n a F_T je odkloněna od kolmice (normály) k stykovým plochám o třecí úhel φ vždy *proti směru pohybu* (obr. 103). Připouští-li styk dvou těles v nějaké rovině vzájemný pohyb všemi směry, výslednice F_R tvoří stranu tzv. *kužele tření (třecího kužele)*, jehož vrchol leží v působišti výslednice a jeho osou je normála k stykovým plochám. Nepohybuje-li se těleso, může výslednice zaujmout všechny polohy uvnitř tohoto kužele, jehož povrchové přímky v tomto případě svírají s normálou úhel φ_0 , nebo ležet v jeho plášti. Tento poznatek se využívá při grafických řešeních (viz též třecí plocha, odst. 11.1.2).

Pokus - určení třecího úhlu

Přesnější stanovení součinitele smykového tření je obtížné. Proveďte proto praktický pokus a výsledky sestavte do tabulky.

Pomůcky: podložka s měnitelnou jakostí povrchu, opracovaná tělíska z různých materiálů a úhломěrné zařízení.

Jednotlivá tělíska postupně pokládáme na vodorovnou podložku (obr. 104), kterou pak nakláníme. V okamžiku, kdy se tělísko dá do pohybu, zjistíme úhel sklonu podložky α , který je současně třecím úhlem φ . Součinitel smykového tření určíme ze vztahu $\mu = \text{tg } \varphi$.



Obr. 104

11 Pasivní odpory

Příklad 1

Určete sílu F , která je rovnoběžná s vodorovnou podložkou a rovnoměrně po této podložce pohybuje ingotem ze šedé litiny tíhy $G = 400 \text{ N}$, je-li součinitel smykového tření $\mu = 0,4$.

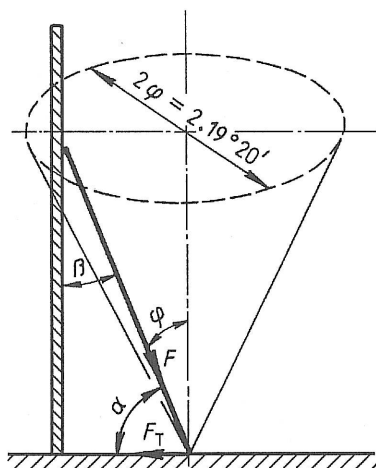
Řešení:

$$F \geq G \cdot \mu, \quad F \geq 800 \text{ N} \cdot 0,4, \quad F \geq 320 \text{ N}.$$

Příklad 2

Pod jakým nejmenším úhlem α může být postaven dřevěný žebřík na dřevěné podlaze, aby nesklouzl, je-li součinitel smykového tření $\mu = 0,35$?

Řešení (obr. 105):



Z matematických tabulek nebo pomocí kalkulátoru zjistíme, jakou velikost má třecí úhel φ , je-li $\mu = \text{tg } \varphi = 0,35$:

$$\varphi = 19^\circ 20'.$$

Žebřík smí být vychýlen maximálně $19^\circ 20'$ od svislé roviny. Zanedbali jsme však tření mezi horním koncem žebříku a svislou stěnou.

Aby žebřík nesklouzl, musí být tření ve stykové ploše větší než složka síly v žebříku ve vodorovném směru:

$$F_T \geq F \cdot \sin \beta$$

$$F_n \cdot \mu \geq F \cdot \sin \beta, \quad F \cdot \cos \beta \cdot \mu \geq F \cdot \sin \beta,$$

$$\mu \geq \frac{\sin \beta}{\cos \beta},$$

$$\text{tg } \varphi \geq \text{tg } \beta, \quad \beta \leq 19^\circ 20',$$

$$\alpha = 90^\circ - 19^\circ 20' = 70^\circ 40'.$$

Obr. 105

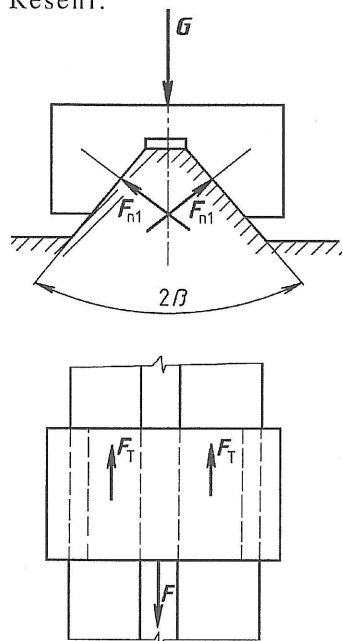
Žebřík může být postaven nejméně pod úhlem $70^\circ 40'$.

11.1.1 Tření v klínové drážce

U obráběcích strojů, třecích kol, spojek, šroubů s ostrým závitem, klínových řemenů apod. dochází ke smýkání v klínové drážce. Tření v klínové drážce, tj. na dvou stykových plochách, je větší než na (jedné) rovinné ploše.

Těleso zatížené silou G je vedeno klínovou drážkou, jejíž vodící plochy spolu svírají úhel 2β (obr. 106). Jaká je potřebná síla F pro posuv tohoto tělesa?

Řešení:



Zanedbáme-li tření, jsou reakce stykových ploch v rovnováze se silou G , a tedy platí:

$$\sin \beta = \frac{G}{F_{n1}}, \quad F_{n1} = \frac{G}{2 \cdot \sin \beta},$$

ze souměrnosti drážky plyne $F_{n1} = F_{n2}$.

Protože $F_{T1} = F_{n1} \cdot \mu_1$, $F_{T2} = F_{n2} \cdot \mu_2$,

bude pro $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ také $F_{T1} = F_{T2} = F_{n1} \cdot \mu = \frac{G \cdot \mu}{2 \cdot \sin \beta}$.

Síla potřebná pro posuv tělesa tíhy G : $F \geq 2F_{T1}$,

tedy $F \geq \frac{G \cdot \mu}{\sin \beta}$,

$$F \geq G \cdot \mu_k,$$

kde $\mu_k = \frac{\mu}{\sin \beta}$ je součinitel tření v klínové drážce.

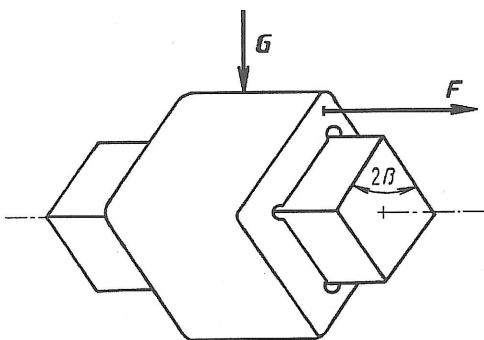
Obr. 106. Tření v klínové drážce

11 Pasivní odpory

Příklad

Po tyči čtvercového průřezu se posouvá objímka, na níž působí síla F (obr. 107). Jak velká musí být síla F , je-li objímka přitlačována k tyči silou $G = 4\,000\text{ N}$ a je-li $\mu = 0,1$?

Řešení:



$$F \geq G \cdot \mu_k, \text{ kde}$$

Tyč má čtvercový průřez, tedy $2\beta = 90^\circ$, $\beta = 45^\circ$,

$$\mu_k = \frac{\mu}{\sin \beta}$$

$$\mu_k = \frac{0,1}{0,707}$$

$$\mu_k \doteq 0,14,$$

$$F \geq 4\,000\text{ N} \cdot 0,14, \quad F \geq 560\text{ N}.$$

Síla potřebná k posuvu objímky musí být větší nebo rovna 560 N.

Obr. 107

Úloha

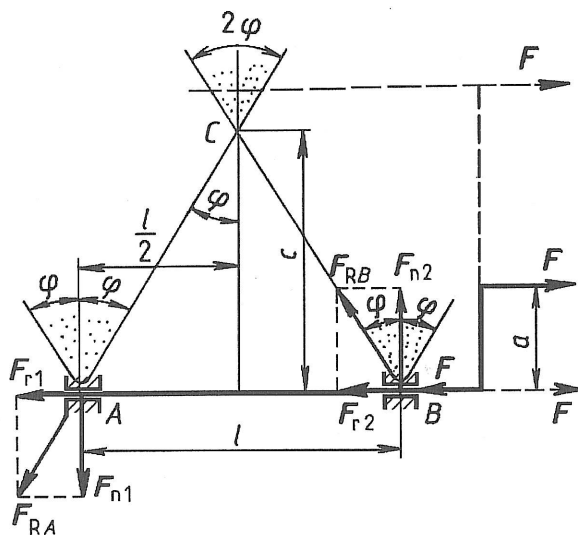
Po vedení lože hoblovky tvaru klínové drážky, $\beta = 45^\circ$, se pohybuje stůl s obrobkem. Vypočítejte sílu F , potřebnou pro pohyb stolu s obrobkem, je-li tíha stolu s obrobkem $G = 20\text{ kN}$, $\mu = 0,08$.

(Výsledek: $F \geq 2\,260\text{ N}$.)

11.1.2 Vzpříčení vedeného tělesa

U součástí, které konají posuvné pohyby, může při malé vzdálenosti uložení (vedení) součásti dojít ke vzpříčení. *Vzpříčení* je zvláštní případ rovnováhy, při němž se pohyblivě uložené těleso (např. vedené v drážce) stává nepohyblivým vlivem určité polohy vektoru síly, působící na těleso. Při vzpříčení je tato síla v rovnováze s reakcemi drsných kluzných ploch, a leží proto na přímce procházející průnikem kuželů tření bodů plošného uložení. *Vzájemný pohyb dvou těles v libovolném směru je možný, bude-li výslednice primárních sil vně třecího kužele.*

Na obrázku 108 je znázorněna tyč, která je v uložení A přitlačována směrem vzhůru a v uložení B dolů. Výslednice v uložení F_{RA} a F_{RB} svírají s normálami ve vedeních tyče A, B třecí úhel φ a protínají se v bodě C. Obě reakce vymezují v případě silové soustavy v rovině tzv. *třecí plochu* (vyznačena vytečkováním).



Vzpříčení je způsobeno dvojicí sil, jejíž moment $M = F \cdot a$. Lze dokázat, že tyč se ve vedení nevzpříčí, působí-li síla F na rameni délky a , která je menší než vzdálenost c .

Tyč se vzpříčí, bude-li platit podmínka:

$$a > c, \quad c = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}, \quad a > \frac{l}{2\mu}$$

a nevzpříčí se, bude-li

$$a < \frac{l}{2\mu}.$$

To znamená, že vzpříčení tyče je tím pravděpodobnější, čím menší je vzdálenost obou uložení (l) a čím větší je třecí úhel, a tím i součinitel smykového tření. Za těchto okolností se zmenšuje vzdálenost c .

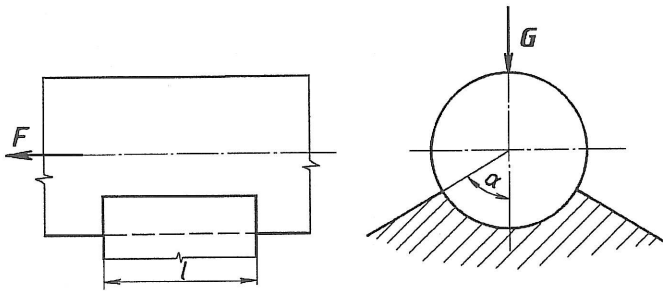
Obr. 108. Třecí plocha

11.2 Tření ve válcové drážce

Tento druh smykového tření se vyskytuje např. u pístů, kluzných ložisek apod. Předpokládá se, že zatěžující síla se rozloží rovnoměrně na průmět stykové plochy do roviny kolmé k zatěžující síle. Jedná-li se o pohyb ve svislé ose, je celkový odpor proti pohybu větší o tíhu příslušného tělesa a jeho příslušenství.

11 Pasivní odpory

Mějme tyč kruhového profilu, zatíženou silou G , která je uložena ve válcové drážce tak, že se může pouze posouvat ve směru své osy, nikoli otáčet; poloviční středový úhel válcové stykové plochy je α (obr. 109). Chceme vypočítat sílu potřebnou k překonání tření ve válcové drážce.



Obr. 109. Tření ve válcové drážce

Pomocí vyšší matematiky lze odvodit tento vztah:

$$F \geq F_T, \quad F_T = \frac{G \cdot \mu \cdot \text{arc } \alpha}{\sin \alpha}, \quad \text{kde } \text{arc } \alpha = \frac{\pi \alpha}{180}$$

($r \text{ arc } \alpha$ je délka oblouku kružnice příslušující úhlu α);

$$F \geq G \cdot \mu_r,$$

kde $\mu_r = \mu \cdot \frac{\text{arc } \alpha}{\sin \alpha}$ je součinitel tření ve válcové drážce.

Je-li např. $2\alpha = 180^\circ$ ($\alpha = 90^\circ$), je $\text{arc } \alpha = \frac{\pi}{2}$ a $\mu_r = \frac{\pi}{2} \mu = 1,57 \mu$, tzn. že tření ve válcové drážce je o 57 % větší než na rovině.

Síla potřebná pro posuv je pak větší nebo rovna $G \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mu$.

11.3 Čepové tření

Při spojení dvou součástí (uložení čepu v ložisku), které umožňuje otáčivý pohyb, vzniká též ve stykových plochách součástí odpor proti pohybu, působící vždy proti smyslu otáčení. Vzniklý pasivní odpor se nazývá *čepové tření*. Při vyšetřování uvedených odporů budeme předpokládat, že se jedná o suché tření. Ve skutečnosti jsou čepy obvykle mazány.

Podle směru působící síly F jsou čepy *radiální*, kdy síla působí kolmo na podélnou osu čepu, a *axiální*, kdy síla působí v ose. Podle polohy jsou čepy *koncové (čelní)*, příp. *krční*, na konci, příp. uprostřed příslušné vodorovné strojní součásti. Na konci svislé strojní součásti (hřídele) je *patní* nebo *nožní čep*. Čepy se dále dělí též podle tvaru (válcové, kuželové, kulové aj.).

Čepy mohou být *zaběhané* (jsou již určitou dobu v provozu) nebo *nezaběhané* (nové). U nezaběhaného axiálního čepu předpokládáme, že kolmý tlak je rozložen po celé stykové ploše rovnoměrně, tj. v celé ploše je stejný. U zaběhaného axiálního čepu je tlak ve stykové ploše rozložen nerovnoměrně, ke středu čepu vzrůstá, což je způsobeno větším opotřebením čepu při obvodu.

Na překonání čepového tření je zapotřebí mechanická energie. Tato energie se téměř všechna přeměňuje v teplo. Čep se zahřívá a může se dokonce stát, že se teplem poškodí. Proto se snažíme čepové tření snížit pokud možno na nejmenší hodnotu, popř. zajistit ochlazování čepu.

11.3.1 Radiální čep

Představíme-li si radiální čep (obr. 110) zatížený vnější silou G v klidu, ruší se tíhová síla G reakcí ložiska F_r . Začne-li se však čep otáčet, vzniká ve stykové ploše kromě reakce F_r též třecí síla F_T . Je-li tření na všech místech stejné, jsou všechny částečné reakce odkloněny od normálových směrů o stejný úhel proti točení čepu. Proto jdou všechny mimo osu ve stejné vzdálenosti tak, že obalují tzv. *třecí kružnici* (o poloměru ρ). Výsledná reakce F_r jde těžištěm stykové plochy a dotýká se též třecí kružnice, je stejně velká jako zatěžující síla G , a tvoří s ní tedy dvojici sil; její moment, působící proti směru otáčení čepu, se nazývá *moment čepového tření* M_ζ . Moment čepového tření musí být, tak jako každý moment, překonáván momentem vnější síly. Platí:

$$M_\zeta = F_r \cdot \rho;$$

nahradíme-li reakci F_r navzájem kolmými složkami F_n a F_T , je také $M_\zeta = F_T \cdot r$,

$$M_\zeta = F_r \cdot \mu_\zeta \cdot r,$$

kde μ_ζ je součinitel čepového tření, poloměr třecí kružnice

$$\rho = r \cdot \mu_\zeta,$$

($\sin \varphi = \frac{\rho}{r}$, v tomto případě můžeme uvažovat $\sin \varphi = \text{tg } \varphi$).

Obr. 110. Radiální čep

11 Pasivní odpory

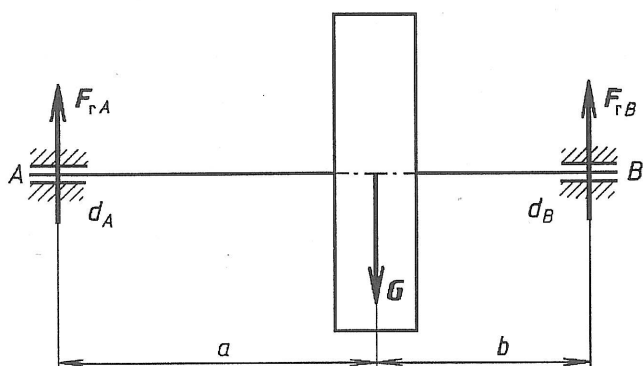
U nezaběhaných čepů bylo odvozeno $\mu_{\zeta} = \frac{\pi}{2} \cdot \mu$, u zaběhaných čepů $\mu_{\zeta} = \frac{4}{\pi} \cdot \mu$.

Příklad

Setrvačnick generátoru tíhy $G = 140 \text{ kN}$ se otáčí v kluzných ložiskách A, B . Určete velikost momentů čepového tření u obou kluzných ložisek, je-li $\mu_{\zeta} = 0,03$, $a = 1\,500 \text{ mm}$, $b = 1\,000 \text{ mm}$; průměry čepů $d_A = 300 \text{ mm}$, $d_B = 400 \text{ mm}$ (obr. 111).

Řešení:

Ze statických podmínek určíme reakce v uložení: $\sum_{i=1}^2 M_i = 0$,



$$-F_{rA} \cdot (a + b) + G \cdot b = 0, \quad F_{rA} = \frac{G \cdot b}{a + b},$$

$$F_{rB} \cdot (a + b) - G \cdot a = 0, \quad F_{rB} = \frac{G \cdot a}{a + b},$$

$$F_{rA} = \frac{140\,000 \text{ N} \cdot 1\,000 \text{ mm}}{2\,500 \text{ mm}} = 56\,000 \text{ N},$$

$$F_{rB} = \frac{140\,000 \text{ N} \cdot 1\,500 \text{ mm}}{2\,500 \text{ mm}} = 84\,000 \text{ N}.$$

$$M_{\zeta A} = F_{rA} \cdot \mu_{\zeta} \cdot r_A, \quad r_A = \frac{d_A}{2},$$

$$M_{\zeta B} = F_{rB} \cdot \mu_{\zeta} \cdot r_B, \quad r_B = \frac{d_B}{2},$$

$$M_{\zeta A} = 56\,000 \text{ N} \cdot 0,03 \cdot 150 \text{ mm} = 252\,000 \text{ N} \cdot \text{mm},$$

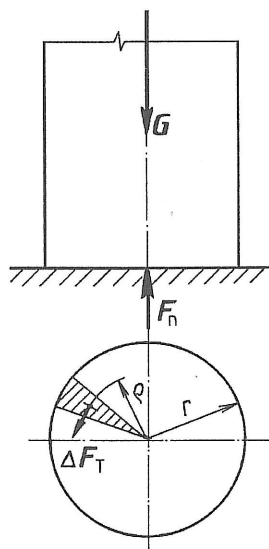
$$M_{\zeta B} = 84\,000 \text{ N} \cdot 0,03 \cdot 200 \text{ mm} = 504\,000 \text{ N} \cdot \text{mm}.$$

Obr. 111

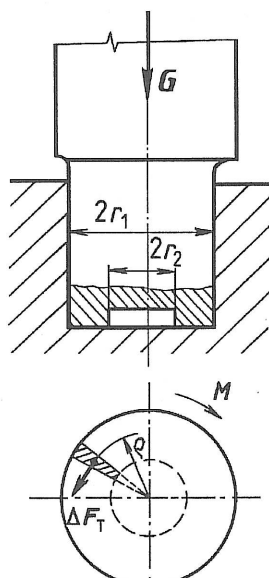
Velikost momentů čepového tření v ložisku A je $252 \text{ N} \cdot \text{m}$ a v ložisku B je $504 \text{ N} \cdot \text{m}$.

11.3.2 Axiální čep

Již jsme uvedli, že u nezaběhaného patního (nožního) čepu předpokládáme, že kolmá tlaková síla je rozložena po celé stykové ploše rovnoměrně, tj. v celé (kruhové) ploše je stejná. Abychom zjistili odpory, které vznikají ve stykové ploše při otáčení čepu, zvolíme velmi malou (elementární) plochu tvaru kruhové výseče. Působením tlakové síly na tuto plochu vzniká elementární třecí síla ΔF_T . Elementární třecí síla působí v těžišti elementární plochy (obr. 112). Protože elementární plochu lze považovat za trojúhelník, leží těžiště na kružnici o poloměru $\rho = \frac{2}{3}r$.



Obr. 112. Axiální čep



Obr. 113. Vybraný axiální čep

Výsledný moment čepového tření nezaběhaného axiálního čepu

$$M_{\zeta} = \sum \Delta M_{\zeta}, \text{ kde}$$

$$\Delta M_{\zeta} = \Delta F_T \cdot \rho, \quad \Delta M_{\zeta} = \Delta F_n \cdot \mu \cdot \frac{2}{3}r.$$

$$\sum \Delta F_n = \sum \Delta G = G, \text{ takže}$$

$$M_{\zeta} = \frac{2}{3}r \cdot \mu \cdot G.$$

Nejčastěji se však používá zaběhaný čep, kde je třením styková plocha opotřebovaná. Lze říci, že plošky vzdálenější od osy točení se pohybují rychleji, a proto se i více opotřebovávají. Tlaková síla se od osy čepu k obvodu zmenšuje, předpokládá se, že

11 Pasivní odpory

je nepřímou úměrná vzdálenosti uvažované plošky od osy čepu. Lze dokázat, že výsledné tření působí ve vzdálenosti $\frac{r}{2}$ od osy čepu. U zaběhaného čepu platí:

$$M_{\zeta} = \frac{r}{2} \cdot \mu \cdot G.$$

Při velkém zatížení čepu by se vzhledem k značné tlakové síle v blízkosti osy čepu mohl materiál rozrušit. Proto se pro tyto případy vyrábějí *vybrané čepy* (obr. 113), jejichž styková plocha je mezikružím, čep se ve stykové ploše vybírá na průměr $2r_2$. Poznamenejme jen, že pro zvlášť velké osové síly se konstruuje hřebenové čepy nebo zavěšené či visuté čepy.

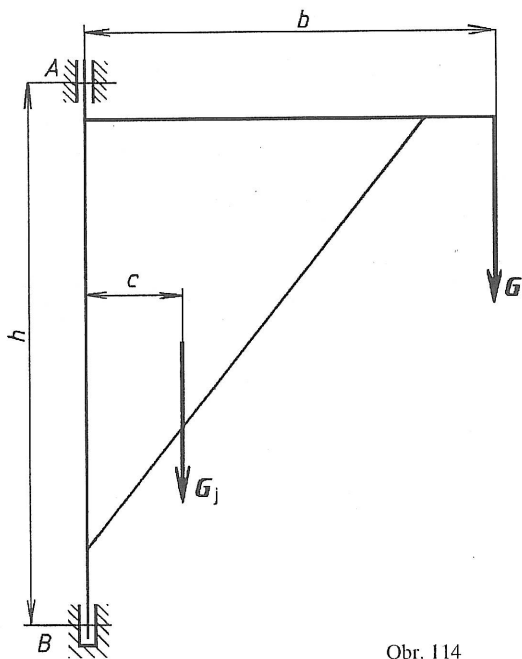
Pro čepového tření vybraného nezaběhaného axiálního čepu lze vypočítat, že platí:

$$M_{\zeta} = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot G \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}$$

U vybraného zaběhaného axiálního čepu předpokládáme, že výsledná třecí síla F_T působí přibližně na středním poloměru r_s :

$$M_{\zeta} = \mu \cdot G \cdot r_s$$

$$r_s = \frac{r_1 + r_2}{2}$$



Obr. 114

Úloha

Určete velikost síly potřebné k rovnoměrnému otáčení konzolového jeřábu (obr. 114), je-li průměr obou čepů 80 mm, čepy jsou zaběhané a vzniká v nich suché tření, tíha břemene $G = 40$ kN, tíha jeřábu $G_j = 20$ kN, rozměry jeřábu jsou: $h = 5$ m, $b = 4$ m, $c = 1$ m. Jeřábem je otáčeno působením na břemeno. Součinitel smykového tření v čepech $\mu = 0,1$.

(Výsledek: Síla k otáčení $F_{ot} = 120$ N.)

11.4 Vlákňové tření

Případ, kdy je přes drsnou nehybnou válcovou plochu libovolného tvaru vedeno dokonale ohebné a nehmotné vlákno, které se neprodlužuje, se nazývá *vlákňové tření na válcové ploše*. Dokonalost vlákna se projevuje tím, že se dobře odlučuje od válcové plochy a mění okamžitě svůj zakřivený tvar na přímý. V praxi se s tímto případem tření setkáváme např. při smýkání lan a pásů po nehybném kotouči nebo u pásových brzd, kde je nehybný pás a otáčí se kotouč (obr. 115).

Bez zřetele k tření nastane rovnováha, příp. i pohyb, když $F = G$. Při zvedání nebo spouštění břemene vzniká tření, které musí také *hnací síla* překonat. Pro zvedání břemene, tj. na obr. pohyb ve směru 1, lze odvodit vztah

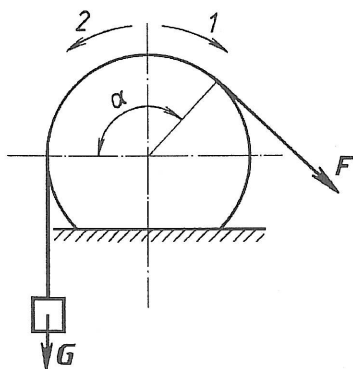
$$F = G \cdot e^{\alpha\mu},$$

kde $e \doteq 2,7183$ je základ přirozených logaritmů, α je *úhel opásání* v obloukové míře, μ je příslušný součinitel tření.

Při rovnoměrném spouštění břemene (síly si „vymění“ místa) působí *brzdící síla*

$$F = \frac{G}{e^{\alpha\mu}}$$

Obr. 115. Vlákňové tření



11 Pasivní odpory

Tření působí vždy proti pohybu a ve skutečnosti při spouštění břemene brzdění pomáhá.

V rovnicích se nevyskytuje poloměr válcové plochy, což znamená, že nezáleží na délce opásání, pouze na úhlu α opásání; $e^{\alpha\mu}$ se někdy nazývá *součinitel pásového tření*.

Pro usnadnění výpočtu lze pro určitý úhel opásání a součinitel smykového tření vyhledat v tab. 4 potřebné hodnoty.

Úhel opásání α										
rad	1,570 8	2,094 4	2,618 0	3,141 6	3,665 2	4,188 8	4,712 4	5,236 0	5,759 6	6,283 2
(°)	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
Součinitel μ	Hodnoty součinitele $e^{\alpha\mu}$									
	+									
0,10	1,17	1,23	1,30	1,37	1,44	1,52	1,60	1,69	1,78	1,87
0,20	1,37	1,52	1,69	1,87	2,08	2,31	2,57	2,85	3,16	3,51
0,25	1,48	1,69	1,92	2,19	2,50	2,85	3,25	3,70	4,22	4,81
0,30	1,60	1,87	2,19	2,57	3,00	3,51	4,11	4,81	5,63	6,59
0,35	1,73	2,08	2,50	3,00	3,61	4,33	5,20	6,25	7,51	9,02
0,40	1,87	2,31	2,85	3,51	4,33	5,34	6,59	8,12	10,01	12,35
0,45	2,03	2,57	3,25	4,11	5,20	6,59	8,34	10,55	13,35	16,90
0,50	2,19	2,85	3,70	4,81	6,25	8,12	10,55	13,71	17,81	23,14
0,60	2,57	3,51	4,81	6,59	9,02	12,35	16,90	23,14	31,68	43,38

Tab. 4. Hodnoty součinitele $e^{\alpha\mu}$

Příklad

Určete velikost síly F pro zvedání břemene tíhy $G = 500$ N, je-li úhel opásání $\alpha = 180^\circ$ a součinitel smykového tření $\mu = 0,3$.

Řešení:

Ze vztahu $F = G \cdot e^{\alpha\mu}$ a po dosazení z tabulky dostaneme $F = 500$ N \cdot 2,57 ,
takže síla potřebná ke zvedání břemene je $F = 1\ 285$ N.

Ke tření vláken na válcové ploše dochází i tehdy, když jsou stykové body pásu (řemene) a válcové plochy (řemenice) v relativním klidu.

Silové poměry v řemenu (laně) u řemenového převodu

Určíme silové poměry v řemenu (laně) u řemenového převodu, jímž se převádí pohyb z kotouče o průměru D_2 na kotouč o průměru D_1 (obr. 116). Může se přitom jednat např. o pevně proti sobě uložené kotouče rovnoběžných hřídelů, přes které je opásán a napjat tzv. nekonečný řemen (nebo lano). Hnací kotoučem se přenáší na hnaný kotouč *obvodová síla* F vláknovým třením, vznikajícím mezi řemenem a kotoučem. Proto se řemen napíná již za klidu určitou silou a za pohybu vzroste zatížení v části tažené (spodní) na hodnotu F_1 a v části ochablé (horní) se zatížení zmenší na hodnotu F_2 . Velikost tření je rozdílem obou těchto hodnot. Na hnacím kotouči působí ve směru pohybu obvodová nebo hnací síla F , proti pohybu působí tření. Na hnaném kotouči působí proti pohybu odpor F , překonávaný třením.

Řešení:

Z podmínek rovnováhy dostaneme pro součet sil působících na řemenový pás:

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0, \quad F_1 \cdot \frac{D_1}{2} - F \cdot \frac{D_1}{2} - F_2 \cdot \frac{D_1}{2} = 0,$$

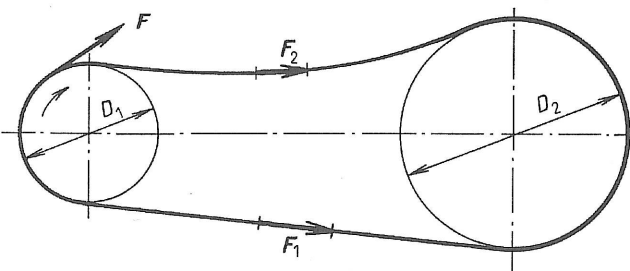
$$F_1 - F - F_2 = 0, \\ F = F_1 - F_2.$$

Ze vztahu mezi F_1 a F_2 postupně plyne:

$$F_1 = F_2 \cdot e^{\alpha\mu}, \quad F_1 = F \cdot \frac{e^{\alpha\mu}}{e^{\alpha\mu} - 1},$$

$$F = F_2 \cdot e^{\alpha\mu} - F_2,$$

$$F_1 = F_2 \cdot (e^{\alpha\mu} - 1), \quad F_2 = F \cdot \frac{1}{e^{\alpha\mu} - 1}.$$



Obr. 116. Řemenový převod

11 Pasivní odpory

Poznámka:

Na řemen pohybující se po kotouči působí *odstředivá síla*, a tím se zmenšuje tření a zvětšuje se nebezpečí klouzání řemene.

Je-li $\mu = 0,28$ (to je např. kožený řemen na litině) a uvažujeme-li nejobvyklejší úhel opásání, tj. $0,8\pi$, je $e^{\alpha\mu} \approx 2$ a $\frac{e^{\alpha\mu}}{e^{\alpha\mu} - 1} = 2$.

Když neuvažujeme vliv odstředivé síly, je v tomto případě obvodová síla $F = F_2$ a $F_1 = 2F$, tzn., že síla v tažené části se rovná dvojnásobku obvodové síly.

Příklad

Vypočítejte největší sílu (F_1) a nejmenší sílu (F_2), které působí v koženém řemenovém pásu přenášejícím obvodovou sílu $F = 500$ N. Hnací řemenice má průměr $D_1 = 400$ mm a úhel opásání $\alpha = 150^\circ$, $\mu = 0,3$.

Řešení:

$$F_2 = \frac{F}{e^{\alpha\mu} - 1}, \quad F_2 = \frac{500 \text{ N}}{1,92 - 1} = 543 \text{ N},$$

$$F_1 = F_2 + F, \quad F_1 = 543 \text{ N} + 500 \text{ N} = 1\,043 \text{ N}.$$

Kontrolní otázky

1. Uveďte příčiny odporu proti pohybu.
2. Ve kterých případech z praxe je tření užitečné a kde naopak škodí?
3. Co je třecí úhel a jak se zjišťuje?
4. Jak zjišťujeme součinitele smykového tření?
5. Na čem je závislá třecí síla?
6. Je větší tření ve vodorovné rovině nebo v klínové drážce? Proč?
7. Na čem je závislé tření u axiálních čepů?
8. Co ovlivňuje tření u radiálních čepů?
9. Kde se používají axiální čepy s vybráním v dosedací ploše?
10. Jak se určí silové poměry v řemenovém převodu?

12 ODPORY PŘI VALENÍ

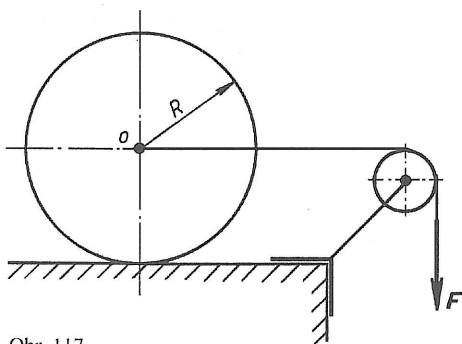
Při valení těles po sobě, kdy je ve stykových plochách relativní klid, je pozorován určitý *valivý odpor* (nepřesně někdy nazývaný valivé tření).

Pro mechaniku strojů je důležité valení válce po rovné podložce. Neuvažujeme-li pasivní odpory u tuhého válce na tuhé rovině, je v rovnováze tíha válce a reakce vodorovné podložky. Pro rovnoměrný pohyb válce není potřeba žádná hnací síla.

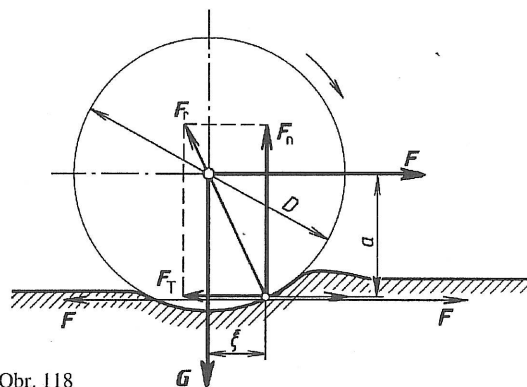
Zavěšíme-li na volný konec lana závaží F malé hmotnosti, zůstane válec v klidu (obr. 117). Do pohybu se uvede teprve tehdy, až je síla F dostatečně veliká. Lze tedy říci, že při valivém pohybu vzniká odpor proti pohybu.

Tažná síla F je však mnohem menší než síla, potřebná k překonávání smykového tření u tělesa, i kdyby se jednalo o stejný materiál, stejnou tíhu a jakost povrchu jakou má válec.

Proto *všude tam, kde chceme zmenšit odpor proti pohybu, převádíme smýkání na valení*. Břemena dopravujeme na válci, hřídele ukládáme do valivých ložisek apod.



Obr. 117



Obr. 118

Skutečný stav je však takový, že ani podložka ani válec nejsou dokonale tuhé, při pohybu se (vlivem tíhy, popř. zatížení) stykové plochy těles v závislosti na vlastnostech materiálu apod. deformují. Mezními případy jsou dokonale pružné nebo dokonale plastické deformace. Při dokonale pružné podložce nebo válci se po odvalení zdeformovaná část vrátí do původního tvaru, naopak plastické deformace zůstávají. Tělesa se nestýkají v úsečce, ale v ploše. Proto v místě styku válce a podložky vznikají složité statické a kinematické poměry, které není možno analyticky vyjádřit.

Na obr. 118 je znázorněn tuhý válec na poddajné podložce. Reakce ve stykové ploše F_T nepůsobí pod středem válce, ale v bodě, který je posunut o délku ξ ve směru pohybu. Reakci je možno rozložit na složky F_n a F_T . Jelikož je ξ proti poloměru válce malé, neuvažujeme zmenšení vzdálenosti tečné složky F_T od středu válce ($a \approx D/2$). Vzdálenost ξ určuje posunutí normálové složky reakce F_n , je tedy charakteristickou veličinou pro odpor při valení. Způsobuje *brzdňný moment*

$$M_v = F_n \cdot \xi,$$

kde ξ je tzv. *rameno momentu valivého odporu*.

Hnací moment $M = F \cdot a$ otáčí válcem (válí jej) ve směru otáčení hodinových ručiček a moment dvojice sil $G \cdot \xi$ působí proti směru otáčení.

Podle statických podmínek rovnováhy:

$$\text{a) } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad F - F_T = 0,$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad -G + F_n = 0, \quad F_n = G,$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^n M_i = 0, \quad -F \cdot a + F_n \cdot \xi = 0, \quad F \cdot a = F_n \cdot \xi,$$

takže potřebná hnací síla

$$F = G \cdot \frac{\xi}{a}$$

12 Odporry při valení

Jak je z tohoto výrazu patrné, je hnací síla přímo závislá na tíze břemena G a na ramenu momentu valivého odporu ξ . Nepřímo je závislá na vzdálenosti a hnací síly od podložky. Čím větší bude rameno a , tím menší bude síla F . Avšak opačně: bude-li se rameno a zmešovat, nedojde k valení válce, nýbrž k jeho smýkání. Síla F by pak byla značně větší.

12.1 Valení a smýkání

Aby skutečně nastalo valení, nikoliv smýkání, musí být splněna statická podmínka valení, tj., že vodorovná síla F ve stykové ploše musí být menší než třecí síla F_T . V tomto případě jde zatím o drsnost plochy, způsobující vznik tečné reakce, nikoli o pasivní účinky (ztrátu energie), protože ty jsou zde zanedbány.

K zamezení smyku musí být splněna tzv. *statická podmínka valení*:

$$F_T \geq F, \quad G \cdot \mu \geq G \cdot \frac{\xi}{a}$$

$$\mu \geq \frac{\xi}{a}$$

K valení válce po podložce dojde tehdy, bude-li rameno síly a větší než poměr ramena momentu valivého odporu ξ a součinitele smykového tření μ . Nebude-li statická podmínka valení splněna, bude se váleček po podložce především smýkat.

Příklad

Určete sílu F , působící při valení kotle o tíze $G = 30\,000$ N, je-li pro cihlovou podlahu $\xi = 5$ mm, průměr kotle $D = 1$ m, a minimální délku ramena síly a , aby nenastalo smýkání kotle; $\mu = 0,35$. Kolikrát je smykové tření větší než nejmenší síla F při valení?

Řešení:

Vypočteme působící sílu	$F = G \cdot \frac{\xi}{a}$	$F = 30\,000 \text{ N} \cdot \frac{5 \text{ mm}}{1\,000 \text{ mm}} = 150 \text{ N}$
minimální délku ramene síly	$a \geq \frac{\xi}{\mu}$	$a \geq \frac{5 \text{ mm}}{0,35}, \quad a \geq 14,3 \text{ mm}$
a poměr smykového tření a odporu při valení	$F_T = G \cdot \mu$	$F_T = 30\,000 \text{ N} \cdot 0,35 = 10\,500 \text{ N}$
	$\frac{F_T}{F} = \frac{10\,500 \text{ N}}{150 \text{ N}} = 70$	

Síla potřebná při valení kotle je 150 N a minimální délka ramene síly je 14,3 mm. Smykové tření je 70krát větší než nejmenší síla potřebná při valení daného kotle.

12.2 Rameno momentu valivého odporu

Rameno momentu valivého odporu závisí hlavně na materiálu, na jakosti stykových ploch, na poloměru valení apod. (tab. 5). Podobně jako u smykového tření lze odpory při valení zjistit pokusy na nakloněné rovině s přestavitelným úhlem sklonu (obr. 119).

Materiál stykových ploch	Rameno momentu valivého odporu ξ (mm)
Nekalená ocel – nekalená ocel	0,05 až 0,06
Kalená ocel – kalená ocel (valivá ložiska)	0,001 až 0,005
Litina – litina	0,005 až 0,006
Litinový váleček – žula	1
Ocelové (kalené) kolo – kolejnice	0,4 až 0,5
Pneumatika – beton	1,5 až 2,5
Pneumatika – asfalt	2,5 až 4,5
Měkké dřevo – měkké dřevo	1,5
Tvrdé dřevo – tvrdé dřevo	0,5 až 0,8
Dřevěný váleček – tesaný kámen	1,3

Tab. 5. Délky ramena momentu valivého odporu

12 Odpor při valení

Pokus je znázorněn na obr. 119. Měříme při něm úhel α nakloněné roviny v okamžiku, kdy se válec ze zkoušeného materiálu rovnoměrně valí vlastní tíhou. Pokud prochází vlastní tíha G mezi body A a B , je v rovnovážném stavu.

V okamžiku, kdy prochází bodem B , působí proti momentu

$$M_v = F_n \cdot \xi = G \cdot \cos \alpha$$

moment sinové složky tíhy válce

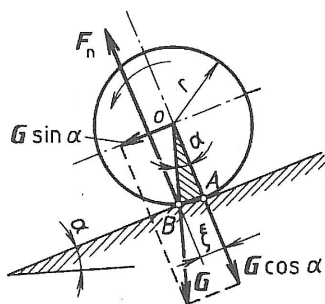
$$M = G \cdot \sin \alpha \cdot r.$$

Z rovnosti obou momentů vyplývá:

$$G \cdot \cos \alpha \cdot \xi = G \cdot \sin \alpha \cdot r,$$

$$\xi = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot r,$$

$$\xi = \operatorname{tg} \alpha \cdot r.$$



Obr. 119. Výpočet délky ramena momentu valivého odporu ξ

Úloha

Kolikrát je větší odpor kamenného kvádru při smýkání proti odporu při valení na dřevěných válcih průměru 15 cm po dřevěné podlaze stejné jakosti?

(Výsledek: Přibližně 20krát.)

12.3 Pohyb vozu po vodorovné rovině

Při pohybu vozu po vodorovné rovině překonává vůz valivý odpor a tření v čepch kol (čl. 11.3?). Při výpočtu pomíjíme ztráty třením v ložiskách a zanedbáváme také tíhu kol. Předpokládáme, že se tažná síla F přenáší na kola v jejich středech (obr. 120). Při rovnoměrném pohybu vozu se rovná moment $F \cdot R$ (tažné síly F) součtu momentů čepového tření $G \cdot \mu_c \cdot r$ a valivého odporu $G \cdot \xi$. Platí tento vztah:

$$F \cdot R \geq G \cdot \xi + G \cdot \mu_c \cdot r.$$

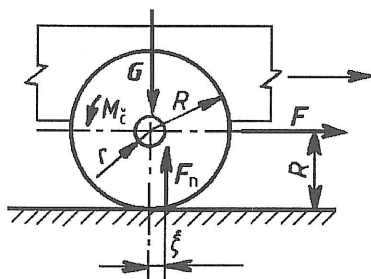
hnací valivý čepové
moment odpor tření

Po úpravě dostaneme pro rovnovážný stav

$$F = G \cdot \frac{\xi + \mu_c \cdot r}{R},$$

$$F = G \cdot \mu_p,$$

kde $\mu_p = \frac{\xi + \mu_c \cdot r}{R}$ je trakční součinitel.



Obr. 120

Trakční součinitel vyjadřuje poměr potřebné akční síly k udržení rovnoměrného pohybu soustavy (tzn. k překonání všech pasivních odporů od valení, čepového a jiného tření) a celkové tíhové síly; je to celkový součinitel odporu vozu. Zjišťuje se se pokusy. Některé průměrné hodnoty μ_p (bez vlivu odporu vzduchu) jsou uvedeny v tab. 6.

Vozidlo – vozovka	Trakční součinitel μ_p
Železniční vůz – ocelové koleje	0,004
Tramvaj – ocelové koleje	0,005
Automobil – asfalt	0,01
Automobil – beton	0,02
Automobil – dlažba	0,015 až 0,05
Automobil – písek	0,2
Automobil – bláto	0,4
Vůz s ocelovými obručemi – asfalt	0,01
Vůz s ocelovými obručemi – dlažba	0,013 až 0,04
Vůz s ocelovými obručemi – štěrk	0,02 až 0,125

Tab. 6. Trakční součinitel μ_p

12 Odporý při valení

Příklad 1

Po asfaltové silnici jede automobil s nákladem o úhrnné tíze $G = 12\,000\text{ N}$. Průměr kol je $0,6\text{ m}$ a z tabulek jsme zjistili, že trakční součinitel $\mu_p = 0,01$. Jaká nejmenší tažná síla udrží automobil v rovnoměrném pohybu?

Řešení:

$$F = G \cdot \mu_p, \quad F = 12\,000\text{ N} \cdot 0,01 = 120\text{ N}.$$

Nejmenší tažná síla je 120 N .

Příklad 2

Železniční vůz tíhy $G = 250\text{ kN}$ má kola o průměru $D = 800\text{ mm}$. Čepy náprav mají průměr $d = 90\text{ mm}$, $\mu_\xi = 0,03$, podle tab 5 je $\xi = 0,5\text{ mm}$. Určete tažnou sílu potřebnou k tomu, aby se železniční vůz po vodorovné přímé trati pohyboval rovnoměrnou rychlostí.

Řešení:

$$F = G \cdot \mu_p, \quad \mu_p = \frac{\xi + \mu_\xi \cdot r}{R}, \quad \mu_p = \frac{0,5\text{ mm} + 0,03 \cdot 45\text{ mm}}{400\text{ mm}} = \frac{0,5\text{ mm} + 1,35\text{ mm}}{400\text{ mm}} = 0,0046,$$

$$F = 250\,000\text{ N} \cdot 0,0046 = 1\,150\text{ N}.$$

Tažná síla je $1\,150\text{ N}$.

Kontrolní otázky

1. Jak zjišťujeme odporový účinek při valení?
2. V jakých jednotkách se měří součinitel valivého odporu?
3. Vyjádřete statickou podmínku valení.
4. Čemu se říká trakční součinitel?
5. Při jízdě automobilem máte možnost jet po betonové nebo asfaltové silnici. Kterou byste si vybrali a proč?

13 JEDNODUCHÉ STROJE A JEJICH SILOVÉ POMĚRY

Složitější stroje (jeřáby, transportéry atd.) obsahují určité jednoduché součásti, např. páky, kola na hřídeli, šrouby apod. Můžeme říci, že takové *jednoduché stroje* jsou zařízení, která přenášejí sílu a mechanický pohyb z jednoho tělesa na jiné těleso. Mohou při tom měnit směr i velikost síly a tím usnadňovat konání mechanické práce.

Z fyzikálního hlediska se dělí jednoduché stroje na skupinu strojů založených na *rovnováze momentů sil* (páka, kladka, kolo na hřídeli), tj. tělesa otáčivá kolem pevné osy, a na skupinu strojů založených na *rovnováze sil* (nakloněná rovina, klín, šroub).

Při stanovení podmínek rovnováhy budeme zanedbávat hmotnost těchto jednoduchých strojů, příp. i tření.

Užitečná neboli teoretická síla je vzhledem k překonávání třecích odporů u každého stroje menší než síla skutečná, spotřebovaná. Poměr síly teoretické ke skutečné se nazývá *mechanická účinnost stroje*:

$$\eta = \frac{\text{teoretická síla}}{\text{skutečná síla}}$$

13.1 Nakloněná rovina

Nakloněná rovina je každá rovina, která svírá s vodorovnou rovinou určitý úhel, tzv. *úhel sklonu*. Kromě úhlu sklonu se sklon nakloněné roviny udává také *stoupáním*, tj. pomocí $\tan \alpha$. V praxi se setkáme s nakloněnou rovinou např. u svahů, líh, klínů, ale také u závitů na šroubech, kde se nakloněná rovina nachází na válcové ploše.

Pomocí nakloněné roviny lze malou silou zvedat těžké břemeno, nebo malou silou vyvinout velký tlak (např. u klínů a šroubů).

Síla F , která udržuje břemeno na nakloněné rovině v rovnováze, může být rovnoběžná s nakloněnou rovinou, rovnoběžná s vodorovnou rovinou (tj. základnou nakloněné roviny), nebo být v poloze obecně šikmé. Nejčastěji se vyskytují první dva případy, proto se jimi budeme zabývat, třetí případ je možno řešit na základě znalostí prvních dvou.

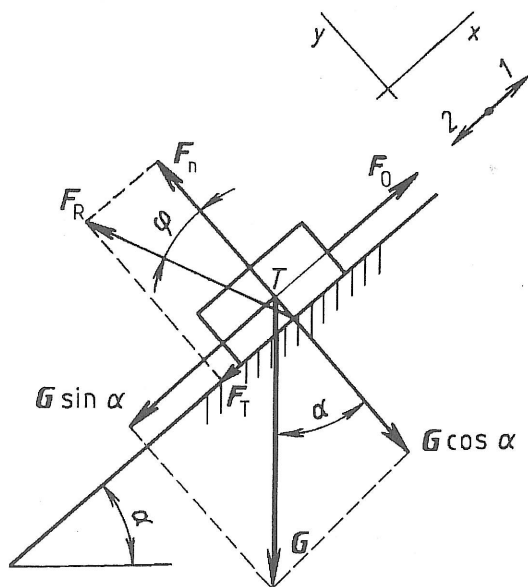
13.1.1 Rovnováha na nakloněné rovině

Síla F je rovnoběžná s nakloněnou rovinou (obr. 121)

1. Bez vlivu tření platí pro sílu F , která udržuje břemeno na nakloněné rovině v rovnováze ($F = F_0$):

$$\sin \alpha = \frac{F_0}{G}, \quad F_0 = G \cdot \sin \alpha.$$

V tomto případě se jedná vždy o rovnováhu tří sil v rovině.



Obr. 121

13 Jednoduché stroje a jejich silové poměry

2. Uvažujeme-li tření, platí pro sílu F , která udržuje břemeno na nakloněné rovině v rovnováze (při pohybu směrem vzhůru je $F = F_1$, směrem dolů je $F = F_2$) tyto podmínky rovnováhy:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0.$$

Pro pohyb směrem vzhůru

$$F_1 - G \cdot \sin \alpha - F_T = 0,$$

$$F_n - G \cdot \cos \alpha = 0, \quad F_T = F_n \cdot \mu,$$

$$F_1 = G \cdot \sin \alpha + F_n \cdot \mu,$$

$$F_n = G \cdot \cos \alpha,$$

$$F_1 = G \cdot \sin \alpha + G \cdot \cos \alpha \cdot \mu,$$

$$F_1 = G \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha).$$

Pro pohyb směrem dolů

$$F_2 - G \cdot \sin \alpha + F_T = 0,$$

$$F_n = G \cdot \cos \alpha,$$

$$F_2 = G \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha),$$

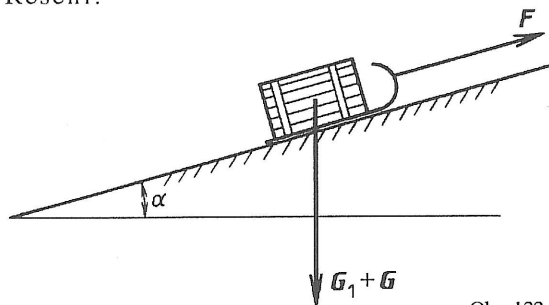
F_2 je *přidržovací silou*, tzn. silou působící proti směru pohybu.

Z výpočtu vyplývá, že může nastat případ, kdy $\sin \alpha = \mu \cdot \cos \alpha$, pak velikost síly F_2 je rovna nule, těleso je na nakloněné rovině v klidu a nedá se vlastní tíhou do pohybu. Je-li $\sin \alpha < \mu \cdot \cos \alpha$, je síla F_2 záporná, tzn. silou F_2 je břemeno po nakloněné rovině posouváno.

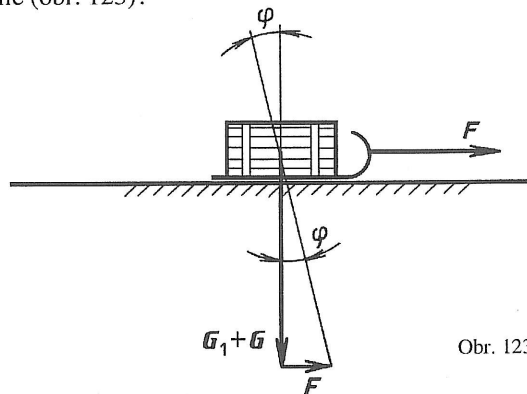
Příklad 1

- a) Jakou tíhu G může mít náklad naložený na saně tíhy $G_s = 1\,200$ N, táhne-li je malotraktor do kopce se sklonem $\alpha = 15^\circ$, je-li součinitel tření $\mu = 0,04$ a tažná síla malotraktoru $F = 1\,500$ N (obr. 122)?
 b) Jaký náklad utáhne malotraktor po vodorovné rovině při téže tažné síle (obr. 123)?

Řešení:



Obr. 122



Obr. 123

$$F = (G_s + G) (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{G_s + G},$$

$$G_s + G = \frac{F}{\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha},$$

$$G_s + G = \frac{F}{\operatorname{tg} \varphi},$$

$$G_s + G = \frac{1\,500 \text{ N}}{0,258\,8 + 0,04 \cdot 0,966} = \frac{1\,500 \text{ N}}{0,297\,4},$$

$$G_s + G = \frac{1\,500 \text{ N}}{0,04},$$

$$G_s + G = 5\,044 \text{ N}.$$

$$G_s + G = 37\,500 \text{ N},$$

$$G = 5\,044 \text{ N} - 1\,200 \text{ N} = 3\,844 \text{ N},$$

$$G = 37\,500 \text{ N} - 1\,200 \text{ N} = 36\,300 \text{ N}.$$

Náklad naložený na saně může mít tíhu $G = 3\,844$ N.

Náklad může mít tíhu $G = 36\,300$ N.

Příklad 2

Při montáži má být kladkostrojem (viz čl. 13.5) tažen po líze z trámů se stoupáním 1 : 3 stroj tíhy $G = 22\,000$ N. Směr tahu kladkostroje je rovnoběžný s nakloněnou rovinou. Jaká musí být tažná síla kladkostroje, aby se stroj rovnoměrně posouval po líze vzhůru, je-li $\mu = 0,2$?

13 Jednoduché stroje a jejich silové poměry

Řešení:

Stoupání trámu $\text{tg } \alpha = 1 : 3 = 0,333$, čemuž odpovídá úhel $\alpha \doteq 18^\circ 30'$.

Tažná síla $F = G (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)$,

$$F = 22\,000 \text{ N} \cdot (\sin 18^\circ 30' + 0,2 \cdot \cos 18^\circ 30'),$$

$$F = 22\,000 \text{ N} \cdot (0,3173 + 0,2 \cdot 0,9463),$$

$$F = 22\,000 \text{ N} \cdot 0,507$$

Tažná síla kladkostroje $F = 11\,150 \text{ N}$.

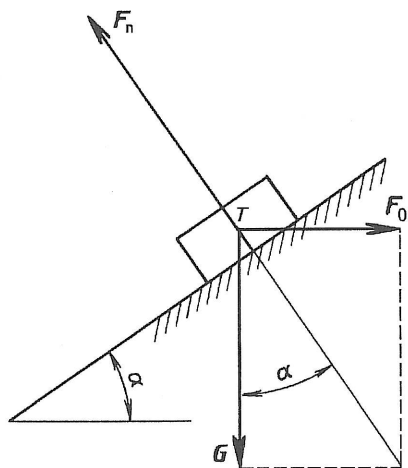
Úloha

V loděnici spouštějí lodě na vodu vlastní tíhou po šikmé dráze, namazané mýdlem. Jaký musí být spád dráhy, je-li součinitel tření $\mu = 0,06$ a je-li požadováno, aby loď sjížděla rovnoměrně?

(Výsledek: 3 : 50.)

Síla F je rovnoběžná s vodorovnou rovinou

Častějším případem ve strojírenství je, že síla pro rovnováhu na nakloněné rovině je rovnoběžná se základnou nakloněné roviny; např. při utahování nebo povolování šroubů, při zarážení klínů, u pohybových šroubů, u šneků apod.

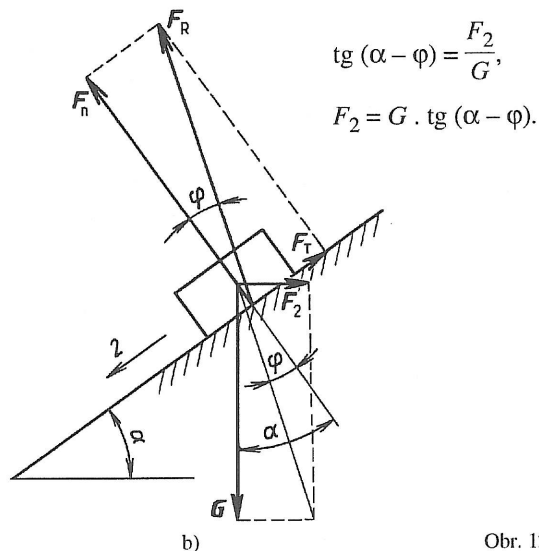
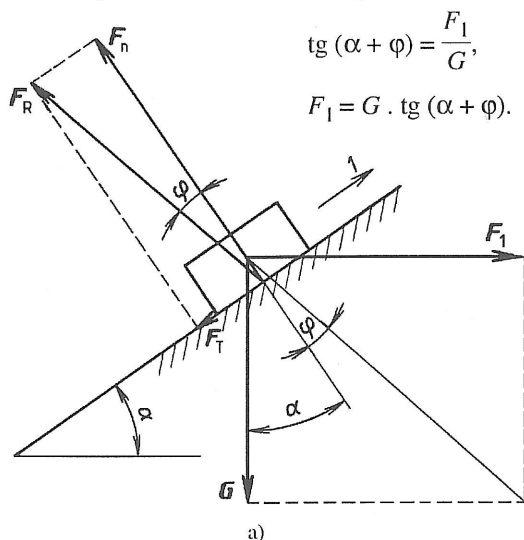


1. Bez vlivu tření (obr. 124) platí pro sílu F , která udržuje břemeno na nakloněné rovině v rovnováze ($F = F_0$):

$$\text{tg } \alpha = \frac{F_0}{G}, \quad F_0 = G \cdot \text{tg } \alpha.$$

Obr. 124

2. Uvažujeme-li tření, nebudeme v tomto případě při vyšetřování podmínek rovnováhy používat statických podmínek rovnováhy, protože výpočet je obtížnější. Využijeme silového trojúhelníka, který je pravouhlý a výpočet se podstatně zjednoduší (obr. 125). Pro sílu F , která udržuje břemeno na nakloněné rovině v rovnováze (při pohybu směrem vzhůru je $F = F_1$, směrem dolů je $F = F_2$) platí:



Obr. 125

13 Jednoduché stroje a jejich silové poměry

Účinnost η nakloněné roviny v případě, že působící síla je rovnoběžná s vodorovnou rovinou, se vypočte takto:

$$\eta = \frac{F_0}{F_1}, \quad \eta = \frac{G \cdot \operatorname{tg} \alpha}{G \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}, \quad \eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$$

$\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi}$, kde $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi$ je velmi malé číslo, a proto je jej možno zanedbat,

takže $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \doteq \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{1}$, a proto
$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \mu}$$

Při spouštění břemena po nakloněné rovině může dojít ke stavu, že $\alpha = \varphi$. Pak je síla F_2 potřebná ke spouštění rovna nule, břemeno je na nakloněné rovině v klidu a nedá se vlastní tíhou do pohybu.

Je-li $\alpha < \varphi$, je síla F_2 záporná, stává se z ní *hnací síla*, tzn. síla působící ve směru pohybu, a ne přidržovací.

Nemůže-li se sevřené (zasunuté, zaražené apod.) těleso samo uvolnit, říkáme této vlastnosti tělesa vzniklé v důsledku tření *samosvornost*. Samosvornost se využívá u spojovacích šroubů a klínů, neboť sebevětší silou se samy neuvolní.

Naopak u pohybových šroubů není žádoucí, aby byly samosvorné. Požadujeme u nich vyšší účinnost. Přesvědčili jsme se, že *čím bude úhel sklonu nakloněné roviny větší, tím se mechanická účinnost bude zvyšovat*.

Kontrolní otázky

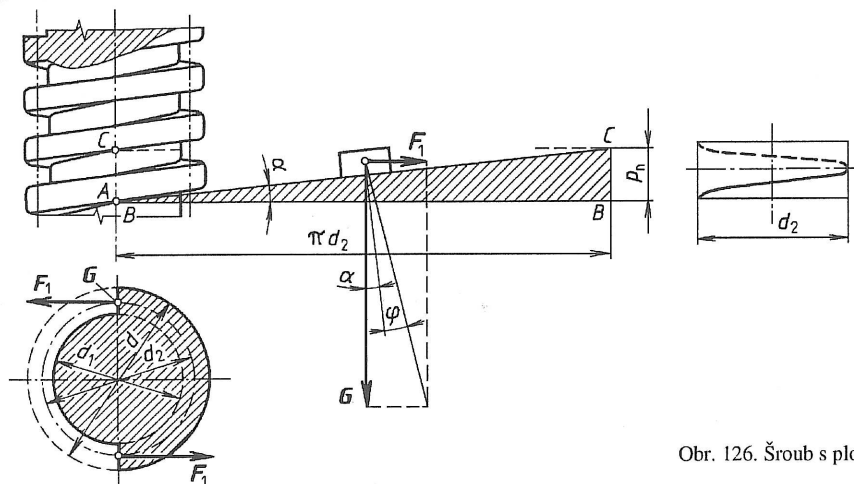
1. Uveďte příklady použití nakloněné roviny.
2. Jak je možno z fyzikálního hlediska rozdělit jednoduché stroje?
3. Jakých výhod nakloněné roviny je v praxi využito a čím je nakloněná rovina určena?
4. Uveďte vztah pro výpočet mechanické účinnosti.
5. Co je to samosvornost, kde se využívá a kde je nežádoucí?

13.2 Šroub

Šroub je strojní součást s charakteristickým tvarovým prvkem, závitem.

Můžeme si představit, že stočíme např. odvěsnu AB pravoúhlého trojúhelníka ABC do kružnice. Přepona AC vytvoří takto šroubovici, jejíž délka je totožná s délkou přepony a jejíž výška, tj. vlastně stoupání, udává délka odvěsny BC . Úhel α je *úhel stoupání*. Šroub je v podstatě (po rozvinutí) nakloněná rovina a všechny vztahy pro ni odvozené platí i pro šrouby.

Bude-li se posouvat po šroubovici rovnostranný trojúhelník, vznikne *šroub s ostrým závitem*. Bude-li se po šroubovici posouvat obdélník nebo čtverec, vznikne *šroub s plochým závitem* (obr. 126).



F_1 ... síla působící na středním průměru závitu
 G ... osová síla ve šroubu
 d_1 ... malý průměr závitu
 d_2 ... střední průměr závitu
 d ... velký průměr závitu
 p_n ... stoupání závitu

Obr. 126. Šroub s plochým závitem

Pro utahování šroubu, tj. při pohybu po nakloněné rovině vzhůru, jsme odvodili v čl. 13.1.1 vztah:

$$F_1 = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$

Pro uvolňování šroubu, tj. při pohybu po nakloněné rovině dolů, lze odvodit vztah:

$$F_2 = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$$

Přestane-li působit síla F_2 , požadujeme, aby břemeno tíhy G zůstalo ve své určité poloze, aby tření zabránilo zpětnému otáčení šroubu. Žádáme, aby *šroub byl samosvorný*. Podmínkou samosvornosti tedy je, aby platilo:

$$F_2 = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = 0, \quad \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = 0, \quad \alpha - \varphi = 0, \quad \alpha = \varphi.$$

13 Jednoduché stroje a jejich silové poměry

Všechny spojovací šrouby mají $\alpha < \varphi$ a jsou samosvorné. Jejich účinnost je vždy menší než 0,5, neboť u samosvorného šroubu se spotřebuje přes polovinu hnací síly k překonání třecích odporů. Šrouby s plochým závitem slouží k přenášení pohybů, a proto se nazývají *pohybové*. U pohybových šroubů se pro zvýšení účinnosti volí větší stoupání (např. u lisů). V převážné většině jsou tato zařízení nesamosvorná a poloha břemene se musí zajišťovat. U zvedáků se vždy volí samosvorné šrouby.

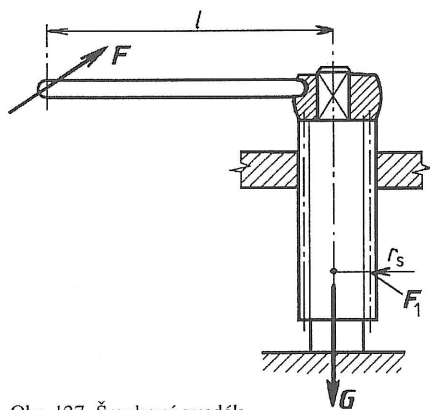
U šroubů s plochým závitem je velikost kolmé tlakové síly na třecí plochu (F_n) přibližně rovna velikosti tíhy (G), avšak u šroubů s ostrým závitem (obr. 128) je

$$F_n = \frac{G}{\cos \frac{\beta}{2}}, \text{ kde } \beta \text{ je vrcholový úhel profilu závitu;}$$

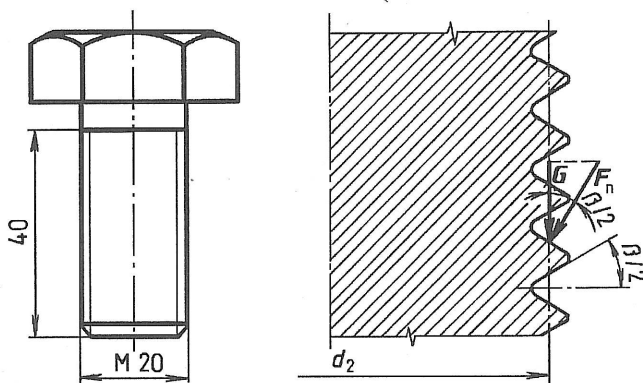
tření je v ostrých závitech větší, $F_T = \frac{\mu}{\cos \frac{\beta}{2}} \cdot G$. Označíme-li $\mu' = \frac{\mu}{\cos \frac{\beta}{2}}$, bude také součinitel smykového tření $\mu' > \mu$.

U obyčejného metrického závitu je např. $\beta = 60^\circ$, $\cos \frac{\beta}{2} = 0,866$, $\mu' = \frac{1}{0,866} \cdot \mu$, takže $\mu' = 1,15 \cdot \mu$; toho využíváme při výpočtech pro šrouby s ostrým závitem.

Vzhledem k tomu, že účinnost šroubů s ostrým závitem je horší než šroubů s plochým závitem, používají se k pevnému spojování dvou nebo více částí a řadí se mezi tzv. *upevňovací šrouby*.



Obr. 127. Šroubový zvedák



Obr. 128. Spojovací šroub M20

Příklad 1

Šroubový zvedák (obr. 127) má šroub s plochým závitem o stoupání $p_n = 10$ mm. Střední průměr $d_2 = 65$ mm, zatížení $G = 30$ kN, $\mu = 0,1$. Určete sílu F na rameni $l = 600$ mm pro zvedání břemene, uvažujeme-li tření. Jaká je účinnost tohoto šroubu?

Řešení:

Musí být splněna podmínka rovnováhy momentů, tedy

$$F \cdot l = F_1 \cdot r_s,$$

$$F \cdot l = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \cdot r_s,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p_n}{\pi \cdot d_2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10 \text{ mm}}{3,14 \cdot 65 \text{ mm}} = 0,049,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \mu,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 0,1,$$

$$r_s = \frac{d_2}{2}$$

$$F = \frac{G \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{l} \cdot r_s,$$

$$\alpha = 2^\circ 49',$$

$$\varphi = 5^\circ 43',$$

$$\operatorname{tg}(2^\circ 49' + 5^\circ 43') = 0,151,$$

$$F = \frac{30\,000 \text{ N} \cdot 0,151 \cdot 32,5 \text{ mm}}{600 \text{ mm}},$$

$$F = 245 \text{ N}.$$

$$\eta = \frac{0,049}{0,151} = 0,325.$$

$$\text{Účinnost } \eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)},$$

Velikost síly na rameni šroubového zvedáku je 245 N, mechanická účinnost šroubu je 32,5 %.

Příklad 2

Vypočítejte účinnost spojovacího šroubu M20, jehož stoupání závitu $p_n = 2,5$ mm, $d_2 = 18,37$ mm a součinitel smykového tření $\mu = 0,15$ (obr. 128).

13 Jednoduché stroje a jejich silové poměry

Řešení:

Protože se jedná o šroub s ostrým závitem, bude účinnost

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p_n}{\pi \cdot d_2},$$

$$\mu' = 1,15 \cdot \mu,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,5 \text{ mm}}{3,14 \cdot 18,37 \text{ mm}} = 0,0434$$

$$\mu' = 1,15 \cdot 0,15 \doteq 0,173,$$

$$(\alpha = 2^\circ 30'),$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \mu'},$$

$$\eta = \frac{0,0434}{0,0434 + 0,173},$$

$$\eta = 0,2.$$

Účinnost je 20 %.

Úloha

Vypočítejte účinnost spojovacího šroubu M42, je-li $\mu = 0,1$. Potřebné rozměry šroubu vyhledejte ve Strojnických tabulkách (Praha, Scientia 1999).

(Výsledek: 0,24, tj. 24 %.)

Kontrolní otázky

1. Jak vypočítáte úhel stoupání šroubovice u šroubů?
2. Jak se vypočítá účinnost šroubů?
3. Co znamená samosvornost u šroubů?
4. Jak ovlivňuje úhel stoupání šroubovice u šroubu jeho účinnost?

13.3 Klín

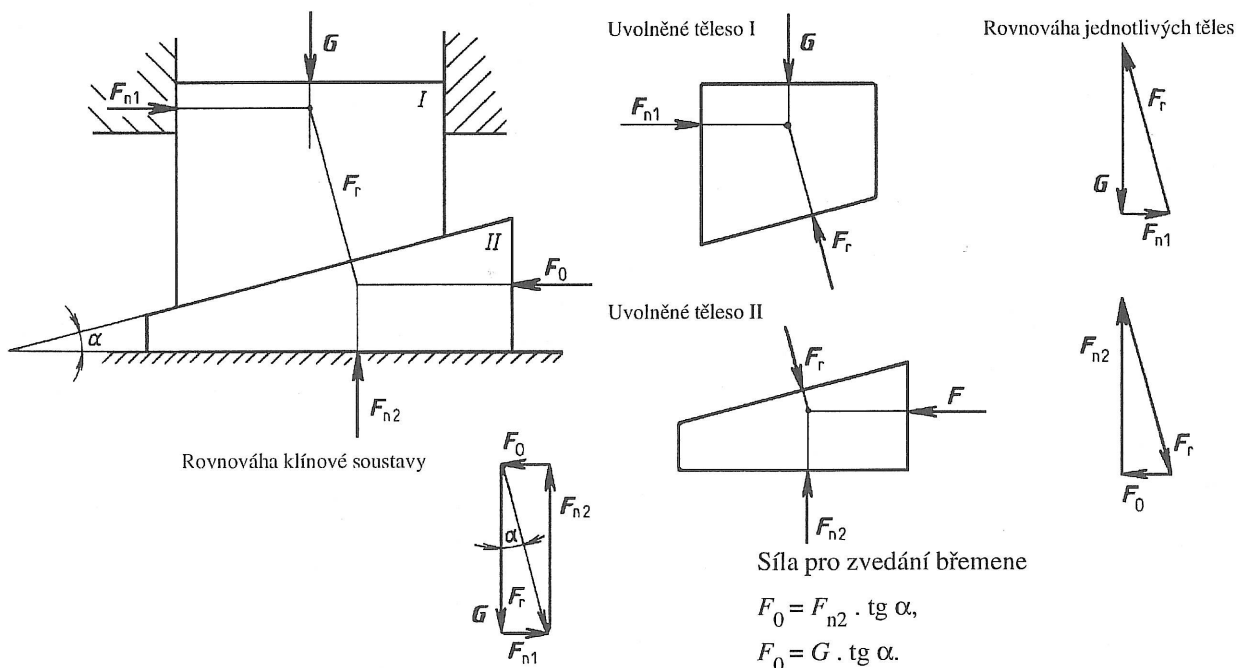
Klíny slouží v převážné většině k rozebíratelnému spojení součástí (spojení ozubených kol, řemenic apod. s hřídelem), které jsou zatíženy velkým tahem nebo tlakem (*spojovací klín*), příp. střídavě působícími silami, nebo pro nastavení vzájemné polohy dvou strojních součástí (*stavěcí klín*). Používá se jich také k vyrážení nástrojů i zvedání břemen.

Spojovací klín je buď *podélný*, tj. rovnoběžný s osou spojovaných součástí, nebo *příčný*, tj. kolmý na podélnou osu spojovaných součástí. Stavěcí klín je příčný klín s větším úkosem (1 : 4 až 1 : 10), který se obvykle posouvá pomocí šroubu.

Klíny jsou v podstatě nakloněnou rovinou, a proto vztahy odvozené pro silové poměry na nakloněné rovině mohou být použity i pro ně.

Zvedání břemene (zarážení klínu)

Na obr. 129 a 130 je znázorněno zvedání břemene tíhy G klímem silou F_0 bez pasivních odporů (obr. 129), tj. *zarážení klínu*.



Obr. 129. Zvedání břemene (zarážení klínu) bez pasivních odporů

13 Jednoduché stroje a jejich silové poměry

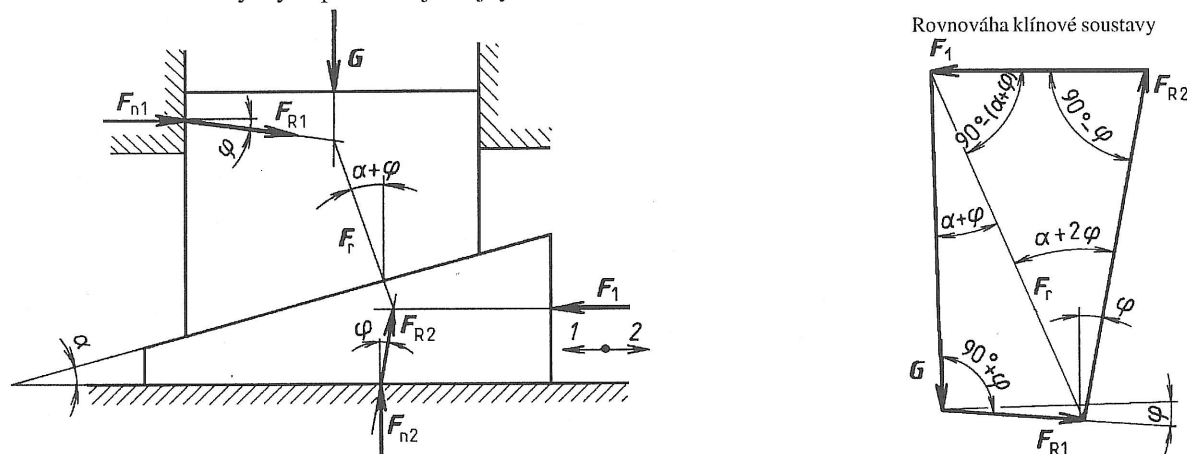
Řešení:

I. Grafické řešení klínové soustavy na obr. 129 provedeme tak, že uvolníme jednotlivá tělesa (těleso s břemenem G a klín), nakreslíme tělesa samostatně a k vnějším silám na každém tělese připojíme reakce úložných míst.

Řešení provedeme nejprve bez pasivních účinků a potom s pasivními odpory (obr. 130). U obou těles půjde o rovnováhu tří sil v rovině a o uplatnění podmínek rovnováhy.

Síla F_r podle zákona akce a reakce mění pro uvolněná tělesa pouze svůj smysl.

V případě zvedání břemene (zarážení klínu) s pasivními odpory pro zjednodušení předpokládáme, že součinitel smykového tření ve všech styčných plochách je stejný.



Obr. 130. Zvedání břemene (zarážení klínu) s pasivními odpory (na horní klín působí síly G , F_{R1} a F_r , na spodní klín působí síly F_r , F_{R2} a F_1)

II. Při výpočtu lze použít dvakrát sinovou větu:

$$F_1 : F_r = \sin(\alpha + 2\varphi) : \sin(90^\circ - \varphi),$$

$$F_r : G = \sin(90^\circ + \varphi) : \sin(90^\circ - \alpha - 2\varphi),$$

$$\frac{F_1}{F_r} \cdot \frac{F_r}{G} = \frac{\sin(\alpha + 2\varphi)}{\sin(90^\circ - \varphi)} \cdot \frac{\sin(90^\circ + \varphi)}{\sin[90^\circ - (\alpha + 2\varphi)]},$$

$$\frac{F_1}{G} = \frac{\sin(\alpha + 2\varphi)}{\cos \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos(\alpha + 2\varphi)},$$

Síla potřebná ke zvedání břemene

$$F_1 = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi).$$

$$\text{Účinnost: } \eta = \frac{F_0}{F_1} = \frac{G \cdot \operatorname{tg} \alpha}{G \cdot \operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi)}.$$

Spouštění břemene (vyrážení klínu)

Při opačném pohybu, tj. ve směru 2, může nastat takový stav, že síla F_2 je záporná, musí působit v opačném smyslu než síla F_1 . Reakce jsou v tomto případě odkloněny od normál na opačné strany než při zarážení klínu, a proto působí i tření opačně. Pro vyrážení platí: $F_2 = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi)$; může nastat i případ, kdy $F_2 = 0$, tedy

$$G \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi) = 0, \quad \operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi) = 0, \quad \alpha - 2\varphi = 0,$$

takže $\alpha \leq 2\varphi$, což je podmínka *samosvornosti klínu*. Číslo

$$K = \frac{2\varphi}{\alpha}, \quad K > 1, \text{ nazýváme míra bezpečnosti.}$$

Z uvedené podmínky vyplývá, že k zabránění uvolnění klínu při provozu musí být úhel α několikrát menší než 2φ . Pro to např. u normalizovaných podélných klínů je úkos 1 : 100. Je-li součinitel smykového tření $\mu = 0,1$, je míra bezpečnosti proti uvolnění podélného klínu s tímto úkosem

$$K = \frac{2\varphi}{\alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \cdot 0,1}{0,01} = 20,$$

tzn., že míra bezpečnosti je dvacetinásobná, neboli podélný klín je samosvorný s dvacetinásobnou bezpečností.

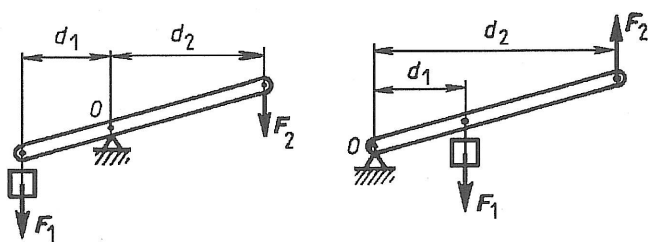
Kontrolní otázky

1. Kdy jsou podélné klíny samosvorné? Jaký mají úkos?
2. K čemu slouží míra bezpečnosti a jak se vypočítá?
3. Jaký úkos mají stavěcí klíny? Jsou také samosvorné?

13 Jednoduché stroje a jejich silové poměry

13.4 Páka. Kolo na hřídeli

Páka je pevná tyč otáčivá kolem osy, která je na ni kolmá (obr. 131). Působí-li síly F_1 , F_2 na různých stranách od osy páky (d_1 a d_2 jsou ramena daných sil), jedná se o *dvojzvrtnou páku* (obr. 131a), působí-li na jedné straně od osy (obr. 131b), je to *jednozvrtná páka*.



Obr. 131. Páka

Páka je v rovnovážné poloze, jsou-li momenty obou působících sil stejné ($M_1 = M_2$),

$$F_1 d_1 = F_2 d_2.$$

Na principu páky pracují např. kleště, nůžky, vahadla vah, jednoduché houpačky aj.

Na principu dvojzvrtné páky s rameny tvořenými poloměrem hřídele r a poloměrem kola R pracuje *kolo na hřídeli* (obr. 132). Pro rovnovážnou polohu kola na hřídeli platí

$$F_1 R = F_2 r.$$

Úloha

K přestřípnutí drátu je třeba síly 800 N. Jak velkou silou musíme působit na rameno kleští ve vzdálenosti 20 cm od osy, jestliže je délka čelisti 4 cm?

(Výsledek: 160 N.)

Kontrolní otázky

1. Uveďte příklady použití páky a u každého příkladu najděte osu otáčení a působíště síly.
2. Jaké znáte příklady použití kola na hřídeli?

13.5 Kladka a kladkostroj

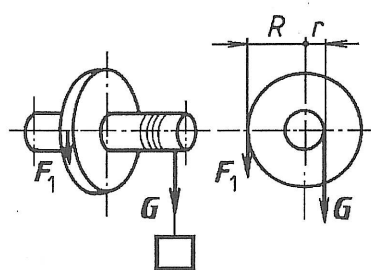
Dvojzvrtnou pákou je v podstatě i *pevná kladka* (obr. 133a), jejíž obě ramena tvoří poloměr r kladky.

Rovnovážná poloha pevné kladky je dána rovností momentů sil $F_1 r = F_2 r$, tedy

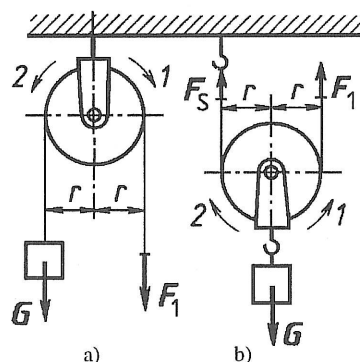
$$F_1 = F_2;$$

to znamená, že na obou stranách pevné kladky teoreticky působí stejně velké síly.

Pevná kladka slouží ke změně směru působící síly.



Obr. 132. Kolo na hřídeli



Obr. 133. Kladka

Volná kladka (obr. 128b) pracuje na principu jednozvrtné páky s rameny délek r a $2r$.

Rovnovážná poloha volné kladky je dána rovností momentů sil $F_1 \cdot 2r = F_2 r$, tedy

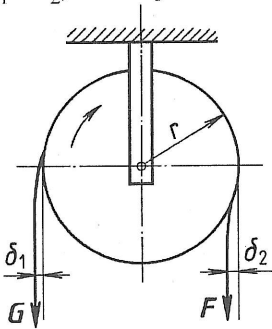
$$F_1 = \frac{F_2}{2}.$$

Volná kladka umožňuje zvedat tělesa poloviční silou, než je tíha tělesa.

Spojením volné a pevné nebo několika volných a pevných kladek vzniká *kladkostroj*.

13 Jednoduché stroje a jejich silové poměry

Přes kladky vedená lana či řetězy slouží ke změně směru tahové síly. Lana jsou sestavena z většího počtu vláken nebo kovových drátů, která jsou splétána nebo stáčena do pramenů; svinutím několika pramenů vzniká lano. Lana ani řetězy nejsou ve skutečnosti dokonale ohebné a působí v nich tření. Proto se musí mazat. *Tuhost lana*, která se projevuje jeho zhoršenou ohebností, je vyjádřena parametry δ_1 , δ_2 (obr. 134). Tyto parametry se zjišťují experimentálně. Tuhostí lana nebo řetězu se poloměr r zvětšuje v navíjející se části o hodnotu δ_1 a na části odvíjené se o hodnotu δ_2 (obvykle uvažujeme $\delta_1 = \delta_2$) zmenšuje – klade odpor deformaci (ohýbání) a chce podržet svůj okamžitý tvar.



Obr. 134. Tuhost lana

Důsledkem je u kladek a kladkostrojů zvětšení síly F potřebné ke zdvihání břemene tíhy G . Pro rovnováhu při nastávajícím zvedání břemene platí podmínka

$$F = \zeta \cdot G, \text{ kde tzv. součinitel kladky } \zeta = \frac{r + \delta_1}{r - \delta_2} \text{ je větší než } 1, \zeta \text{ nabývá většinou hodnot od } 1,05 \text{ do } 1,2.$$

Znamená to, že je třeba vlivem ztrát zdvihát břemeno silou o 5 až 20 % větší. U nezaběhaných lan a řetězů jsou ztráty větší, u zaběhaných naopak. V této souvislosti mluvíme také o *mechanické účinnosti* η kladky, tj. poměru teoretické a skutečné síly potřebné ke zdvihání (spouštění) břemene; $\eta = \frac{1}{\zeta}$. Poměru $F : G$ se někdy říká *převod kladky*.

13.5.1 Pevná kladka

Pevná kladka (obr. 133a) bývá zavěšena pomocí háku do oka na trámu. Musí mít možnost natáčení a výkyvu.

Síly F a G bývají nejčastěji rovnoběžné. Při praktických výpočtech se vzhledem k čepovému tření a tuhosti lan musí uvažovat účinnost η kladky.

$$\begin{array}{l} \text{Pro rovnoměrné zvedání břemene platí:} \\ \text{pro rovnoměrné spouštění břemene platí:} \end{array} \quad \begin{array}{l} F_1 > G, \\ G > F_2, \end{array} \quad \begin{array}{l} F_1 \cdot \eta = G, \\ F_2 = G \cdot \eta. \end{array}$$

U konopných lan je účinnost v rozmezí 0,8 až 0,96, u drátěných lan a řetězů 0,94 až 0,96.

Příklad

Vypočítejte sílu F pro rovnoměrné zdvihání a spouštění břemene tíhy $G = 400 \text{ N}$ na pevné kladce s ocelovým lanem, je-li mechanická účinnost $\eta = 0,95$.

Řešení:

$$\begin{array}{l} \text{Zdvihání břemene:} \\ \text{Spouštění břemene:} \end{array} \quad \begin{array}{l} F_1 = \frac{G}{\eta}, \\ F_2 = G \cdot \eta, \end{array} \quad \begin{array}{l} F_1 = \frac{400 \text{ N}}{0,95} = 421 \text{ N}, \\ F_2 = 400 \text{ N} \cdot 0,95 = 380 \text{ N}. \end{array}$$

13.5.2 Volná kladka

Volná kladka (obr. 133b) včetně pevné osy otáčení se pohybuje současně s břemenem a kromě toho se otáčí na této ose. Teoreticky platí co jsme zdůvodnili u pevné kladky. Je-li F_1 síla pro zvedání a F_2 síla pro spouštění břemene tíhy G , pak

$$\begin{array}{l} \text{pro rovnoměrné zvedání břemene platí:} \\ \text{Podmínka rovnováhy ve svislém směru} \\ \text{z čehož plyne} \end{array} \quad \begin{array}{l} F_1 > F_s, \\ \Sigma F_y = 0, \end{array} \quad \begin{array}{l} F_s = F_1 \cdot \eta, \\ F_1 + F_s - G = 0, \end{array} \quad F_1 + F_1 \cdot \eta - G = 0,$$

$$F_1 = \frac{1}{1 + \eta} \cdot G.$$

$$\text{Pro rovnoměrné spouštění břemene platí:} \quad F_2 < F_s, \quad F_s = \frac{F_2}{\eta},$$

13 Jednoduché stroje a jejich silové poměry

Podmínka rovnováhy ve svislém směru z čehož plyne

$$\Sigma F_y = 0, \quad F_s + F_2 - G = 0,$$

$$F_2 + \frac{F_2}{\eta} - G = 0,$$

$$F_2 = \frac{\eta}{1 + \eta} \cdot G.$$

$$\text{Účinnost volné kladky } \eta_c = \frac{\frac{G}{2}}{\frac{G}{1 + \eta}},$$

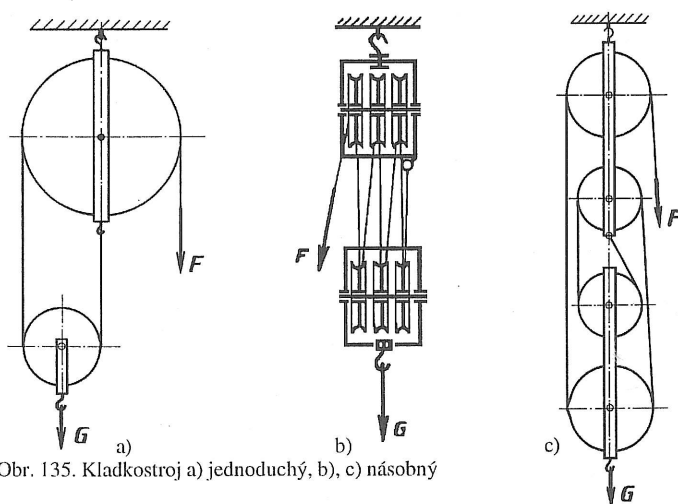
$$\eta_c = \frac{1 + \eta}{2}.$$

Je zřejmé (po porovnání vzorců či dosazení), že účinnost volné kladky je větší než účinnost pevné kladky.

13.5.3 Obecný kladkostroj

Kladkostroji lze přemisťovat břemena s mnohem menší silou než je jejich vlastní tíha.

Jednoduchý kladkostroj (obr. 135a) se skládá z jedné pevné (horní) a jedné volné (spodní) kladky. Násobný (obecný) kladkostroj se skládá nejčastěji ze stejného počtu pevných a volných kladek. Kladky mají buď stejný průměr a jsou uloženy vedle sebe na dvou hřídelích pod sebou (obr. 135b), nebo jsou jejich průměry odstupňovány a kladky jsou v tzv. kladnicích pod sebou (obr. 135c), aby se lano o kladky nedřelo.



Obr. 135. Kladkostroj a) jednoduchý, b), c) násobný

Pro zvedání břemene platí, že

$$G = F_{\text{teoretická}} \cdot n, \quad F_{\text{teoretická}} = \frac{G}{n},$$

kde n je počet kladek.

Skutečná síla pro zvedání:

$$F = \frac{G}{n \cdot \eta_c}, \quad \text{kde } \eta_c \text{ je celková účinnost kladek,}$$

$$\eta_c = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_n.$$

Pro spouštění břemen $F = \frac{G \cdot \eta_c}{n}, \quad \eta_c = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_n; \quad \text{v případě na obr. 135c } n = 4.$

Kdyby počet kladek n vzrůstal nad všechny meze, blížila by se síla pro zvedání nule a kladkostroj by byl samosvorný. Poněvadž kladkostroj nemůže mít nekonečný počet kladek, není samosvorný a břemeno musí být zadržováno určitou silou F , což je nevýhoda těchto kladkostrojů.

13.5.4 Diferenciální kladkostroj

Diferenciální kladkostroj (obr. 136) se skládá z dvojité pevné řetězové kladky a z volné kladky, která má vodící drážku pro řetěz. Rozdíl (diference) v počtu zubů u dvojité pevné kladky bývá jeden až dva zuby.

Při zvedání břemene (η je účinnost jedné kladky):

$$F_1 > F_{s1}, \quad F_1 = \frac{F_{s1}}{\eta},$$

$$F_{s1} > F_{s2}, \quad F_{s1} = \frac{F_{s2}}{\eta}.$$

Při spouštění břemene (η je účinnost jedné kladky):

$$F_2 < F_{s1}, \quad F_2 = F_{s1} \cdot \eta,$$

$$F_{s2} > F_{s1}, \quad F_{s1} = F_{s2} \cdot \eta.$$

Pro rovnováhu na pevné kladce platí při zvedání:

$$-F_1 \cdot R - F_{s2} \cdot r + \frac{F_{s1}}{\eta} \cdot R = 0,$$

$$F_1 \cdot R = \frac{F_{s1}}{\eta} \cdot R - F_{s2} \cdot r = \frac{F_{s2}}{\eta^2} \cdot R - F_{s2} \cdot r,$$

Pro rovnováhu na pevné kladce platí při spouštění:

$$F_{s1} \cdot \eta \cdot R - F_2 \cdot R - F_{s2} \cdot r = 0,$$

$$F_{s2} \cdot \eta^2 \cdot R - F_2 \cdot R - F_{s2} \cdot r = 0,$$

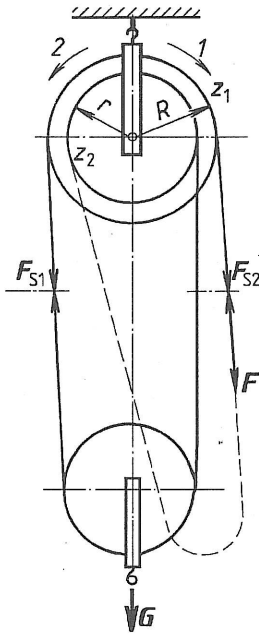
13 Jednoduché stroje a jejich silové poměry

$$F_1 = \frac{F_{s2}}{R} \cdot \left(\frac{R}{\eta^2} - r \right),$$

$$F_2 = \frac{F_{s2}}{R} \cdot (\eta^2 \cdot R - r),$$

$$F_1 = F_{s2} \cdot \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{r}{R} \right) = F_{s2} \cdot \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{z_2}{z_1} \right),$$

$$F_2 = F_{s2} \cdot \left(\eta^2 - \frac{r}{R} \right) = F_{s2} \cdot \left(\eta^2 - \frac{z_2}{z_1} \right)$$



kde z_1 je počet zubů pevné kladky o větším poloměru,
 z_2 je počet zubů pevné kladky o menším poloměru.

Obr. 136. Diferenciální kladkostroj

Pro rovnováhu na volné kladce platí při zvedání:

Pro rovnováhu na volné kladce platí při spouštění:

$$F_{s1} + F_{s2} - G = 0, \quad \frac{F_{s2}}{\eta} + F_{s2} = G,$$

$$F_{s2} \cdot \left(\frac{1}{\eta} + 1 \right) = G, \quad F_{s2} = G \cdot \frac{\eta}{1 + \eta}.$$

$$F_{s1} + F_{s2} - G = 0, \quad F_{s2} \cdot \eta + F_{s2} = G,$$

$$F_{s2} = \frac{G}{\eta + 1}.$$

Po dosažení získáme pro rovnováhu na diferenciálním kladkostroji při rovnoměrném zvedání:

při rovnoměrném spouštění:

$$F_1 = G \cdot \frac{\eta}{1 + \eta} \cdot \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{r}{R} \right) = G \cdot \frac{\eta}{1 + \eta} \cdot \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{z_2}{z_1} \right),$$

$$F_2 = G \cdot \frac{1}{1 + \eta} \cdot \left(\eta^2 - \frac{r}{R} \right) = G \cdot \frac{1}{1 + \eta} \cdot \left(\eta^2 - \frac{z_2}{z_1} \right).$$

Diferenciální kladkostroj začíná být samosvorný, je-li výraz $\eta^2 - \frac{z_2}{z_1} = 0$, tzn $\eta^2 = \frac{z_2}{z_1}$. Pak je $F_2 = 0$.

Je-li např. $\eta = 0,96$, je $\eta^2 = 0,92 = \frac{11}{12}$, což je obvyklý počet zubů pevné řetězové kladky.

Diferenciální kladkostroj má tu výhodu, že síla potřebná k zvednutí břemene je asi desetinou tíhy tohoto břemene. U samosvorného kladkostroje je účinnost menší než 50 % (přes 50 % hnací síly se spotřebuje k překonání tření), což je jeho nevýhoda.

Příklad 1

Určete velikost síly pro zvedání a spouštění břemene tíhy $G = 2\,500\text{ N}$ na násobném kladkostroji se šesti kladkami, jejichž celková účinnost $\eta_c = 0,88$.

Řešení:

Pro zvedání platí: $F_1 = \frac{G}{n \cdot \eta_c}, \quad F_1 = \frac{2\,500\text{ N}}{6 \cdot 0,88} = 474\text{ N}.$

Pro spouštění platí: $F_2 = \frac{G \cdot \eta_c}{n}, \quad F_2 = \frac{2\,500\text{ N}}{6} \cdot 0,88 = 367\text{ N}.$

13 Jednoduché stroje a jejich silové poměry

Příklad 2

Diferenciální kladkostroj má počet zubů $z_1 = 12$, $z_2 = 11$. Určete sílu F pro rovnoměrné zvedání břemene tíhy $G = 1\,000\text{ N}$, je-li účinnost jedné kladky $\eta = 0,95$. Jaká je celková účinnost tohoto kladkostroje?

Řešení:

$$F_1 = G \cdot \frac{\eta}{1 + \eta} \cdot \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{z_2}{z_1} \right), \quad F_1 = 1\,000\text{ N} \cdot \frac{0,95}{1 + 0,95} \cdot \left(\frac{1}{0,95^2} - \frac{11}{12} \right) = 1\,000\text{ N} \cdot 0,487 \cdot (1,11 - 0,917) = \\ = 1\,000\text{ N} \cdot 0,487 \cdot 0,193 \doteq 94\text{ N}.$$

Síla pro rovnoměrné zvedání daného břemene je přibližně 94 N.

Celková účinnost se vypočte jako poměr teoretické síly k síle F , tedy

$$\eta_c = \frac{\frac{G}{2} \cdot \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)}{F}, \quad \eta_c = \frac{\frac{1\,000\text{ N}}{2} \cdot \left(1 - \frac{11}{12}\right)}{94\text{ N}} = \frac{500\text{ N} \cdot (1 - 0,917)}{94\text{ N}} \doteq 0,44.$$

Celková účinnost je 44 %.

Příklad 3

Břemeno jaké tíhy G lze zvedat diferenciálním kladkostrojem silou $F_1 = 500\text{ N}$? Počet zubů dvojitě kladky je $z_1 = 12$, $z_2 = 11$. Je-li účinnost jedné kladky $\eta = 0,94$, jaká je celková účinnost η_c kladkostroje?

Řešení:

Při zvedání břemene

$$F_1 = G \cdot \frac{\eta}{1 + \eta} \cdot \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{z_2}{z_1} \right), \quad G = \frac{F_1 \cdot \frac{1 + \eta}{\eta}}{\frac{1}{\eta^2} - \frac{z_2}{z_1}}, \quad G = \frac{500\text{ N} \cdot \frac{1 + 0,94}{0,94}}{\frac{1}{0,94^2} - \frac{11}{12}} \doteq \frac{500\text{ N} \cdot 2,064}{1,13 - 0,92} = \frac{1\,032\text{ N}}{0,21} = 4\,914\text{ N}.$$

$$\eta_c = \frac{\frac{G}{2} \cdot \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)}{F}, \quad \eta_c = \frac{\frac{4\,914\text{ N}}{2} \cdot \left(1 - \frac{11}{12}\right)}{500\text{ N}} = \frac{2\,457\text{ N} \cdot (1 - 0,917)}{500\text{ N}} \doteq 0,408.$$

Při zvedání břemene tíhy přibližně 4 914 N je celková účinnost diferenciálního kladkostroje téměř 40 %.

Úlohy

1. Pro rovnoměrné zvedání břemene tíhy $G = 190\text{ N}$ na pevné kladce potřebujeme sílu $F_1 = 205\text{ N}$. Jaká je účinnost pevné kladky?
2. Určete tíhu břemene G , které je možno rovnoměrně zvedat volnou kladkou silou $F_1 = 500\text{ N}$, je-li účinnost volné kladky $\eta = 0,94$.
3. Pro rovnoměrné zvedání břemene tíhy G na volné kladce je potřeba síla $F_1 = 250\text{ N}$ a při spouštění téhož břemene je potřeba síla $F_2 = 220\text{ N}$. Určete tíhu břemene G a celkovou účinnost volné kladky η_c .
4. Stanovte počet kladek n jednoduchého kladkostroje s celkovou účinností $\eta_c = 0,85$, je-li pro rovnoměrné zvedání břemene tíhy $G = 8\text{ kN}$ možno použít sílu $F_1 = 1\,180\text{ N}$.

(Výsledky: 1. $\eta = 0,927$; 2. $G = 970\text{ N}$; 3. $G = 470\text{ N}$, $\eta_c = 0,94$; 4. $n = 8$.)

Kontrolní otázky

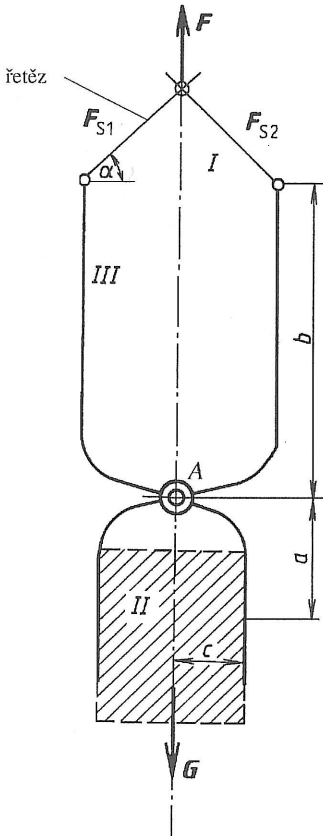
1. Nakreslete pevnou a volnou kladku. Jak určíte sílu potřebnou pro zvedání?
2. Jaký je převod volné kladky?
3. Nakreslete jednoduchý kladkostroj. Jak určíte sílu potřebnou pro zvedání?
4. Nakreslete násobný kladkostroj. V čem spočívá jeho výhoda?
5. Nakreslete diferenciální kladkostroj. V čem spočívá jeho výhoda a jakou má nevýhodu?

13.6 Kleště zdvihacích strojů

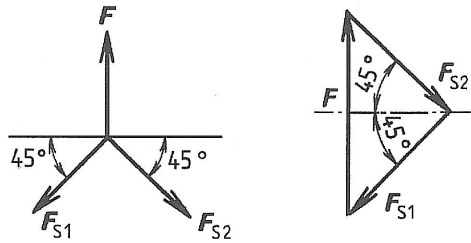
Kleště patří mezi prostředky k uchopení břemen. Bývají zavěšeny na jeřábu a jedna z možností jejich použití je přenášení břemen s vyšší teplotou. Síla svírající předmět je vyvozována jeho vlastní tíhou.

Určeme sílu F potřebnou k tomu, aby kleště (obr. 137) bezpečně uchopily těleso o tíze G . Předpokládejme, že velikost úhlu α v závěsu je v našem případě 45° .

Řešení: Budeme postupně uvolňovat jednotlivé části kleští.



a) Uvolnění závěsu I

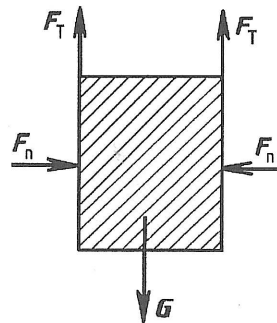


Z rovnováhy tří sil v rovině plyne:

$$F_{s1} = \frac{F}{2 \sin 45^\circ} = \frac{F}{2 \cdot \sin 45^\circ},$$

$$F_{s2} = F_{s1}.$$

b) Uvolnění břemene II



Tíhu G je nutno zachytit dvěma

třecími silami F_T :

$$G = 2F_T, \quad F_T = \frac{G}{2},$$

$$F_T = F_n \cdot \mu,$$

$$F_n = \frac{F_T}{\mu} = \frac{G}{2\mu}.$$

c) Uvolnění ramene kleští III

Z rovnováhy momentů k otočnému bodu (A) obou ramen kleští dostaneme vztah:

$$F_n \cdot a - F_T \cdot c - F_{s1} \cdot \cos 45^\circ \cdot b = 0,$$

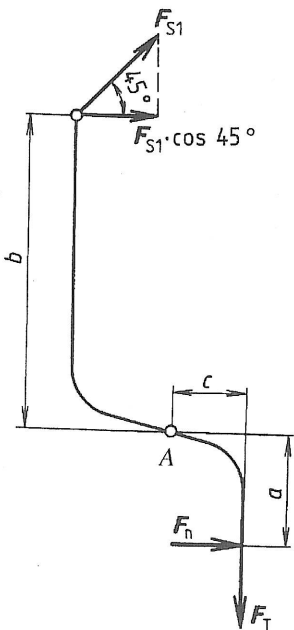
$$F_{s1} = \frac{F_n \cdot a - F_T \cdot c}{\cos 45^\circ \cdot b},$$

a po dosazení

$$\frac{F}{2 \cdot \sin 45^\circ} = \frac{\frac{G}{2\mu} \cdot a - \frac{G}{2} \cdot c}{\cos 45^\circ \cdot b},$$

$$\frac{F}{2 \cdot \sin 45^\circ} = \frac{G}{2b \cdot \cos 45^\circ} \cdot \left(\frac{a}{\mu} - c\right), \quad \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1,$$

$$F = \frac{G}{b} \cdot \left(\frac{a}{\mu} - c\right),$$



Obr. 137. Kleště zdvihacích strojů

Jestliže úhel v závěsu nebude 45° , jak bude vypadat vztah pro výpočet síly F ?

13.7 Brzdy

Brzda je soustava těles, kde se prakticky setkáváme s pasivními odpory, které využíváme ke zpomalování, popř. až zastavení pohybujícího se tělesa (břemene, vozidla apod.). Brzda se používá také k zajištění nepohybujícího se tělesa. Nás budou zajímat ve strojírenství převážně používané mechanické radiální brzdy, které je možno dělit takto:

Brzdy	mechanické	radiální	čelistové (špalíkové)	s vnějšími čelistmi s vnitřními čelistmi
			pásové	s vnějším pásem s vnitřním pásem

Všechny mechanické brzdy jsou třecí brzdy, tzn., že brzdící prvky jsou přitlačovány k brzděnému prvku a třením zpomalují jeho pohyb (otáčení). Jestliže se jako brzdící prvky užívají brzdové čelisti, jedná se o čelistovou brzdou. Pásové brzdy, obvykle bubnové, jsou vybaveny ocelovým pásem s obložením a brzdny účinek je vyvozen třením mezi pásem a brzdovým bubnem; tyto brzdy byly např. používány jako tzv. převodové brzdy, protože působily na některém z převodných soustrojí nebo u ručních zdvihadel.

13.7.1 Čelistové brzdy

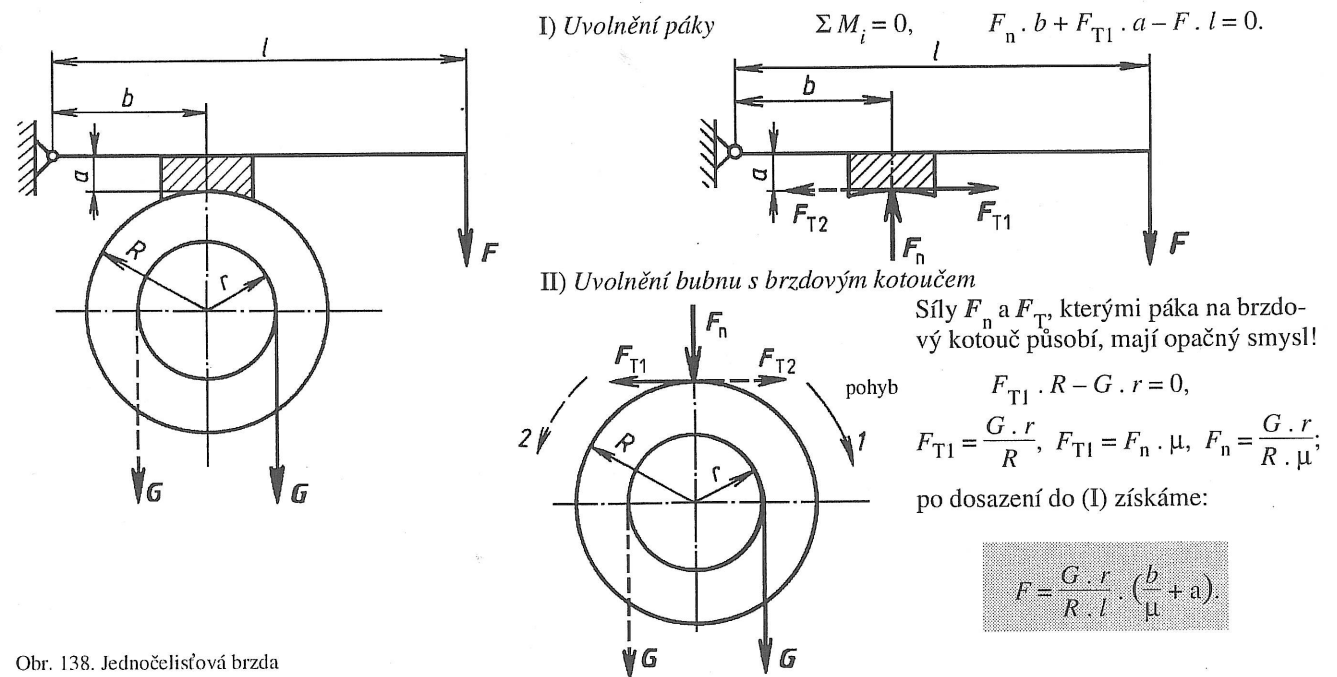
Jednočelistová brzda (obr. 138) představuje soustavu dvou členů, a to brzdového kotouče (s bubnem) a páky (se špalíkem). Brzdový kotouč je buď na obvodě hladký, nebo má klínovou drážku. Tato brzda se používá pro malé momenty; je nevýhodná pro jednostranný tlak čelisti na brzdový kotouč. Namáhá hřídel na ohyb.

Na bubnu o poloměru r jednočelistové brzdy je navinuto lano, na jehož volném konci je zavěšeno břemeno tíhy G . Úkolem je určit velikost síly F , působící na volném konci páky pro rovnoměrné spouštění břemene.

Řešení:

Síly působící na soustavu těles zjistíme postupně z rovnováhy sil jednotlivých členů. Je důležité správně určit smysl složek reakce, kterými sousední člen soustavy působí na člen druhý.

Budeme postupně uvolňovat jednotlivé části jednočelistové brzdy. Přitom je třeba vzít v úvahu 3. Newtonův zákon.



Obr. 138. Jednočelistová brzda

Mějme stejný příklad jednočelistové brzdy, avšak s tím rozdílem, že smysl otáčení brzdového kotouče (pohyb v obr. 138) je opačný než v předcházejícím případě.

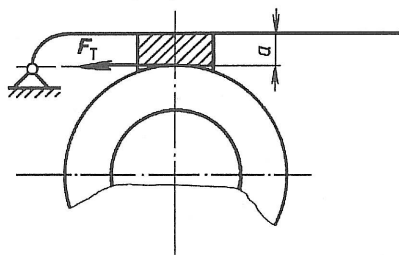
Řešení provedeme stejným způsobem jako u předcházejícího příkladu (uvolníme soustavu a napíšeme rovnice rovnováhy). Po úpravě dospějeme k tomuto výsledku:

$$F = \frac{G \cdot r}{R \cdot l} \cdot \left(\frac{b}{\mu} - a \right).$$

Výsledek (se znaménkem minus) napovídá, že pro různé smysly otáčení potřebujeme různě velké brzdící síly F , což není příliš výhodné. Z předchozích výpočtů je zřejmé, že rozdíl způsobuje pouze hodnota $\pm a$.

13 Jednoduché stroje a jejich silové poměry

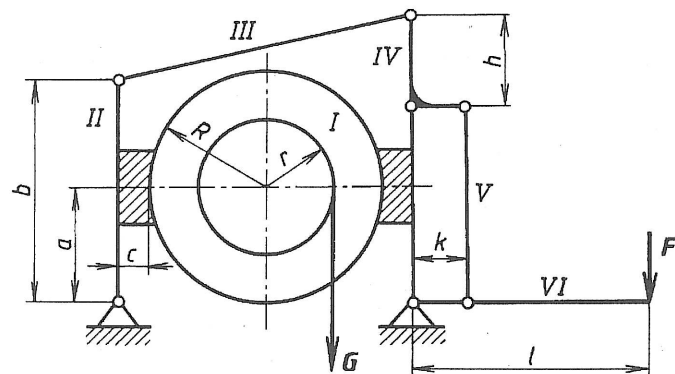
Konstrukční úpravou (obr. 139) se dosáhne toho, že bude vyloučen vliv síly F_T (tzn. otočný bod páky bude posunut na vektorovou přímkou síly F_T , potom bude mít síla F_T moment roven nule) a ve výsledných vztazích pro sílu F se hodnota $\pm a$ nebude vyskytovat.



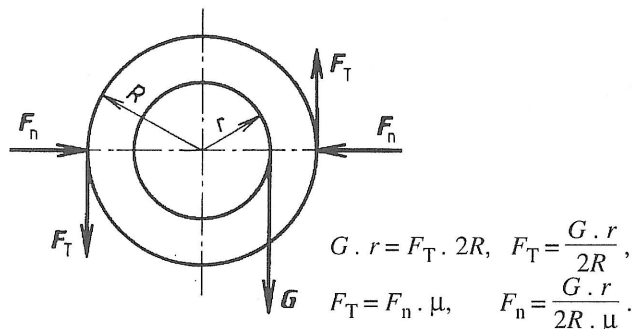
Obr. 139. Konstrukční úprava jednočelistové brzdy

Nevýhodu jednočelistových brzd, jednostranné namáhání hřídele, odstraňuje *dvoučelistová brzda* (znázorněná na obr. 140), sestávající z rámu a dalších členů (I až VI). V obou směslech otáčení se brzdí stejnou silou F .

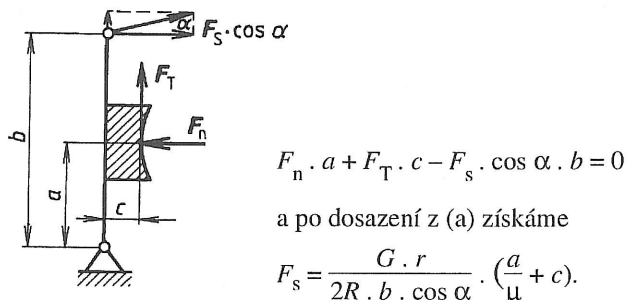
Velikost síly F určíme obdobně jako u jednočelistové brzdy. Budeme postupně uvolňovat jednotlivé členy a dáme opět pozor na smysl (znaménko) jednotlivých sil.



a) Uvolnění bubnu I



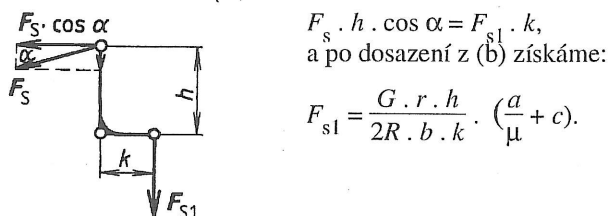
b) Uvolnění páky II



c) Uvolnění táhla III

Na táhlo III nepůsobí žádná jiná vnější síla, proto reaguje ve spojnicí kloubů. Síla F_s je stejně velká, opačného smyslu a leží na spojnicí kloubů.

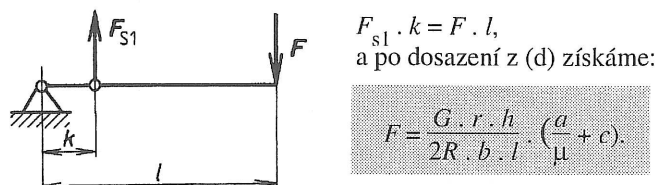
d) Uvolnění páky IV



e) Uvolnění táhla V

Táhlo V reaguje ve spojnicí kloubů silou F_{s1} .

f) Uvolnění páky VI



Obr. 140. Dvoučelistová brzda

13 Jednoduché stroje a jejich silové poměry

Bude-li se brzdový kotouč otáčet opačným směrem, tzn., že břemeno tíhy G působí na opačné straně bubnu, budeme postupovat obdobným způsobem. Sestavené rovnice budou stejné až na znaménko u ramene c . V tomto případě bude výsledek tento:

$$F = \frac{G \cdot r \cdot h}{2R \cdot b \cdot l} \cdot \left(\frac{a}{\mu} - c \right)$$

Mají-li na pákách II a IV působit stejné zatěžující síly, je třeba, aby otočné body každé této páky ležely na jediné vektorové přímce síly F_T , tj. na tečně k brzdovému kotouči; pak má síla F_T moment roven nule a vliv ramena c je vyloučen.

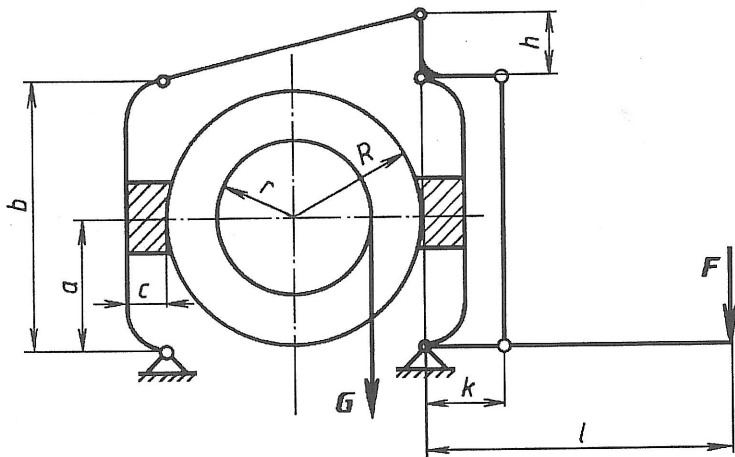
Úloha 1

Určete tíhu břemene G , které je brzděno jednočelistovou brzdou s brzdovým kotoučem o poloměru $R = 200$ mm, jestliže brzdící síla $F = 100$ N. Poloměr bubnu $r = 150$ mm, délka páky $l = 750$ mm, $b = 150$ mm, $a = 0$, $\mu = 0,4$. (obr. 138). Jaká síla bude třeba k brzdění na páce při točení v obou směrech? Jak velké by muselo být a , aby byla brzdá samosvorná?

(Výsledek: $G = 266,7$ N; stejná, protože $a = 0$; $a = \frac{b}{\mu}$, tedy $a = \frac{150 \text{ mm}}{0,4} = 375$ mm.)

Úloha 2

Určete velikost síly F u dvoučelistové brzdy, kde je provedena konstrukční úprava znázorněná na obr. 141.



Obr. 141. Konstrukční úprava dvoučelistové brzdy

Úloha 3

Určete velikost brzdící síly F u dvoučelistové brzdy, která je potřeba pro zastavení břemene, je-li dáno: $G = 5\,000$ N, $r = 200$ mm, $R = 400$ mm, $a = 200$ mm, $b = 450$ mm, $k = h = 100$ mm, $l = 700$ mm, $c = 50$ mm, $\mu = 0,4$ (obr. 140).

(Výsledek: $F \doteq 220$ N.)

Kontrolní otázky

1. Jaký je postup při výpočtu čelistových brzd?
2. Nakreslete jednočelistovou brzdu. Jaké má výhody a nevýhody?
3. Nakreslete dvoučelistovou brzdu. Jaké má výhody a nevýhody?
4. Jak můžeme snížit brzdící sílu u jednočelistové brzdy?
5. Ovlivňuje smysl otáčení bubnu velikost brzdící síly? V jakém případě?

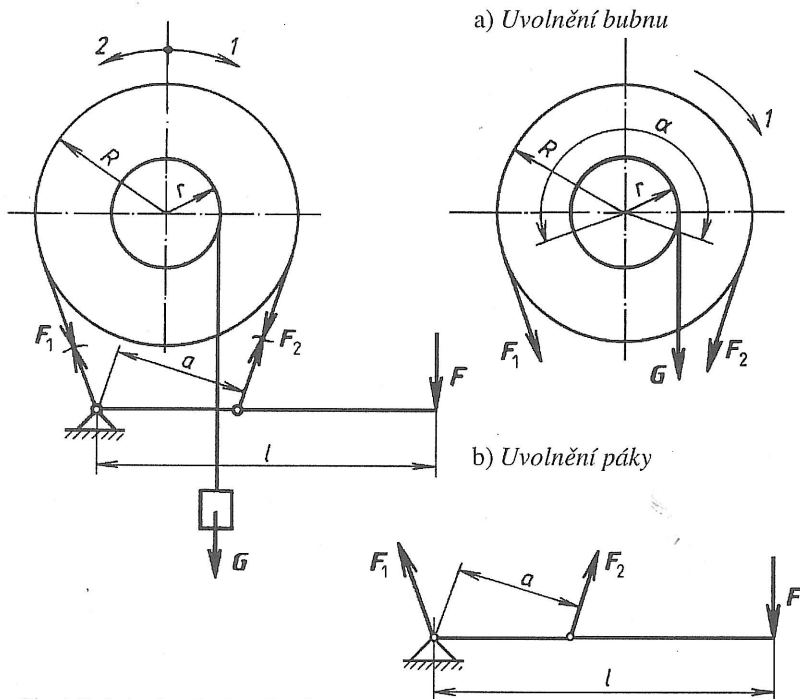
13.7.2 Pásové brzdy

U pásových brzd je nahrazena brzdová čelist (ocelovým) pásem přitahovaným pákou k brzdovému kotouči. Z důvodu dosažení většího součinitele smykového tření bývá brzdový pás obložen jiným materiálem.

Jednoduchá pásová brzda

U jednoduché pásové brzd je jeden konec pásu přichycen k páce v bodě A (obr. 142) a druhý konec (zpravidla s větší silou) se připojí buď k pevnému rámu stroje, nebo přímo k otočnému čepu páky.

Bez ohledu k pasivním odporům bude na hřídeli rovnováha, překoná-li třecí síla sílu na obvodě brzdového kotouče. Vyšetřeme nejprve smysl otáčení 1, kdy je $F_1 > F_2$. Rozdíl velikostí sil $F_1 - F_2$ u pásu vyvozuje na brzdicím kotouči brzdící moment, který musí být v rovnováze s momentem břemene $G \cdot r$. Při výpočtu brzdící síly F budeme postupovat obdobně jako v předchozích příkladech, tzn., že uvolníme příslušná tělesa, v našem případě bubnu a páku (obr. 142).



$$\Sigma M_i = 0, \quad -G \cdot r - F_2 \cdot R + F_1 \cdot R = 0, \\ G \cdot r = (F_1 - F_2) \cdot R,$$

Při zabrzdění se nesmí pás po kotouči smýkat, proto musí být zároveň (viz vláknové tření, čl. 11.4)

$$F_1 = F_2 \cdot e^{\alpha\mu},$$

takže po dosazení

$$F_2 = \frac{G \cdot r}{(e^{\alpha\mu} - 1) \cdot R}$$

(Síla F_1 nemá na páce moment.)

$$F \cdot l = F_2 \cdot a, \quad F \cdot l = \frac{G \cdot r}{(e^{\alpha\mu} - 1) \cdot R} \cdot a$$

Brzdící síla

$$F = \frac{G \cdot r \cdot a}{(e^{\alpha\mu} - 1) \cdot R \cdot l}$$

Obr. 142. Jednoduchá pásová brzda

Nyní vyšetříme smysl otáčení 2, tzn., že břemeno je na opačné straně bubny. Moment síly G má opačný smysl, síly se „vymění“. Uvolníme nejprve bubnu:

$$\Sigma M_i = 0, \quad G \cdot r + F_1 \cdot R - F_2 \cdot R = 0, \\ G \cdot r = (F_2 - F_1) \cdot R, \quad F_2 = F_1 \cdot e^{\alpha\mu},$$

z čehož po dosazení dostaneme

$$F_2 = \frac{G \cdot r \cdot e^{\alpha\mu}}{(e^{\alpha\mu} - 1) \cdot R}$$

Nyní uvolníme páku:

$$F \cdot l = F_2 \cdot a, \quad F \cdot l = \frac{G \cdot r \cdot e^{\alpha\mu}}{(e^{\alpha\mu} - 1) \cdot R} \cdot a$$

Brzdící síla

$$F = \frac{G \cdot r \cdot e^{\alpha\mu} \cdot a}{(e^{\alpha\mu} - 1) \cdot R \cdot l}$$

Úhel opásání bývá nejčastěji 0,7 obvodu a součinitel tření mezi litinovým kotoučem a ocelovým pásem $\mu = 0,18$. Těmto poměrům odpovídají hodnoty (viz čl. 11.4)

$$e^{\alpha\mu} = 2,21, \quad \frac{1}{e^{\alpha\mu} - 1} = 0,83, \quad \frac{e^{\alpha\mu}}{e^{\alpha\mu} - 1} = 1,83.$$

Nevýhodou jednoduché pásové brzd je, že pro různý smysl otáčení bubny je zapotřebí jiná brzdící síla.

13 Jednoduché stroje a jejich silové poměry

Příklad

Na litinovém bubnu jednoduché pásové brzdy o poloměru $r = 100$ mm je navinuto lano, na němž je zavěšené břemeno o tíze $G = 4\,000$ N. Poloměr brzdového kotouče $R = 500$ mm. Ramena páky jsou $l = 1\,500$ mm, $a = 100$ mm, $e^{\alpha\mu} = 2,21$ (značení podle obr. 142). Jak velká síla, působící na konci páky, udrží břemeno v rovnováze? Uvažujte oba směry otáčení.

Řešení:

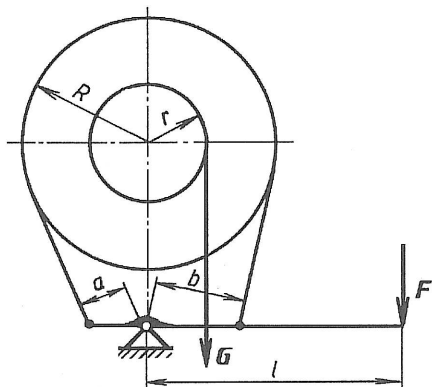
$$\text{Smysl otáčení 1: } F = \frac{G \cdot r \cdot a}{(e^{\alpha\mu} - 1) \cdot R \cdot l}, \quad F = \frac{4\,000 \text{ N} \cdot 100 \text{ mm} \cdot 100 \text{ mm}}{(2,21 - 1) \cdot 500 \text{ mm} \cdot 1\,500 \text{ mm}}, \quad F = 44 \text{ N}.$$

$$\text{Smysl otáčení 2: } F = \frac{G \cdot r \cdot e^{\alpha\mu} \cdot a}{(e^{\alpha\mu} - 1) \cdot R \cdot l}, \quad F = \frac{4\,000 \text{ N} \cdot 100 \text{ mm} \cdot 2,21 \cdot 100 \text{ mm}}{(2,21 - 1) \cdot 500 \text{ mm} \cdot 1\,500 \text{ mm}}, \quad F = 97 \text{ N}.$$

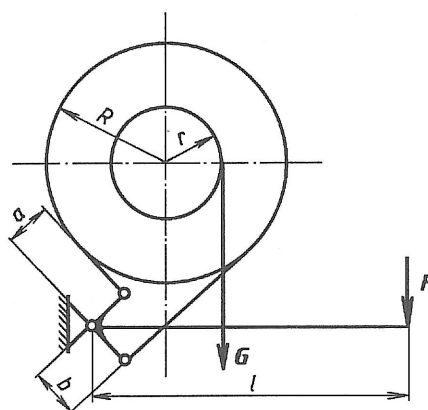
Břemeno je v rovnováze, působí-li (podle směru otáčení) brzdová síla 44 N nebo 97 N.

Rozdílová (diferenciální) pásová brzda

U rozdílové (diferenciální) brzdy (obr. 143) jsou konce pásu přichyceny k páce mimo otočný čep. Momenty tahů v pásech se od sebe odčítají, působí proti sobě (odtud název). Rozdílová brzda brzdí účinně pouze v jednom směru otáčení. Tah v páse na ramenu a vyvolává moment, který podporuje účinek síly F . Tato brzda se - při určité velikosti ramen - může stát samosvornou, brzdění za tohoto stavu je neklidné, trhavé. Brzdící síla je malá, proto se rozdílová brzda používá pro brzdění velkých momentů. Brzda má měkký záběr.



Obr. 143. Pásová rozdílová brzda



Obr. 144. Pásová součtová brzda

Součtová pásová brzda

Součtová brzda (obr. 144) má oba konce pásu zachyceny tak, že silové účinky v páse dávají souhlasné momenty (momenty sil se sčítají). Je-li zároveň $a = b$, brzdí pásová součtová brzda této konstrukce v obou směrech otáčení stejně. Brzdící síla F je pro oba směry otáčení stejná, musí však být poměrně velká. Brzda má tvrdý záběr.

Lze odvodit, že pro brzdící sílu F platí v případě rozdílové brzdy

$$F = \frac{G \cdot r \cdot (b - e^{\alpha\mu} \cdot a)}{(e^{\alpha\mu} - 1) \cdot R \cdot l}$$

součtové brzdy

$$F = \frac{G \cdot r \cdot (b + e^{\alpha\mu} \cdot a)}{(e^{\alpha\mu} - 1) \cdot R \cdot l}$$

Kontrolní otázky

1. Na jakém principu pracují pásové brzdy?
2. Co představuje výraz $e^{\alpha\mu}$, jaký význam mají jednotlivé symboly?
3. Jak postupujeme při výpočtu pásové brzdy?
4. Nakreslete součtovou pásovou brzdu. Proč se tak nazývá?
5. Jak vypadá diferenciální pásová brzda?

LITERATURA

- Augusta, P. - Klůna, J.: Tajemství přesnosti. Praha, SNTL 1990.
Doleček, J. - Holoubek, Z.: Strojnictví. Části strojů. Praha, Sobotáles 1995.
Hofírek, M.: Mechanika - statika. Praha, Fragment 1998.
Hofírek, M.: Mechanika - statika. Pracovní sešit. Praha, Fragment 1998.
Hoischen, H.: Technisches Zeichnen. Fulda, Porzeller 1998.
Kříž, R. - Vávra, P.: Strojírenská příručka. Svazek 1 až 8. Praha, Scientia 1992 až 1997.
Leinveber, J. - Řasa, J. - Vávra, P.: Strojnické tabulky. Praha, Scientia 1999.
Míčekal, K.: Sběrka úloh z technické mechaniky. Praha, Informatorium 1998.
Valenta, J. - Zajíc, V. : Mechanika - statika. Praha, Fortuna 1994.

REJSTŘÍK

Brzda 93
– jednočelistová 93
– dvoučelistová 94
– pásová 96
– jednoduchá 96
– rozdílová (diferenciální) 97
– součtová 97
brzdy mechanické radiální, rozdělení 93
břemeno osamělé 41
buben brzdový 93

Čas 8
čelistí brzdová 93
čep axiální 71
– vybraný 73
– koncový (čelní) 71
– nezaběhaný 71
– patní (nožní) 71
– radiální 71
– zaběhaný 71

Délka 8
– výslednice 21
diagram Cremonův 43
dvojice sil 25
– točivá 28

Hmota 7
hmotnost 7, 8

Jednotka odvozená 8
– základní 8

Kladka pevná 87
– volná 87
kladkostroj 87
– diferenciální 89
– jednoduchý 89
– násobný (obecný) 89
kleště (zdvihacích strojů) 92
klín 85
– spojovací 85
– podélný 85
– příčný 85
– stavěcí 85
– míra bezpečnosti 86
kolo na hřídeli 87
konstanta 8
konstrukce příhradová 41
kružnice třecí 71
kužel tření 68

Ložisko patní 13
– závěsné 13

Mechanika klasická (Newtonova) 10

mechanika, rozdělení 7
metoda průsečná 47
– styčnicková 46
mnohouhelník (sil) vláknový 24
moment brzdový 76
– čepového tření 71
– dvojice sil 25
– –, smysl 26
– –, velikost 25
– hnací 76
– klopný 63
– síly k ose 28
– –, velikost 29
– stability 63
– točivé dvojice sil 28
– valivého odporu 76

Nositelka (sil) 9
nosník 35

Obrazec složkový (silový) 24
odpor pasivní 67
– při smýkání 67, 76
– valivý 67, 76

Páka 31
– dvojjzvatná 87
– jednozvatná 87
–, rovnováha 31
paprsky pólové (vlákna) 24
plocha třecí 70
podmínka rovnováhy momentů 29
– samosvornosti (šroubu) 83
– valení, statická 77
podmínky rovnováhy tří sil v rovině 16
– statické pro rovnováhu tělesa v rovině 31
podpora pevná 12
– volná 12
pól 24
poloha rovnovážná (tělesa) 63
– stálá (stabilní) 63
– volná (indiferentní) 63
– vratká (labilní) 63
pravidlo rovnoběžníkové 15
převod kladky 88
– řemenový 74
– –, silové poměry 74
přímka vektorová 9
působíště síly 9

Rameno dvojice sil 25
– momentu valivého odporu 76
– síly 28
reakce 10
– v podporách 12, 13, 35
redukce momentů 28

- rovina nakloněná 80
- rovnice číselných hodnot 8
 - veličinová 8
- rovnoběžník silový 15
- rovnováha momentů 29
 - sil v rovině 14, 22
 - proti otáčení 31
 - proti posunutí 31
- soustavy sil v prostoru 53
- rozklad síly 14, 19
 - , graficky 19
 - , početně 19
- rychlost 8

- Samosvornost kladkostroje 89, 90
 - klínu 86
 - šroubu 83
- síla 8
 - brzdicí 73
 - , dynamický účinek 9
 - hnací 73
 - obvodová 74
 - odstředivá 75
 - , orientace 9
 - přidržovací 81
 - , působíště 9
 - , směr 9
 - , statický účinek 9
 - tažná 81
 - tíhová (tíha) 10
 - třecí 67
 - , velikost 9
- skalár 8
- skládání momentů 28
 - sil v rovině 14
 - , postupné 24
- složka normálová 19
 - tečná 19
- smysl momentu 26
- součinitel čepového tření 71
 - kladky 88
 - pásového tření 74
 - smykového tření 68
 - v klínové drážce 69
 - ve válcové drážce 71
 - trakční 78
 - valivého odporu 76
- soustava prutová 41, 50
 - , grafické řešení (Cremonův diagram) 42
 - , namáhání 41
 - , obcházení 42
 - , početní řešení 45
 - , -- průsečnou metodou 47
 - , -- styčnickovou metodou 46
 - rovinná 41
 - staticky určitá 41
- stabilita tělesa 64
- stoupání 80
 - závitů 84
- stroje jednoduché 80
- styčnický 41
 - dvojný 42
 - , řešení 42
 - , uvolnění 46

- Šroub pohybový 84
 - s ostrým závitěm 83
 - plochým závitěm 83
 - spojovací 84
 - upevňovací 84

- Těleso dokonale tuhé 7
 - fyzikální 7
 - pružné 7
- těžiště 55
 - , určení 56
 - základních geometrických tvarů 56
- trojúhelník silový 15
- tření axiální 72
 - čepové 71
 - smykové (Coulombovo) 67
 - suché 67
 - v klínové drážce 69
 - viskózní 67
 - vláknové 73
- tuhost lana 88

- Účinnost kladkostroje 89, 91
 - kladky, mechanická 88
 - nakloněné roviny 83
 - stroje, mechanická 80
 - šroubu 84
- úhel opásání 73
 - sklonu 80
 - směrový 9, 21
 - stoupání 83
 - tření 68
 - výslednice, směrový 21
- určitost statická prutové soustavy 41

- Valení 76
- vázání (vazba) těles 12
- vektor 8
 - nulový 8
- veličina, číselná hodnota 8
 - fyzikální, základní 8
 - , odvozená 8
 - skalární (skalár) 8
 - vektorová (vektor) 8
- věta momentová (Varignonova) 28
- věty Guldinovy 65
- vyrážení klínu 86
- výslednice sil 14
 - celková 21
 - částečná 21
 - , výpočet 21
- vzpříčení vedeného tělesa 70

- Zákon akce a reakce 10
 - Coulombův 68
 - rovnoběžníka 15
 - setrvačnosti 10
 - síly 10
- zákony pohybové, Newtonovy 10
- zarážení klínu 85
- zrychlení 8
 - tíhové 10
- zvedák šroubový 84

Ing. Miloslav Julina - Ing. Antonín Řeřábek

MECHANIKA

Statika

pro školu a praxi

Vydala Scientia, spol. s r. o., pedagogické nakladatelství,

Radimova 37/50, 169 00 Praha 6 - Břevnov

Odpovědná redaktorka RNDr. Blanka Plášilová, CSc.

Sazba Scientia, spol. s r. o.

Obálka Miloš Lang, akad. malíř

1. vydání

Praha 2000

Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a. s.,

Husova 1881, 580 01 Havlíčkův Brod

777 5640

ISBN 80-7183-188-3

Poznámky
