B. M. G

SLOVENSKÁ VYSOKÁ ŠKOLA TECHNICKÁ V BRATISLAVE

STROJNÍCKA FAKULTA

Prof. Dr. Ing. O. Puchner, DrSc. - Doc. Ing. A. Kamenský, CSc.
Prof. Ing. J. Syč-Milý, CSc. - Doc. Ing. S. Tesař, CSc.

Pružnosť a pevnosť I

II.

2.0 Základné pojmy náuky o pružnosti a pevnosti

2.1 VONKAJŠIE SILY

Jednotlivé časti konštrukcií v spojení s inými tvoria konštrukčný celok, ktorý je buď v pokoji (napr. mostná konštrukcia), alebo v pohybe (časti strojov, vozidiel atď.). Pritom prostredníctvom vzájomných dotykových plôch prenášajú sily jedna na druhú. Sily, ktorými pôsobia ostatné časti konštrukcie na uvažovanú súčiastku, nazývame vonkajšími silami. Tieto sily môžeme rozdeliť podľa rôznych kritérií na:

a/ objemové sily (hmotové), pôsobiace na každý prvok objemu (ako sú napr. vlastná tiaž telesa, odstredivé sily atď.). Sú to teda sily úmerné veľkosti hmotnosti uvažovaného telesa;

b/ povrchové sily (dotykové) - alebo tiež sily vzájomného pôsobenia - medzi vyšetrovanou súčiastkou a súčiastkami susednými. Pôsobia bezprostredne na povrchu telesa, a to ako akcie a reakcie.

Vonkajšie sily môžeme ďalej roztriediť podľa niektorých príznakov na:

1. osamelé, ak účinok vonkajšej sily sústreďuje sa na veľmi malú plôšku v pomere k celkovým rozmerom telesa. Pri výpočtoch uvažujeme, že takáto sila pôsobí v bode. Táto zjednodušujúca predstava slúži len na uľahčenie výpočtu. Osamelé sily meriame v N (newtonoch) alebo v MN (meganewtonoch);

2. spojité, keď oblasť, ktorou sa prenášajú vonkajšie sily, je dosť veľká. Spojité zaťaženie je rozložené na určitej čiare (ak plocha, na ktorej pôsobí, je dosť úzka v pomere k ostatným rozmerom telesa), alebo na ploche. Vlastná tiaž nosníka predstavuje tiež spojité zaťaženie, rozložené po čiare. Spojité zaťaženie, rozložené po čiare, meriame v jednotkách sily vzťažených na jednotku dĺžky, teda v $MN \cdot m^{-1}$ alebo v $N \cdot mm^{-1}$; zaťaženie rozložené po ploche meriame v jednotkách sily vzťažených na jednotku plochy, teda v $MN \cdot m^{-2}$ alebo v $N \cdot mm^{-2}$.

Zaťaženie možno ďalej deliť na trvalé a dočasné. Prvé pôsobí po celý čas trvania konštrukcie, napr. jej vlastná tiaž a pod. Dočasné zaťaženie pôsobí len nejaký časový úsek, napr. tiaž prechádzajúceho vozidla na moste a pod.

Podľa charakteru pôsobenia možno ešte rozdeliť zaťaženie na statické a dynamické. Statické zaťaženie vzrastá postupne od nuly až na vlastnú, menovitú hodnotu. Pôsobenie dynamických síl vzniká spravidla v krátkej časovej perióde a pritom aj súčiastky, na ktoré dynamické sily pôsobia, sú obyčajne v pohybe.

2.2 VNÚTORNÉ SILY - NAPÄTIE

V statike sa študuje rovnováha síl absolútne tuhého telesa, ktoré v prírode nejestvuje. Prvky konštrukcií menia pôsobením vonkajších síl svoje rozmery a tvar. Tejto zmene sa hovorí deformácia, ktorej veľkosť a charakter súvisí so štruktúrou použitých materiálov. Všetky materiály možno rozdeliť do dvoch skupín:

1. kryštalické,
2. amorfné.

Kryštalické materiály sa skladajú z veľkého počtu malých zŕn. Každé zrno tvorí sústava atómov pravidelne v radoch rozložených, ktoré tvoria tzv. kryštalickú mriežku. Naproti tomu amorfné materiály nemajú pravidelne usporiadané atómy.

Atómy sa udržujú v rovnováhe vzájomne pôsobiacimi silami, tzv. vnútornými silami. Vplyvom vonkajších síl sa vzdialenosti medzi atómami menia (teleso sa deformuje), čo je sprevádzané zmenou vzájomne pôsobiacich síl medzi atómami. V prvkoch konštrukcie vznikajú teda pôsobením vonkajších síl doplnkové vnútorné sily, ktoré pôsobia proti snahe vonkajších síl porušiť konštrukčný prvok, alebo meniť jeho tvar. V ďalšom budeme tieto sily nazývať len vnútornými silami.

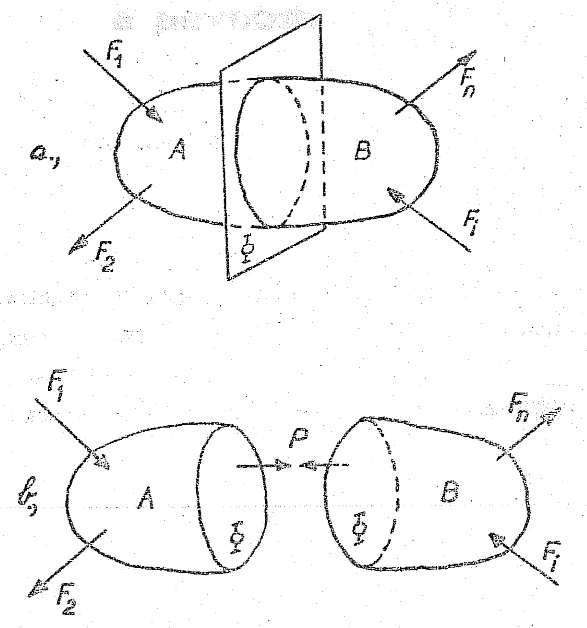
Aby sa dal číselne charakterizovať stupeň účinku vonkajších síl na deformovaný prvok, treba vedieť merať, resp. vypočítať veľkosť vnútorných síl. K tomu sa v pružnosti a pevnosti používa tzv. metóda myslených rezov, a to môže byť:

1. Metóda jedného mysleného rezu, ktorým rozdelíme teleso na dve časti konečnej veľkosti, (vedie k riešeniu rovnice o jednej neznámej).

2. Metóda dvoch veľmi blízko seba ležiacich myslených rezov, (vedie k riešeniu diferenciálnej rovnice prvého rádu).

3. Metóda troch dvojíc myslených rezov, (vedie k riešeniu diferenciálnej rovnice druhého rádu).

Ako prvý prípad uvažujeme teleso zaťažené silami F_1, F_2, ... F_n, ktoré sú v rovnováhe. Myslíme si toto teleso rozdelené ľubovoľnou rovinou Φ na dve časti konečnej veľkosti A a B (obr. 2-1).



Obr. 2-1

Pôsobením vonkajších síl sa oba diely telesa snažia oddeliť a udržujú sa pohromade vzájomnými vnútornými silami, pôsobiacimi medzi atómami, ktoré sú na oboch stranách mysleného rezu. Na obr. 2-1b sú nakreslené výslednice týchto vnútorných síl. Vnútorné sily pôsobiace na časť A od časti B a vnútorné sily pôsobiace na časť B od časti A sa podľa zákona akcie a reakcie sebe rovnajú. Ak má nastať zase rovnováha, musia byť vnútorné sily pôsobiace na časť A v rovnováhe s vonkajšími silami pôsobiacimi na túto časť a rovnako i na časti B. Výslednicu vnútorných síl v myslenom reze určíme teda z podmienok rovnováhy oddelenej časti, a to:

a/ pre priestorové útvary z podmienok:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \quad \text{a} \quad \sum F_z = 0$$

a

$$\sum M_x = 0 \qquad \sum M_y = 0 \quad \text{a} \quad \sum M_z = 0$$

b/ naše úvahy budú sa týkať väčšinou rovinných útvarov, pri ktorých statické podmienky rovnováhy sú:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \quad \text{a} \quad \sum M = 0$$

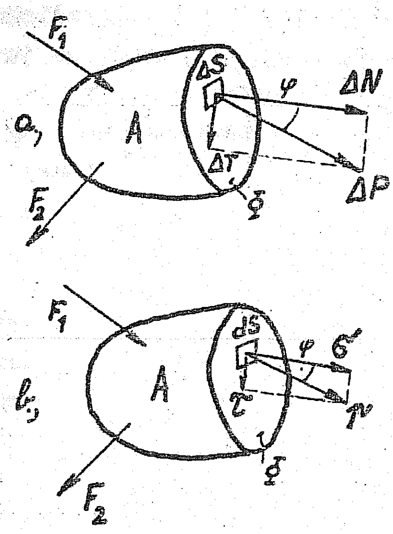
Vnútorné sily sú vo všeobecnosti nepravidelne rozložené po priereze, takže statické podmienky rovnováhy nestačia na určenie rozloženia vnútorných síl. Zo statických podmienok rovnováhy môžeme určiť len výslednicu vnútorných síl. Aby sme mohli lepšie porovnávať účinok vnútorných síl, zavádzame pomer vnútorných síl na jednotku prierezovej plochy, ktorý nazývame napätím.

Vyjmeme si element ΔS plochy Φ, na ktorý pôsobí vnútorná sila ΔP (obr. 2-2a) a rozložme túto silu, ktorá s normálou roviny Φ zviera uhol φ, do normály a tangenty k ploche Φ. Potom podľa obr. 2-2a platí:

$$\Delta N = \Delta P \cdot \cos\varphi$$

$$\Delta T = \Delta P \cdot \sin\varphi$$

Limita pomeru vnútorných síl ΔP, ΔN, ΔT k ploche ΔS sa nazýva napätím, ktorého smer a zmysel sa zhoduje so smerom a zmyslom sily a ktorého rozmer je $N \cdot mm^{-2}$ (príp. $MN \cdot m^{-2}$). Napätie v ďalšom texte budeme označovať písmenami. Označenie p budeme používať pre napätie ľubovoľne sklonené k vyšetrovanej ploške, písmenom σ budeme označovať normálové napätie, ktoré je kolmé na rovinu rezu a písmenom τ šmykové napätie, ktoré leží v rovine rezu (obr. 2-2b).



Obr. 2-2

Jednotlivé napätia definované sú vzťahmi:

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} = \frac{dP}{dS} \qquad /II-1/$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta S} = \frac{dN}{dS} \\ \tau &= \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta S} = \frac{dT}{dS} \end{aligned}\right\} \qquad /II-2/$$

Normálovému napätiu priraďujeme tiež znamienko, a to: kladné, keď zmysel sily ΔN smeruje von z plochy Φ (obr. 2-2), a nazývame ho napätím ťahovým, ak je zmysel sily ΔN opačný, priraďujeme mu znamienko mínus, a takéto napätie nazývame tlakovým.

Na zmysle a smere šmykového napätia obvykle nezáleží, ale len na jeho veľkosti.

Iné napätie, ako ťahové, tlakové alebo šmykové nie je mysliteľné. Pri každom druhu namáhania môžu sa vyskytovať iba tieto napätia, a to alebo každé samostatne, alebo v kombinácii.

Ak do rovnice /II-2/ dosadíme za ΔN a ΔT, dostaneme po úprave

$$\sigma = p \cdot \cos\varphi$$

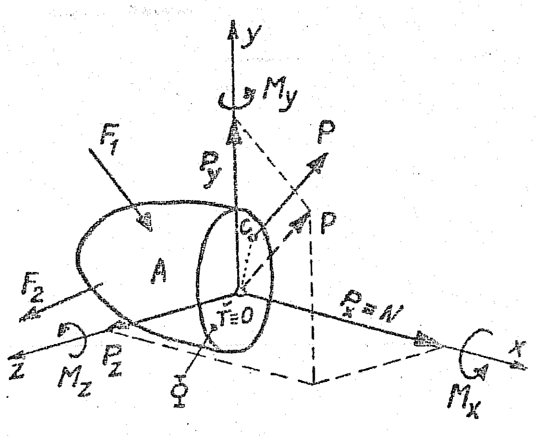
$$\tau = p \cdot \sin\varphi$$

Umocnením a sčítaním týchto dvoch rovníc dostaneme

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \qquad /II-3/$$

2.3 ZÁKLADNÉ DRUHY NAMÁHANIA

Na teleso nech pôsobí všeobecná priestorová sústava síl (obr. 2-1a), ktorá je v rovnováhe. Stanovme ich účinok v ľubovoľnom myslenom reze Φ. Ako sme už v predchádzajúcom hovorili, pôsobí na časť A okrem vonkajších síl i výslednica vnútorných síl P, ktorej pôsobisko je napr. v bode C (obr. 2-3).



Obr. 2-3

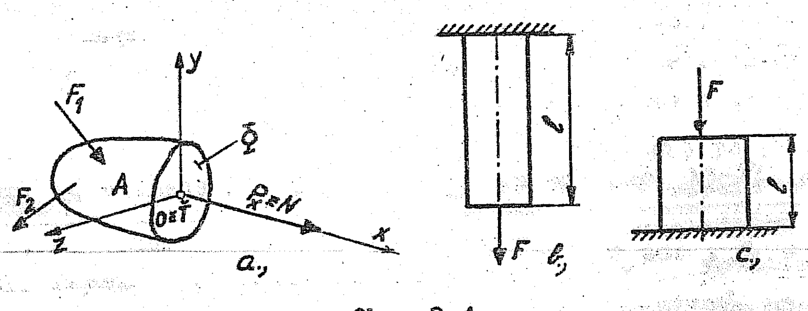
Preložme vnútornú silu P do ťažiska Ť mysleného rezu Φ a rozložíme ju do zložiek súradnicových osí x, y, z, z ktorých os x je kolmá na rez Φ (obr. 2-3). Tieto zložky výslednej vnútornej sily sú na obrázku vyznačené P_x, P_y, P_z.

Ako vieme zo statiky, treba k preloženej sile, resp. k jej zložkám pripojiť ešte dvojicu síl, ktorej zložky do súradnicových osí sú M_x, M_y, M_z.

Ak pôsobí v ťažisku rezu Φ viacej síl a momentov, hovoríme o <u>zloženom (kombinovanom) namáhaní</u>. Ak pôsobí v uvažovanom reze Φ len jedna z uvedených zložiek, hovoríme o <u>jednoduchom (prostom) namáhaní</u>. Podľa toho potom rozoznávame nasledovné jednoduché (prosté, čisté) prípady namáhania:

2.31 Prostý ťah (tlak)

O prostom ťahu alebo tlaku hovoríme vtedy, ak z uvedených zložiek síl a momentov pôsobí len zložka $P_x \equiv N$ (obr. 2-4a).

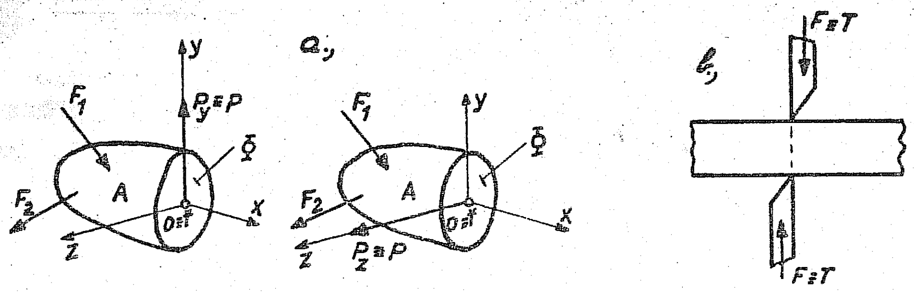


Obr. 2-4

Najjednoduchším prípadom ťahového namáhania je tenká priama tyč, konštantného prierezu, namáhaná podľa obr. 2-4b, osovými silami F. Najjednoduchším prípadom tlakového namáhania je prípad podľa obr. 2-4c.

2.32 Prostý šmyk

O prostom šmyku hovoríme vtedy, ak v myslenom reze Φ pôsobia len zložky P_y a P_z (obr. 2-5a). Výsledná šmyková sila v reze Φ je daná geometrickým súčtom týchto zložiek.

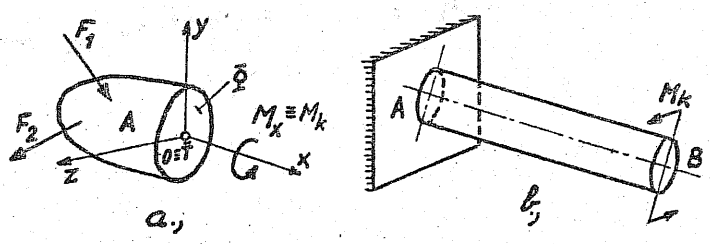


Obr. 2-5

Najjednoduchší prípad namáhania šmykom je na obr. 2-5b.

2.33 Prostý krut

O tomto druhu namáhania hovoríme vtedy, ak v myslenom reze Φ zo všetkých možných zložiek pôsobí len moment $M_x \equiv M_k$, ktorého rovina pôsobenia je v rovine rezu Φ (obr. 2-6a).



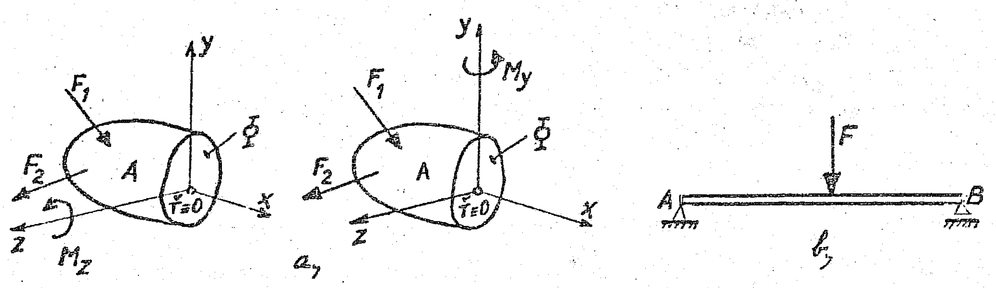
Obr. 2-6

Najjednoduchší prípad tohto druhu namáhania je na obr. 2-6b.

2.34 Prostý prípad ohybu

O prostom ohybe hovoríme vtedy, ak v myslenom reze Φ pôsobí len moment M_y alebo M_z (obr. 2-7a), príp. i obidve zložky súčasne; v takom prípade spravidla ide o tzv. <u>šikmý ohyb</u>.

Najjednoduchší prípad tohto druhu namáhania je nosník zaťažený podľa obr. 2-7b, kde ale okrem ohybového momentu uplatňuje sa aj vplyv priečnej sily.

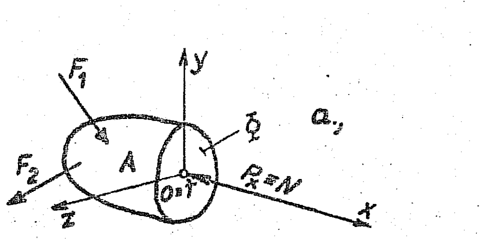


Obr. 2-7

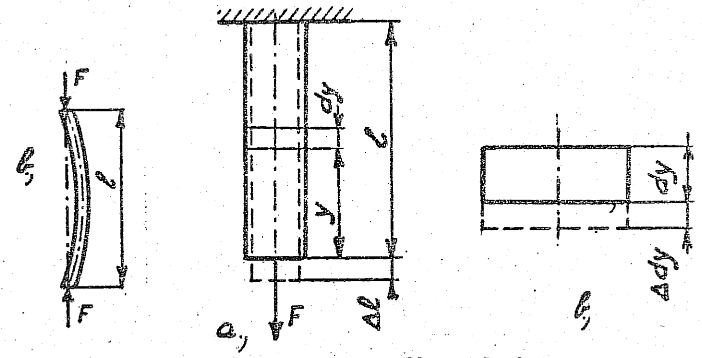
2.35 Vzper

Podobne ako pri prostom tlaku, i v tomto prípade (obr. 2-8a) pôsobí v myslenom reze len sila $P_x \equiv N$.

K namáhaniu na vzper dochádza však vtedy, ak tlakovou silou namáhaná tyč (obr. 2-8b) má priečny prierez oproti dĺžke malý. Takto namáhaná tyč náhle vybočí z osi, prehne sa, až sa zlomí.



Obr. 2-8



Obr. 2.9

2.4 POMERNÉ PREDĹŽENIE

Ak namáhame priamu tyč ťahom podľa obr. 2-9a, pozorujeme, že tyč sa predlžuje.

Uvažujme valček nekonečne malej výšky dy vo vzdialenosti y (obr. 2-9b) od spodného okraja tyče. Zaťažením tyče sa valček posunie a jeho výška sa zväčší o Δdy .

Pomer

$$\varepsilon = \frac{\Delta dy}{dy} \qquad /II-4/$$

nazývame pomerným predĺžením (je to predĺženie pripadajúce na jednotku dĺžky).

Ak je pomerné predĺženie vo všetkých bodoch prierezu a vo všetkých priečnych prierezoch rovnaké, môžeme celkové predĺženie tyče vyjadriť vzťahom

$$\Delta \ell = \int_0^{\ell} \Delta dy = \int_0^{\ell} \varepsilon . dy = \varepsilon . \int_0^{\ell} dy = \varepsilon . \ell \qquad /II-5/$$

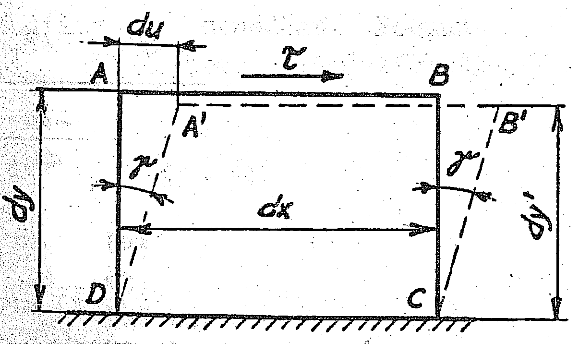
a z toho

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} \qquad /II-6/$$

Ako vidieť z rovnice /II-4/ alebo /II-6/, pomerné predĺženie je veličina bezrozmerná.

2.5 POMERNÉ SKOSENIE

Uvažujme elementárnu časť ABCD s rozmermi dx , dy , dz (obr. 2-10), ktorá sa vplyvom šmykových napätí pretvorí, ako je to na obrázku vyznačené.



Obr. 2-10

Ak je toto pretvorenie malé, môžeme zmenu dĺžky dy zanedbať. Posunutie du môžeme potom vyjadriť vzťahom

$$du = tg\gamma . dy$$

alebo

$$dy' \doteq dy$$

Keďže uhol γ je malý, možno písať

$$tg\gamma \doteq \gamma$$

takže bude:

$$du = \gamma \cdot dy$$

a z toho pomer

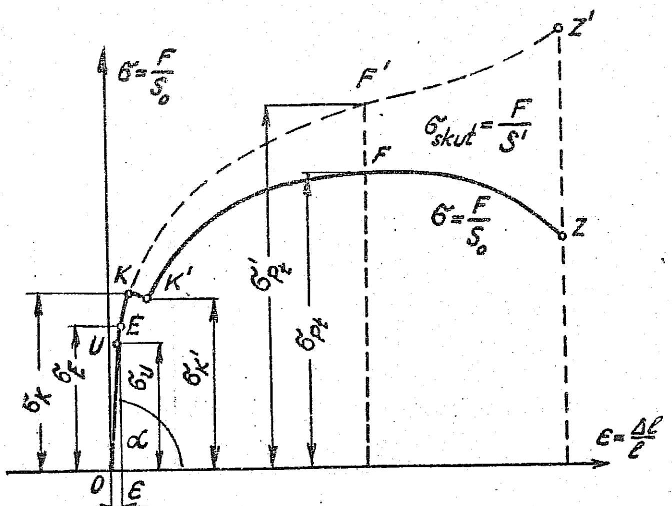
$$\gamma = \frac{du}{dy} \qquad /II-7/$$

nazývame pomerným skosením. Tak ako pomerné predĺženie, je i táto veličina bezrozmerná.

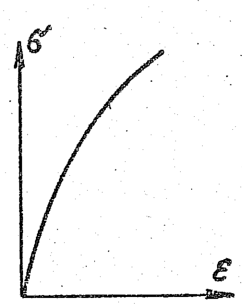
2.6 PRACOVNÝ DIAGRAM MATERIÁLU

(Diagram závislosti napätia a predĺženia)

Informáciu o mechanických vlastnostiach materiálu nám dávajú mechanické skúšky. Jedna z takýchto skúšok je trhacia skúška ťahom. Skúšobná tyč normalizovaného tvaru a rozmerov upne sa do čeľustí trhacieho stroja a postupne plynule sa zaťažuje. Stroj automaticky zaznamenáva veľkosť zaťaženia a príslušné predĺženie skúšobnej tyče. Pri známych rozmeroch skúšobnej tyče (prierez S_o, dĺžka ℓ) možno získať závislosť pomerného predĺženia od napätia.



Obr. 2-11



Obr. 2-12

Na obr. 2-11 je nakreslený diagram napätia a pomerného predĺženia mäkkej konštrukčnej ocele. Z obrázku vidieť, že časť diagramu až po bod U je priamková, čiže napätie je úmerné predĺženiu. Napätie prislúchajúce bodu U nazývame medza úmernosti σ_U. Pri skúške možno nájsť také napätie, po hodnotu ktorého bude mať tyč len pružné deformácie. Toto napätie sa nazýva medza pružnosti σ_E. Bod E leží spravidla vyššie, ale veľmi blízko k bodu U. Pri ďalšom zvyšovaní zaťaženia začne sa v bode K skúšobná tyč predlžovať bez toho, že by napätie stúpalo.

Napätie prislúchajúce bodu K (resp. K') nazývame hornou (resp. spodnou) medzou klzu.

Najväčšia hodnota napätia pri skúške je daná napätím σ_{Pt} - medzou pevnosti. Konečné rozrušenie nastáva však pri napätí, ktoré prislúcha bodu Z. Na obr. 2-11 čiarkovane je vyznačený priebeh tej istej závislosti (napätia a predĺženia), vzťahovaný však na premenlivý prierez.

Na obr. 2-12 je znázornený diagram ťahovej skúšky liatiny. Táto látka má veľmi nízku medzu úmernosti a nemá jasne vyhranenú medzu klzu v ťahu.

2.7 HOOKOV ZÁKON

Ako vidieť už z obr. 2-11, je až do medze úmernosti σ_U mnohých látok priebeh diagramu napätia a predĺženia pre ťah a tlak priamkový. Platí tu potom vzťah

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{konšt} = E = \operatorname{tg}\alpha \qquad /II\text{-}8/$$

alebo

$$\boxed{\sigma = \varepsilon \,.\, E} \qquad \text{t.j.} \qquad \boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E}} \qquad /II\text{-}9/$$

Tento základný zákon pružnosti a pevnosti sa nazýva Hookov zákon.

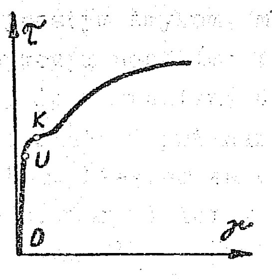
Konštantu E nazývame modul pružnosti v ťahu.

Pretože pomerné predĺženie je závislé od materiálu, je aj modul pružnosti E závislý len od materiálu (je to materiálová konštanta). Pretože pomerné predĺženie je bezrozmerná veličina, má modul pružnosti v ťahu rovnaký rozmer ako napätie, teda

$$[E] = [MN \,.\, m^{-2}] \quad \text{alebo} \quad [N \,.\, mm^{-2}]$$

Hodnota E pre oceľ je $2{,}1 \,.\, 10^5$ MN . m^{-2} = $2{,}1 \,.\, 10^5$ N . mm^{-2}.

Z rovnice /II-8/ vyplýva i význam modulu pružnosti. Je to také (myslené) napätie, ktoré by spôsobilo predĺženie skúšobnej tyče o celú pôvodnú dĺžku ($\varepsilon = 1$).



Obr. 2-13

Ak namáhame nejakú látku prostým šmykom, môžeme skúškami určiť vzťah medzi šmykovým napätím τ a pomerným skosením γ. Na obr. 2-13 je nakreslený diagram konštrukčnej ocele, ktorý bol zistený pri namáhaní tenkostennej rúrky prostým krutom. Diagram sa podobá diagramu skúšok v ťahu a môžeme na ňom vidieť medzu úmernosti τ_U (bod U) a medzu klzu τ_K v šmyku (bod K).

Ako vidieť z diagramu, je závislosť medzi šmykovým napätím τ a uhlovým pretvorením (pomerným sklzom) γ až do bodu U lineárna. Po túto medzu platí teda vzťah

$$\boxed{\tau = G \cdot \gamma} \quad \text{alebo} \quad \boxed{\gamma = \frac{\tau}{G}} \qquad /II\text{-}10/$$

kde G je materiálová konštanta a nazýva sa modul pružnosti v šmyku. Pretože γ je veličina bezrozmerná, má i tento modul (tak ako aj E) rozmer $MN \cdot m^{-2}$ alebo $N \cdot mm^{-2}$. Hodnota tohto modulu pre oceľ je

$$G = 8 \cdot 10^4 \; MN \cdot m^{-2} = 8 \cdot 10^4 \; N \cdot mm^{-2}$$

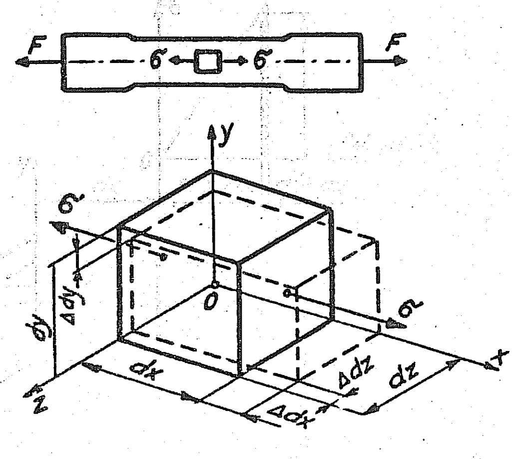
Ak je modul pružnosti určitej látky vo všetkých smeroch rovnaký, hovoríme, že látka je izotropná. Materiály používané v technickej praxi považujeme spravidla za izotropné a homogénne, t.j. také, čo vo všetkých smeroch majú rovnaké vlastnosti.

2.8 PRIEČNE ZÚŽENIE

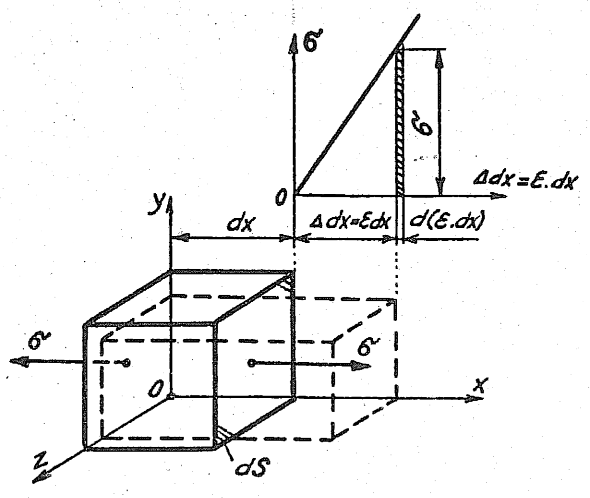
Súčasne s predĺžením skúšobnej tyče v smere osi x objavuje sa skrátenie jej priečnych rozmerov. Toto skrátenie je, ako skúšky ukázali, v rozsahu platnosti Hookovho zákona pri izotropných materiáloch úmerné napätiu σ, a tým i osovému pomernému predĺženiu ε_x. Keď vyjmeme zo skúšobnej tyče elementárny hranolček podľa obr. 2-14, potom budú priečne zúženia v smere y a z

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{\Delta dy}{dy} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma}{m\,E} = -\frac{\mu \cdot \sigma}{E} \\ \varepsilon_z &= \frac{\Delta dz}{dz} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma}{m\,E} = -\frac{\mu \cdot \sigma}{E} \end{aligned}\right\} \qquad /II\text{-}11/$$

Súčiniteľa m nazývame Poissonova konštanta. Niekedy sa používa aj hodnota $\mu = \frac{1}{m}$, ktorú nazývame Poissonovým číslom. Pre oceľ je Poissonova konštanta m = 10/3.



Obr. 2-14



Obr. 2-15

2.9 ENERGIA NAPÄTOSTI

a/ normálových napätí

Pod energiou napätosti rozumieme energiu, ktorá sa akumuluje v pôvodne nezaťaženom telese, keď nadobudne určité pretvorenie, a to od všetkých vnútorných síl, pôsobiacich na nekonečne malé elementy telesa, a táto je čo do veľkosti pri nepohybujúcom sa telese a v medziach pružnosti (t.j. v medziach platnosti Hookovho zákona) rovná práci, vynaloženek vonkajšími silami na pretvorenie. Aby pochod bol zvratný (aby nebolo prírastku pohybovej energie), musia byť vonkajšie a vnútorné sily stále v rovnováhe.

Pretože podľa Hookovho zákona je závislosť medzi napätím a deformáciou lineárna, možno zaťaženie v závislosti od predĺženia znázorniť trojuholníkovým diagramom (obr. 2-15).

Určíme energiu napätosti elementárneho hranolčeka rozmerov dx . dy . dz (obr. 2-15). Podľa definície známej už z fyziky - práca sa rovná

$$W = \int_0^S F \cdot ds$$

(v našom prípade je to deformačná práca vonkajších síl).

Tento vzorec použijeme však i na výpočet energie napätosti. Vnútorná sila pôsobiaca na elementárny hranolček je $F = \sigma \cdot dS$. Keďže ale v našom prípade ide o energiu napätosti elementárneho hranolčeka, budeme písať namiesto W diferenciál energie napätosti dA. Potom dostaneme:

$$dA_\sigma = \int_0^S F \cdot ds = \int_0^{\Delta dx} \sigma \cdot dS \cdot d(\varepsilon\, dx) = \int_0^{\Delta dx} \sigma \cdot dy \cdot dz \cdot d(\varepsilon \cdot dx)$$

Pretože $\sigma = \varepsilon \cdot E$ a dy, dz, dx sú konštanty, môžeme túto rovnicu ďalej upraviť na tvar

$$dA_\sigma = dy \cdot dz \cdot E \int_0^{\varepsilon \cdot dx} \varepsilon \cdot d(\varepsilon \cdot dx) = dy\, dz\, E \frac{1}{dx} \int_0^{\varepsilon \cdot dx} \varepsilon \cdot dx \cdot d(\varepsilon \cdot dx) =$$

$$= \frac{dy\, dz\, E}{dx} \cdot \frac{(\varepsilon \cdot dx)^2}{2} = \frac{1}{2}\, dx\, dy\, dz\, E \cdot \varepsilon^2$$

a po úprave

$$dA_\sigma = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon^2 \cdot E \cdot dV \qquad /II-12/$$

kde $dV = dx\, dy\, dz$ je objem elementu. Pre ďalšie výpočty je však výhodné vzťahovať energiu napätosti na jednotku objemu, ktorú potom nazývame špecifická alebo merná energia napätosti, a označujeme ju A_1. Potom teda

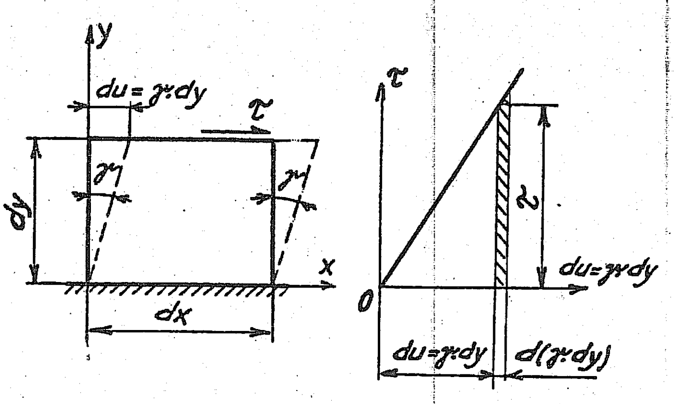
$$A_{1\sigma} = \frac{dA_\sigma}{dV} = \frac{1}{2} E\, \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon \qquad /II-13/$$

Poznámka: Energia napätosti je vždy kladná, i keď ide o namáhanie v tlaku, lebo:

$$\frac{1}{2}(-\sigma)(-\varepsilon) = \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon$$

b/ šmykových napätí

Podobne ako pri energii napätosti normálových napätí, je aj tu, v medziach platnosti Hookovho zákona, závislosť medzi napätím a pretvorením lineárna, takže môžeme zaťaženie v závislosti od posunutia vyjadriť trojuholníkovým diagramom (obr. 2-16).



Obr. 2-16

Postup pri odvodzovaní výrazu pre špecifickú energiu napätosti šmykových napätí je rovnaký, ako v predošlom prípade, a jeho konečný tvar bude

$$A_{1\tau} = \frac{1}{2} G \cdot \gamma^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} = \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma \qquad /II\text{-}14/$$

2.10 MIERA BEZPEČNOSTI A DOVOLENÉ NAMÁHANIE

Medzi veľmi dôležitými údajmi, ktoré nám dáva trhacia skúška v ťahu, je medza klzu a medza pevnosti materiálu. Ak tieto poznáme, môžeme určiť pre každú zvláštnu technickú úlohu veľkosť napätia, ktoré môžeme pokladať za bezpečné. Toto prípustné napätie nazýva sa dovolené namáhanie. Pri voľbe dovoleného namáhania pre oceľ treba si uvedomiť, že túto látku pri napätiach pod medzou úmernosti môžeme považovať za dokonale pružnú a pri napätiach nad touto medzou dochádza k trvalému pretvoreniu. Aby sme teda mali konštrukciu v pružnom stave, volíme dovolené namáhanie pod medzou úmernosti. Pretože zisťovanie tejto medze je dosť obťažné a jej poloha závisí od presnosti merania, berieme pre určenie dovoleného namáhania látky obyčajne medzu klzu alebo medzu pevnosti. Veľkosť dovoleného namáhania potom určujeme podľa rovníc

$$\boxed{\sigma_{dov} = \frac{\sigma_K}{s_K}} \quad a \quad \boxed{\sigma_{dov} = \frac{\sigma_{Pt}}{s_P}} \qquad /II\text{-}15/$$

kde s_K resp. s_P sú miery bezpečnosti vzhľadom na medzu klzu σ_K, resp. na medzu pevnosti σ_{Pt}.

Pri konštrukčných oceliach berieme potom za základ pre výpočet dovoleného namáhania medzu klzu σ_K. Mieru bezpečnosti berieme pritom pri statickom namáhaní $s_K = 1,4 \div 1,6$. Pre krehké materiály (liatina a pod.) berieme za základ na určenie dovoleného namáhania medzu pevnosti σ_{Pt}.

Miera bezpečnosti závisí hlavne na presnosti, s akou poznáme vonkajšie sily pôsobiace na konštrukciu, s akou presnosťou môžeme vypočítať napätie v jednotlivých prvkoch konštrukcie a tiež na homogenite použitých látok. Pre mnoho konštrukcií sú hodnoty miery bezpečnosti určené normami ČSN.

Podľa rovnakých zásad volíme dovolené namáhanie v šmyku

$$\underline{\tau_{dov} = \frac{\sigma_K}{s_K}} \qquad /II-16/$$

Ako ďalej uvidíme, je vzťah medzi σ_{dov} a τ_{dov} určený hypotézami pevnosti.

Je zrejmé, že ak má byť súčiastka bezpečná, potom musí byť splnená podmienka

$$\underline{\sigma_{max} \leqq \sigma_{dov}}$$

alebo

$$\underline{\tau_{max} \leqq \tau_{dov}}$$

čo nazývame <u>podmienkami pevnosti.</u>

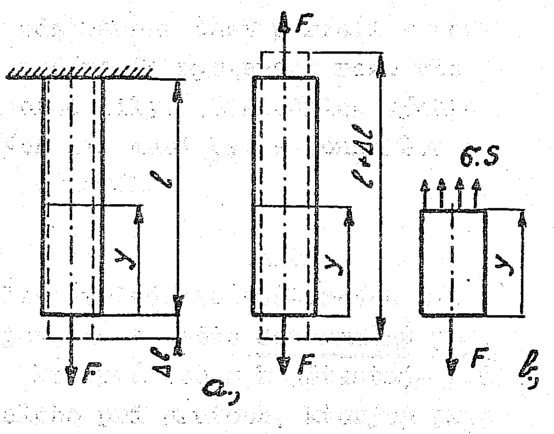
III.

3.0 Úlohy prostého ťahu alebo tlaku

a/ Staticky určité prípady

3.1 NAMÁHANIE OSOVOU SILOU F

Určíme najprv veľkosť napätia v ľubovoľnom reze, kolmom na os tyče, zaťaženej silou F podľa obr. 3-1a. Napätie v ľubovoľnom mieste tyče určíme tak, že tyč v tomto mieste rozrežeme mysleným rezom, kolmým na os tyče, a jednu časť odstránime (obr. 3-1b).



Obr. 3-1

Aby sme odstránenú časť udržali v rovnováhe, musíme do mysleného rezu vložiť vnútorné sily. Výslednica týchto vnútorných síl musí byť s vonkajšou silou v rovnováhe.

Na určenie rozloženia napätí nestačí poznať len výslednicu vnútorných síl, potrebujeme na to ešte deformačnú podmienku. Pri prútoch s konštantným prierezom, alebo pri prútoch, ktorých prierez sa málo mení, sila F usiluje sa tyč predĺžiť tak (deformačná podmienka), aby sledovaný prierez, pôvodne rovinný, ostal rovinný i po deformácii. Z podmienky zachovania rovinnosti prierezu vyplýva, že napätie má konštantnú hodnotu v každom bode prierezu.

Za tohto predpokladu potom podmienka rovnováhy časti tyče (obr. 3-1b), z ktorej určíme veľkosť napätia, bude

$$\sum F_y = 0 \qquad \sigma \cdot S - F = 0$$

a z toho napätie v danom priereze je

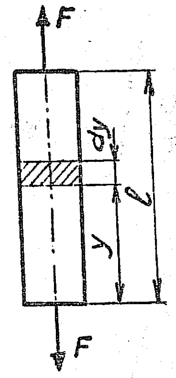
$$\sigma = \frac{F}{S} \tag{III-1}$$

čiže napätie σ je nezávislé od y.

Ďalej určíme celkové predĺženie tejto tyče. Predĺženie elementu dy, vyňatého z ťahanej tyče (obr. 3-2), podľa /II-4/ je

$$\Delta dy = \varepsilon . dy$$

Celkové predĺženie potom bude



Obr. 3-2

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dy = \int_0^l \varepsilon . dy = \int_0^l \frac{\sigma}{E} dy$$

a po dosadení z. σ bude

$$\Delta l = \int_0^l \frac{F}{E S} . dy = \frac{F}{E S} . \int_0^l dy$$

Celkové predĺženie tyče teda bude

$$\Delta l = \frac{F . l}{E S} \qquad /III-2/$$

Energiu napätosti určíme integráciou rovnice /II-12/, do ktorej dosadíme za $dV = S . dy$ a za $\sigma = \dfrac{F}{S}$.

Potom bude

$$A = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{F^2}{S^2 . E} S\, dy = \frac{F^2 . l}{2S . E} \qquad /III-3/$$

3.2 NAMÁHANIE OSOVOU SILOU F PRI SPOLUPÔSOBENÍ VLASTNEJ TIAŽE TYČE

Napätie v ľubovoľnom reze určíme rovnako, ako v predchádzajúcom prípade. Tyč v ľubovoľnom mieste rozrežeme a jednu časť odstránime (obr. 3-3). Ak predpokladáme, že napätie je po priereze rovnomerne rozložené, bude podmienka rovnováhy časti y (obr. 3-3b):

$$\sum F_y = 0 : \qquad \sigma_{(y)}\, S - G_y - F = 0$$

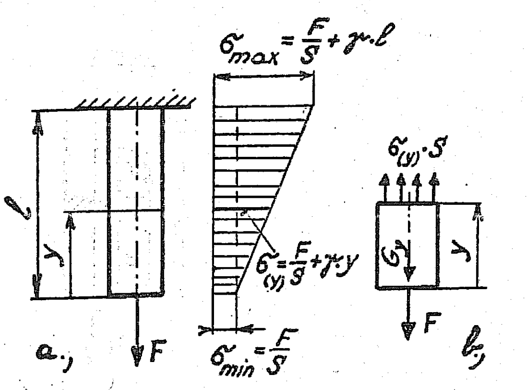
kde $G_y = \gamma . S . y$ je váha časti dĺžky y (a $\gamma = \rho . g$ je merná tiaž).

Po dosadení do podmienky rovnováhy a po úprave dostaneme pre napätie

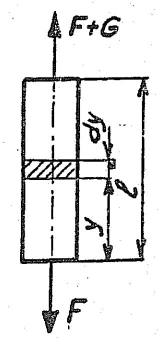
$$\sigma_{(y)} = \frac{F + \gamma . S\, y}{S} \qquad /III\text{-}4/$$

V mieste $y = \ell$ bude napätie najväčšie a rovné

$$\sigma_{max} = \frac{F + \gamma . S . \ell}{S} = \frac{F + G}{S} \qquad /III\text{-}5/$$



Obr. 3-3



Obr. 3-4

Predĺženie elementu dy , vyňatého z ťahanej tyče (obr. 3-4), podľa rovnice /II-4/ je $\Delta dy = \varepsilon . dy$. Celkové predĺženie potom bude

$$\Delta \ell = \int_0^{\ell} \Delta dy = \int_0^{\ell} \varepsilon . dy = \int_0^{\ell} \frac{\sigma_{(y)}}{E}\, dy$$

Po dosadení za $\sigma_{(y)}$ z rovnice /III-4/ potom bude

$$\Delta \ell = \int_0^{\ell} \frac{F + \gamma . S . y}{S\, E}\, dy = \frac{1}{S\, E}\left[F . \int_0^{\ell} dy + \gamma . S . \int_0^{\ell} y . dy \right]$$

a po integrácii dostaneme

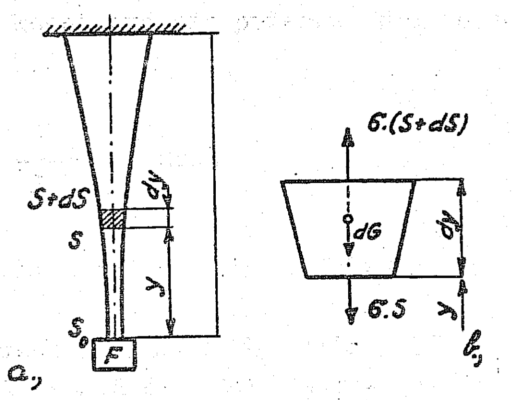
$$\Delta \ell = \frac{F . \ell}{E . S} + \frac{\gamma . \ell^2}{2\, E} \qquad /III\text{-}6/$$

Energiu napätosti vypočítame integráciou rovnice /II-12/, do ktorej dosadíme za $dV = S . dy$ a za $\sigma = \sigma_{(y)}$, ktoré je definované rovnicou /III-4/. Potom po úprave dostaneme

$$A = \frac{1}{2\,E\,S}\left[F^2\ell + F.\gamma S\ell^2 + \frac{\gamma^2 . S^2\ell^3}{3}\right]$$

3.3 TYČ ROVNAKÉHO NAPÄTIA

Úlohou tu je určiť veľkosť prierezov v ľubovoľných miestach tyče, zaťaženej silou F pri spolupôsobení vlastnej tiaže tyče (obr. 3-5a). Napätie, ktoré musí byť teraz v každom mieste rovnaké, je vyvolané jednak silou F, jednak vlastnou tiažou tyče pod uvažovaným prierezom.



Obr. 3-5

Na spodnom konci tyče je prierez S_0, preto napätie bude

$$\sigma = \frac{F}{S_0} = \text{konšt}$$

Aby sme mohli určiť prierez v ľubovoľnom mieste y, vyjmeme z tyče vo vzdialenosti y element s výškou dy (obr. 3-5b) a váhou $dG = \gamma . S\,dy$, kde $\gamma = \varrho . g$ je merná tiaž.

Za predpokladu rovnomerného rozdelenia napätí po priereze bude podmienka rovnováhy

$$\sum F_y = 0 : \qquad \sigma.(S + dS) - \sigma.S - dG = 0$$

Po dosadení a úprave bude

$$\sigma . dS = \gamma . S\,dy$$

Ak je $\sigma \neq 0$ a $S \neq 0$, potom po separácii premenných dostaneme:

$$\frac{dS}{S} = \frac{\gamma}{\sigma}\,dy$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice dostaneme prierez S ako funkciu y, t.j.:

$$\lg S = \frac{\gamma}{\sigma}\, y + C$$

Integračnú konštantu C určíme z okrajovej podmienky, a to pre $y = 0$ je $S = S_o$. Ak túto okrajovú podmienku dosadíme do poslednej rovnice, dostaneme

$$\lg S_o = C$$

Po dosadení za C do riešenia diferenciálnej rovnice bude

$$\lg S = \frac{\gamma}{\sigma}\, y + \lg S_o$$

alebo

$$\lg \frac{S}{S_o} = \frac{\gamma}{\sigma}\, y$$

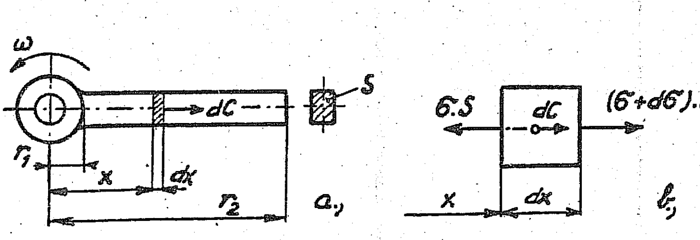
a po odlogaritmovaní a úprave dostaneme prierez v mieste y v tvare

$$S = S_o \cdot e^{\frac{\gamma}{\sigma} y} \qquad /III-7/$$

Z podmienky, že $\sigma \neq 0$ vyplýva, že tyč konštantného napätia musí byť na voľnom konci zaťažená.

3.4 ROTUJÚCE RAMENO KONŠTANTNÉHO PRIEREZU

Pre výpočet napätia si z rotujúceho ramena na obr. 3-6a vyjmeme elementárnu časť dĺžky <u>dx</u>.



Obr. 3-6

Na tento element (obr. 3-6b) pôsobí okrem vnútorných síl aj odstredivá sila elementu <u>dC</u>.

Napätie určíme z podmienky rovnováhy elementu do osi x, a to:

$$\sum F_x = 0: \qquad -\sigma . S + dC + (\sigma + d\sigma) . S = 0$$

a po úprave bude

$$d\sigma = -\frac{dC}{S}$$

kde dC je odstredivá sila elementu a je $dC = \frac{\gamma}{g} S . dx . \omega^2 x$ a $\gamma =$ $= \rho g$ je merná tiaž.

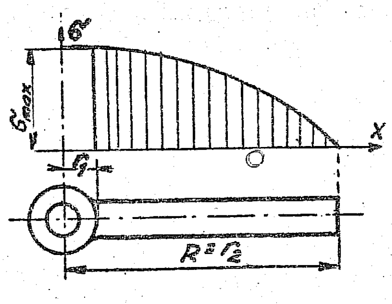
Po dosadení bude

$$d\sigma = -\frac{\gamma}{g} \omega^2 x \, dx$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice dostaneme:

$$\sigma = -\frac{\gamma}{2g} \omega^2 . x^2 + C_1$$

Integračnú konštantu C_1 určíme z okrajovej podmienky pre nezaťažený okraj, t.j. pre $x = r_2$ je $\sigma = 0$.



Obr. 3-7

Dosadením tejto okrajovej podmienky do predošlej rovnice dostaneme:

$$C_1 = \frac{\gamma}{g} \omega^2 \frac{r_2^2}{2}$$

Potom napätie v mieste x rotujúceho ramena bude

$$\sigma = \frac{\gamma}{2g} . \omega^2 . (r_2^2 - x^2) \qquad /III-8/$$

Rovnica /III-8/ je rovnicou paraboly (obr. 3-7) s vrcholom v mieste $x = 0$. Maximálne napätie v ramene bude, ako to vidieť z obrázku, v mieste prechodu ramena do náboja (t.j. pre $x = r_1$) a bude sa rovnať

$$\sigma_{max} = \left[\sigma\right]_{x = r_1} = \frac{\gamma}{2g} \omega^2 . (r_2^2 - r_1^2) \qquad /III-9/$$

Celkové predĺženie ramena určíme použitím rovnice /II-5/ a bude:

$$\Delta r = \int_{r_1}^{r_2} \Delta dx = \int_{r_1}^{r_2} \varepsilon . dx = \frac{1}{E} . \int_{r_1}^{r_2} \sigma . d\,x$$

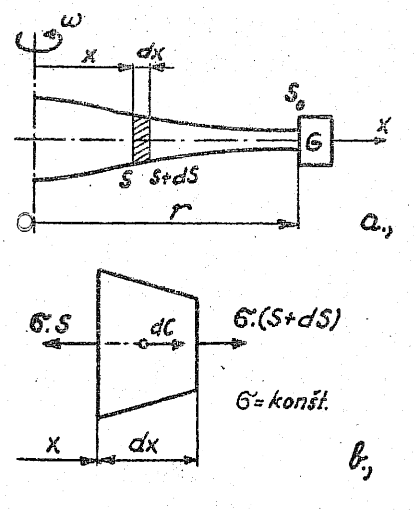
Keď za σ dosadíme rovnicu /III-8/, dostaneme:

$$\Delta r = \frac{\gamma}{2\,g\,E}\,\omega^2 . \int_{r_1}^{r_2} (r_2^2 - x^2) = \frac{\gamma}{2\,g\,E}\,\omega^2 . \frac{2r_2^3 - 3r_2^2 r_1 + r_1^3}{3}$$

/III-10/

3.5 ROTUJÚCE RAMENO ROVNAKÉHO NAPÄTIA

Na určenie veľkosti prierezov v ľubovoľných miestach, kolmých na os ramena (obr. 3-8a), vyjmeme element dĺžky dx (obr. 3-8b).



Obr. 3-8

Ak predpokladáme, že napätie je po prierez rovnomerne rozložené, podmienka rovnováhy v smere osi x bude

$$\sum F_x = 0 : \quad \sigma.(S + dS) - \sigma.S + dC = 0$$

kde dC je odstredivá sila elementu a je

$$dC = \frac{\gamma}{g}\, S \,.\, dx \,.\, x \,.\, \omega^2$$

a $\gamma = \varrho . g$ je merná tiaž.

Ak je $\sigma \neq 0$ a $S \neq 0$, potom po dosadení za dC a separácii premenných dostaneme z rovnice rovnováhy

$$\frac{dS}{S} = - \frac{\gamma . \omega^2}{g . \sigma}\, x\, dx$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice dostaneme prierez S ako funkciu x

$$\lg S = - \frac{\gamma . \omega^2}{2\,g\,\sigma}\, x^2 + C_1$$

Integračnú konštantu C_1 určíme z okrajovej podmienky, a to pre $x = r$ je $S = S_o$. Ak túto okrajovú podmienku dosadíme do riešenia diferenciálnej rovnice, dostaneme z toho

$$C_1 = \lg S_o + \frac{\gamma \cdot \omega^2}{2 g \sigma} r^2$$

Po dosadení za C_1 do riešenia diferenciálnej rovnice dostaneme po úprave

$$\lg \frac{S}{S_o} = \frac{\gamma \cdot \omega^2}{2 g \sigma} (r^2 - x^2)$$

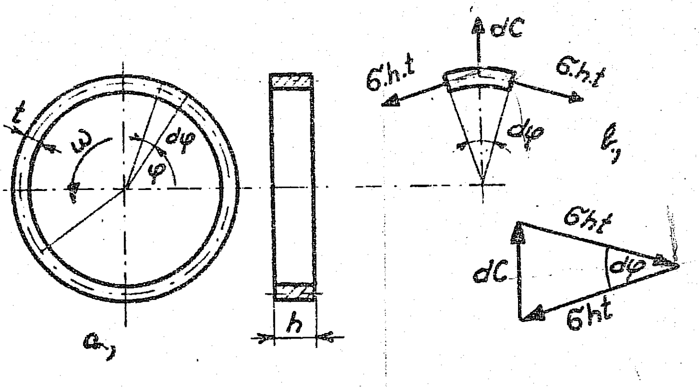
a po odlogaritmovaní a úprave

$$S = S_o \cdot e^{\frac{\gamma \cdot \omega^2}{2 g \sigma}(r^2 - x^2)} \qquad /III-11/$$

Z podmienky $\sigma \neq 0$ vyplýva, že rameno konštantného napätia musí byť na voľnom konci zaťažené, napr. odstredivou silou časti venca a pod.

3.6 ROTUJÚCI VENIEC

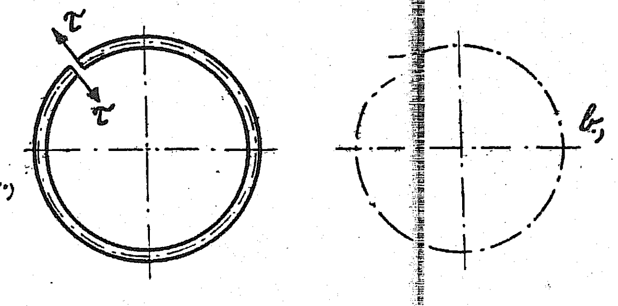
V praxi veľmi často treba určiť napätie v otáčajúcom sa venci uhlovou rýchlosťou ω (obr. 3-9a). Napätie určíme z rovnováhy síl na vyňatom elemente (obr. 3-9b).



Obr. 3-9

Vo venci vznikne len normálne napätie v smere obvodu (obr. 3-9b), čo vyplýva z nasledovnej úvahy: Ak by na element pôsobili aj šmykové napätia (obr. 3-10a), vyvolali by deformácie podľa obr. 3-10b. Z obr. 3-10b vidieť, že deformácia je nespojitá, preto musí byť šmykové napätie $\tau = 0$.

Normálne napätie σ predpokladáme rovnomerne rozložené po hrúbke t. Tento predpoklad dobre súhlasí so skutočnosťou len pri tenkostenných vencoch.



$m r \omega^2$

Obr. 3-10

$\rho \quad \frac{\rho . g}{g} = \gamma$

Podľa obr. 3-9b z rovnováhy síl môžeme napísať rovnicu

$$dC = \sigma . h . t . d\varphi$$

$F = m a = \rho S . dx \, \omega^2 x$

kde dC je odstredivá sila elementu a je $dC = \frac{\gamma}{g} r^2 . \omega^2 . t . h . d\varphi$, a $\gamma = \rho . g$ je merná tiaž. Po dosadení za dC do poslednej rovnice a po úprave bude

$\rho . V . \omega^2 x$

$$\sigma = \frac{\gamma . r^2 \omega^2 t \, h \, d\varphi}{g \, h \, t \, d\varphi} = \frac{\gamma}{g} r^2 . \omega^2 = \frac{\gamma}{g} v^2 \qquad /III-12/$$

kde $v = r . \omega$ je obvodová rýchlosť venca.

Ako vidieť, v rovnici /III-12/ nevystupuje plocha prierezu. Zníženie napätia možno teda dosiahnuť len znížením obvodovej rýchlosti alebo mernej tiaže, nie však zväčšením prierezu prstenca.

Pomerné roztiahnutie v smere obvodu $\varepsilon_t = \frac{\sigma}{E}$ je dané zväčšením polomeru venca o Δr. Teda

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}$$

ale aj

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\sigma}{E}$$

a z toho potom zväčšenie polomeru bude

$$\Delta r = \frac{\sigma}{E} r = \frac{\gamma . v^2}{g . E} r \qquad /III-13/$$

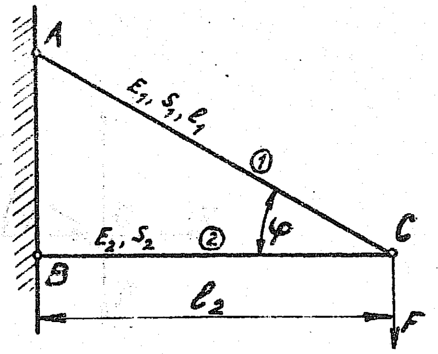
3.7 PRÚTOVÉ SÚSTAVY STATICKY URČITÉ

Prútovou sústavou nazývame takú sústavu priamych tenkých prútov, o ktorých možno predpokladať, že sú na koncoch kĺbove uložené, takže každý prút je namáhaný len osovou silou, pretože ideálne kĺby (bez trenia) neprenášajú do prúta žiadne momenty. Skutočné prútové sústavy so zvarovanými alebo nitovými styčnými bodmi sa ideálnej prútovej sústave viac-menej len približujú, a to tým viac, čím sú prúty štíhlejšie a spojenie styčných bodov je menej tuhé. Prúty, ktoré sú namáhané na tlak, nesmú byť však príliš štíhle, aby nenastalo ich vybočenie (namáhanie na vzper).

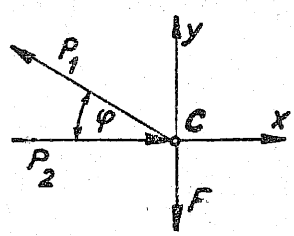
Sily v jednotlivých prútoch staticky určitej prútovej sústavy určíme z rovnováhy uvoľnených styčných bodov, pričom účinok prútov nahradíme silami. Ak poznáme sily v jednotlivých prútoch, môžeme predĺženie, resp. skrátenie prútov jednoducho určiť. Určiť pretvorenie prútovej sústavy z vypočítaných predĺžení, resp. skrátení jednotlivých prútov je už geometrická záležitosť.

Príklad 1:

Určiť osové sily v prútoch, zvislé a vodorovné posunutie bodu C prútovej sústavy (obr. 3-11), zaťaženej silou F, ak vlastnú tiaž prútov neuvažujeme.



Obr. 3-11



Obr. 3-12

Z podmienok rovnováhy uvoľneného kĺbu C (obr. 3-12) určíme sily P_1 a P_2.

$$\sum F_x = 0: \qquad P_2 - P_1 \cos\varphi = 0$$

$$\sum F_y = 0: \qquad F - P_1 \sin\varphi = 0$$

Z toho potom:

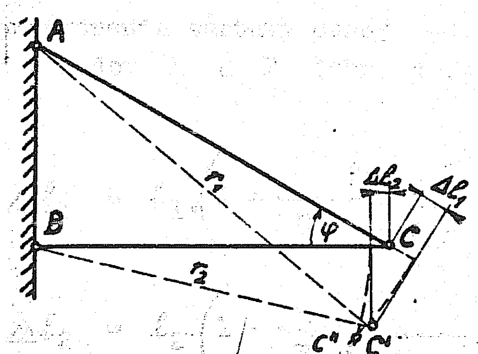
$$P_1 = \frac{F}{\sin\varphi} \quad \text{a} \quad P_2 = \frac{F}{\operatorname{tg}\varphi}$$

kde sila P_1 je ťahová a P_2 tlaková.

Predĺženie, /resp. /skrátenie prútov určíme podľa rovnice /III-2/:

$$\Delta\ell_1 = \frac{P_1\,\ell_1}{E_1\,S_1} = \frac{F\,\ell_1}{E_1\,S_1\sin\varphi}$$

$$\Delta\ell_2 = \frac{P_2\,\ell_2}{E_2\,S_2} = \frac{F\,\ell_2}{E_2\,S_2\operatorname{tg}\varphi}$$



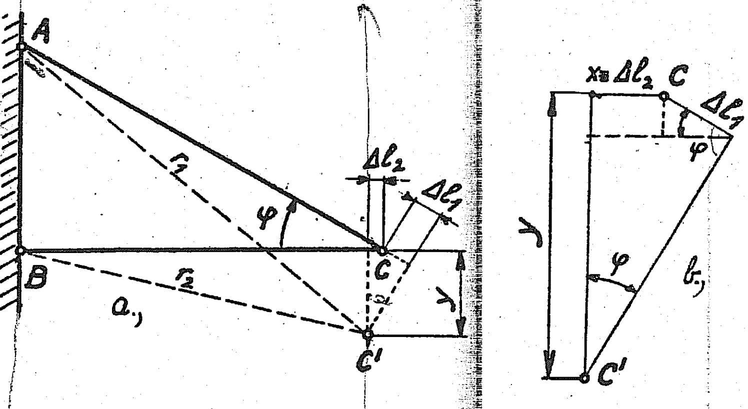
Obr. 3-13

Na určenie pretvorenia sústavy stačí opísať kružnice z bodov A a B (obr. 3-13) s polomermi

$$r_1 = \ell_1 + \Delta\ell_1 = \ell_1\left(1 + \frac{F}{E_1\,S_1\sin\varphi}\right)$$

$$r_2 = \ell_2 - \Delta\ell_2 = \ell_2\left(1 - \frac{F}{E_2\,S_2\operatorname{tg}\varphi}\right)$$

Keďže deformácie sú väčšinou veľmi malé, môžeme kružnice nahradiť dotyčnicami, kolmými na prúty nedeformovanej sústavy (obr. 3-13, resp. obr. 3-14a).



Obr. 3-14

Podľa obr. 3-14b potom pre zvislé a vodorovné posunutie bodu C platí

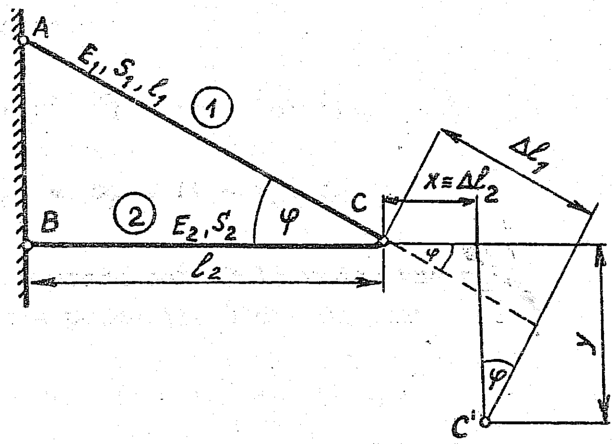
$$x \equiv \Delta\ell_2 = \frac{F\,\ell_2}{E_2\,S_2\operatorname{tg}\varphi} \qquad \text{/III-14/}$$

$$y = \Delta \ell_1 \cdot \sin\varphi + \frac{\Delta \ell_2 + \Delta \ell_1 \cos\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} =$$

$$= \frac{F\ell_1}{E_1 S_1 \sin^2\varphi} + \frac{F\ell_2}{E_2 S_2 \operatorname{tg}^2\varphi} \qquad /III-15/$$

Príklad 2:

Vyšetríme vodorovné a zvislé posunutie bodu C (obr. 3-15) prútovej sústavy, ak ju ohrejeme z teploty t_o na t.



Obr. 3-15

Prúty 1 a 2 sa pritom predĺžia o hodnoty

$$\Delta\ell_1 = \alpha_1 \cdot (t - t_o) \cdot \ell_1$$

$$\Delta\ell_2 = \alpha_2 \cdot (t - t_o) \cdot \ell_2$$

Potom podľa obr. 3-15 vodorovné a zvislé posunutia bodu C budú

$$x = \alpha_2 \cdot (t - t_o)\, \ell_2 \equiv \Delta\ell_2 \qquad /III-16/$$

$$y = \frac{\dfrac{\Delta\ell_1}{\cos\varphi} - \Delta\ell_2}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\alpha_1 \cdot (t - t_o)\,\ell_1}{\sin\varphi} - \frac{\alpha_2 \cdot (t - t_o)\,\ell_2}{\operatorname{tg}\varphi} \qquad /III-17/$$

Dá sa ľahko dokázať, že ohriatím staticky určitej prútovej sústavy nevzniknú v prútoch osové sily.

b/ Staticky neurčité prípady

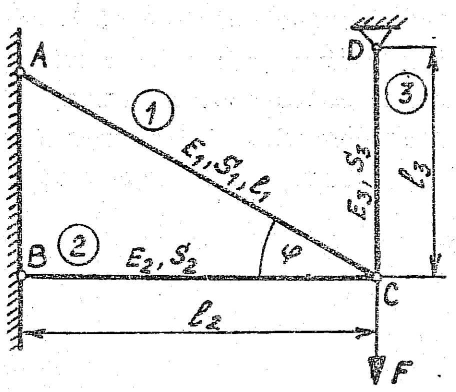
3.8 PRÚTOVÉ SÚSTAVY STATICKY NEURČITÉ

Prútové sústavy, pri ktorých nemožno určiť osové sily v prútoch len zo statických podmienok rovnováhy, nazývame staticky neurčité. Na určenie osových síl takýchto sústav treba okrem podmienok rovnováhy ešte ďalšie, doplňujúce rovnice, ktoré nájdeme vyšetrením deformácií, vzniklých v konštrukcii. Musíme vyhľadať vždy toľko doplňujúcich rovníc, aby celkový počet rovníc s podmienkami rovnováhy rovnal sa počtu neznámych.

Pri riešení takejto sústavy postupujeme tak, že konštrukciu premeníme (nahradíme) na základný staticky určitý systém, ktorý nesmie byť labilný (t.j. nesmie vzniknúť kritická forma väzby), pričom účinok odstránených častí konštrukcie nahradíme silami. Ďalej vyšetríme pretvorenie základného staticky určitého systému a odstránených prútov. Toto pretvorenie musí spĺňať podmienky súmiestnosti, čiže kompatibility sústavy; to znamená, že sa neporuší spojenie konštrukcie.

Príklad 1:

Treba určiť osové sily v prútoch prútovej sústavy (obr. 3-16), zaťaženej silou F.



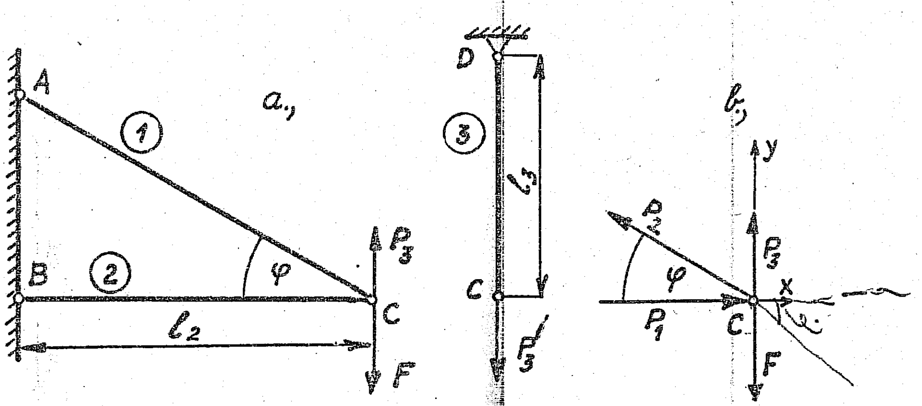
Obr. 3-16

Ako základnú, staticky určitú sústavu zvoľme si sústavu podľa obr. 3-17a, pričom účinok odstráneného prúta 3 nahradíme silou P_3. Z podmienok rovnováhy uvoľneného kĺbu C (obr. 3-17b) dostaneme dve rovnice:

$$\sum F_x = 0: \quad P_1 - P_2 \cos\varphi = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0: \quad P_3 + P_2 \sin\varphi - F = 0 \qquad (2)$$

Ďalej vyšetríme pretvorenie základného, staticky určitého systému a odstráneného prúta.



Obr. 3-17

Podľa obr. 3-18 zníženie bodu C ako spoločného kĺbu prútov 1 a 2 určíme podľa rovnice /III-15/, do ktorej dosadíme miesto sily F silu $(F - P_3)$. Potom bude:

$$y = \frac{(F - P_3)\,\ell_1}{E_1\,S_1\,\sin^2\varphi} + \frac{(F - P_3)\,\ell_2}{E_2\,S_2\,\mathrm{tg}^2\varphi}$$

Koncový bod prúta 3 účinkom sily P_3 sa posunie (predĺženie prúta 3) o hodnotu

$$\Delta\ell_3 = \frac{P_3\,.\,\ell_3}{E_3\,S_3}$$

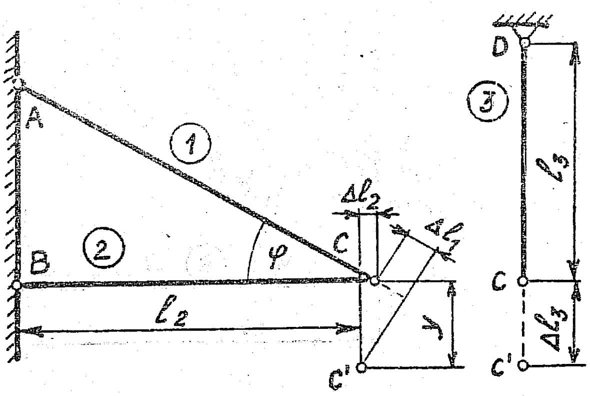
Z podmienky kompatibility sústavy (obr. 3-18) vyplýva

$$y = \Delta\ell_3$$

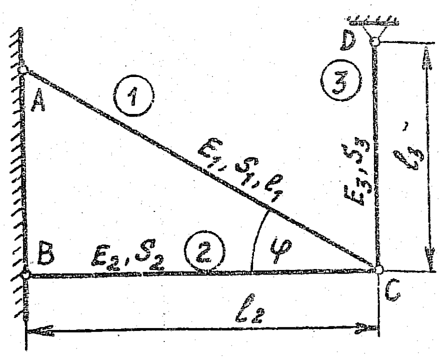
a po dosadení dostaneme

$$\frac{(F - P_3).\ell_1}{E_1\,S_1\,\sin^2\varphi} + \frac{(F - P_3).\ell_2}{E_2\,S_2\,\mathrm{tg}^2\varphi} = \frac{P_3\,.\,\ell_3}{E_3\,S_3} \qquad (3)$$

tretiu doplňujúcu rovnicu. To znamená, že rovnice (1) , (2) , (3) tvoria sústavu troch rovníc o troch neznámych, riešením ktorých zistíme osové sily v prútoch prútovej sústavy z obr. 3-16.



Obr. 3-18



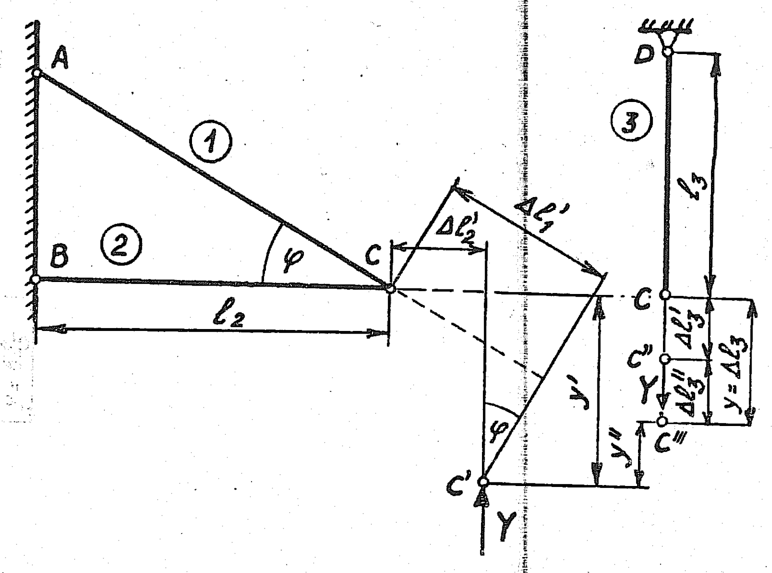
Obr. 3-19

<u>Príklad 2:</u>

Treba určiť osové sily v prútoch prútovej sústavy (obr. 3-19), keď túto ohrejeme z teploty t_o na teplotu t .

Staticky neurčitá prútová sústava má tú zvláštnosť, ktorou sa líši od staticky určitých sústav, že vplyvom ohriatia niektorého prúta, alebo aj rovnomerným ohriatím celej sústavy vzniknú v nej osové sily, zatiaľ čo pri staticky určitých sústavách sa ohriatím mení len jej tvar.

Najprv určíme pretvorenie základného, staticky určitého systému, ktorý volíme rovnaký, ako v predchádzajúcom príklade, teda podľa obr. 3-20.



Obr. 3-20

Predĺženie jednotlivých prútov sústavy len od samotného ohriatia bude:

$$\Delta\ell_1' = \alpha_1(t - t_0).\ell_1 \; ; \qquad \Delta\ell_2' = \alpha_2(t - t_0).\ell_2 \; ;$$

$$\Delta\ell_3' = \alpha_3(t - t_0).\ell_3$$

Potom zvislé posunutie bodu C ako spoločného kĺbu prútov 1 a 2 do polohy C′ určíme z rovnice /III-17/ už prv odvodenej

$$y' = \frac{\alpha_1 . (t - t_0) . \ell_1}{\sin \varphi} - \frac{\alpha_2 . (t - t_0) . \ell_2}{\operatorname{tg} \varphi}$$

Bod C ako koncový bod prúta 3 vplyvom ohriatia klesne do polohy C″ o hodnotu $\Delta\ell_3' = \alpha_3 . (t - t_0) . \ell_3$.

Všetky tri prúty musia sa stretnúť v bode C‴, aby však k tomu došlo, musí sa bod C′, spoločný kĺb prútov 1 a 2, vplyvom staticky neurčitej, zatiaľ neznámej sily Y (nahradzujúcej účinok odstráneného prúta 3) posunúť o y″, a koncový bod C″ prúta 3 účinkom tej istej sily Y (nahradzujúcej teraz zase účinok odstránených prútov 1 a 2) klesnúť o

$$\Delta\ell_3'' = \frac{Y . \ell_3}{E_3 S_3}$$

Hodnotu y'' určíme podľa rovnice /III-15/, rovnako ako pri staticky určitej prútovej sústave, teraz však namiesto sily F, zaťaženej silou Y, (sila Y je ale orientovaná opačne, ako sila F), a tak bude

$$y'' = \frac{-Y \cdot \ell_1}{E_1\, S_1 \sin^2\varphi} + \frac{Y \cdot \ell_2}{E_2\, S_2\, tg^2\varphi}$$

Výsledné posunutie bodu C ako spoločného kĺbu prútov 1 a 2 (obr. 3-20) potom bude

$$y = y' - y'' = \frac{\alpha_1(t - t_o)\,\ell_1}{\sin\varphi} - \frac{\alpha_2(t - t_o)\,\ell_2}{tg\,\varphi} -$$

$$- \frac{Y\,\ell_1}{E_1\, S_1 \sin^2\varphi} + \frac{Y\,\ell_2}{E_2\, S_2\, tg^2\varphi}$$

a výsledné predĺženie prúta 3 (obr. 3-20) bude

$$\Delta\ell_3 = \Delta\ell_3' + \Delta\ell_3'' = \alpha_3 \cdot (t - t_o) \cdot \ell_3 + \frac{Y \cdot \ell_3}{E_3\, S_3}$$

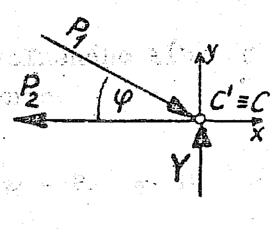
Aby sa v bode C''' stretli koncové body všetkých troch prútov, t.j. aby bola splnená podmienka kompatibility sústavy (obr. 3-20), musí byť

$$y = \Delta\ell_3$$

Po dosadení dostaneme

$$\frac{\alpha_1(t - t_o)\,\ell_1}{\sin\varphi} - \frac{\alpha_2(t - t_o)\,\ell_2}{tg\,\varphi} - \frac{Y \cdot \ell_1}{E_1\, S_1 \sin^2\varphi} +$$

$$+ \frac{Y \cdot \ell_2}{E_2\, S_2\, tg^2\varphi} = \alpha_3(t - t_o)\,\ell_3 + \frac{Y \cdot \ell_3}{E_3\, S_3} \qquad (1)$$



Obr. 3-21

Z podmienok rovnováhy uvoľneného kĺbu C (obr. 3-21) dostaneme ďalšie dve rovnice

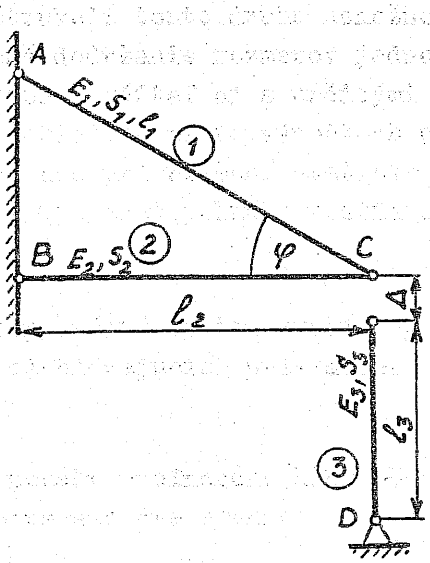
$$\sum F_x = 0 : \quad P_1 \cos\varphi - P_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad Y - P_1 \sin\varphi = 0 \qquad (3)$$

Rovnice ①, ②, ③ tvoria sústavu troch rovníc s tromi neznámymi a riešením týchto rovníc dostaneme hľadané osové sily v prútoch sústavy podľa obr. 3-19, vyvolané len jej ohriatím.

Príklad 3:

Treba určiť osové sily v prútoch sústavy (obr. 3-22), keď prút 3 je kratší o hodnotu Δ od požadovanej dĺžky ℓ_3.



Obr. 3-22

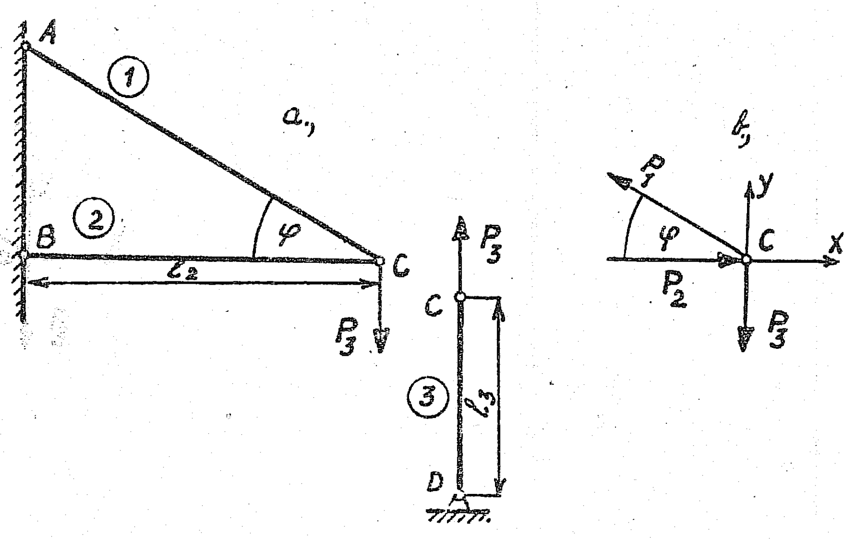
Pri výrobe konštrukcií tohto druhu nemožno zabezpečiť presné dodržanie rozmerov jednotlivých častí, treba počítať aj s určitými odchýlkami. Pri zohľadňovaní vo výpočtoch postup je rovnaký, ako pri riešení staticky neurčitých úloh za vplyvu tepelného roztiahnutia.

Základný staticky určitý systém zvolíme podobne, ako v predchádzajúcich príkladoch (obr. 3-23).

Z podmienok rovnováhy uvoľneného kĺbu C (obr. 3-23b) dostaneme dve rovnice

$$\sum F_x = 0 : \quad P_2 - P_1 \cos\varphi = 0 \qquad ①$$

$$\sum F_y = 0 : \quad P_1 \sin\varphi - P_3 = 0 \qquad ②$$



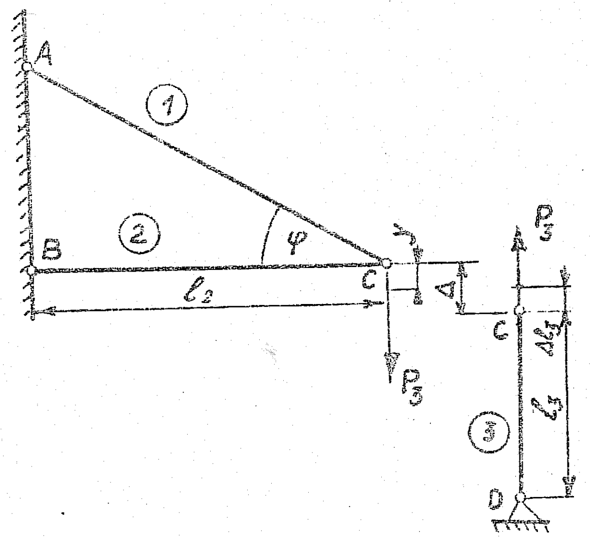
Obr. 3-23

Zníženie spoločného kĺbu C (obr. 3-24) určíme podľa rovnice /III-15/, do ktorej teraz namiesto sily F dosadíme silu P_3. Potom bude

$$y = \frac{P_3 \cdot \ell_1}{E_1 S_1 \sin^2 \varphi} + \frac{P_3 \cdot \ell_2}{E_2 S_2 \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

Predĺženie prúta 3 účinkom sily P_3 bude

$$\Delta \ell_3 = \frac{P_3 \cdot \ell_3}{E_3 S_3}$$



Obr. 3-24

Z podmienky kompatibility sústavy (obr. 3-24) vyplýva

$$|y| + |\Delta \ell_3| = \Delta$$

a po dosadení bude

$$\frac{P_3 \cdot \ell_1}{E_1 S_1 \sin^2 \varphi} + \frac{P_3 \cdot \ell_2}{E_2 S_2 \operatorname{tg}^2 \varphi} + \frac{P_3 \cdot \ell_3}{E_3 S_3} = \Delta \qquad (3)$$

Rovnice (1), (2), (3) tvoria sústavu troch rovníc s tromi neznámymi a ich riešením dostaneme osové sily P_1, P_2 a P_3, pôsobiace v prútoch sústavy, vyvolané nepresnosťou jej výroby.

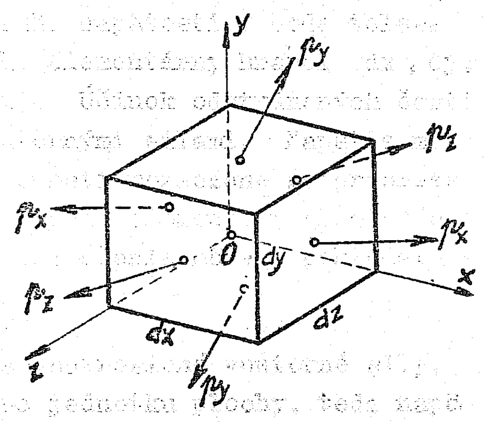
IV.

4.0 Napätosť v bode telesa

Napätosť je mechanický stav telesa, spôsobený súhrnom napätí, vyvolaných všetkými silami, ktoré naň pôsobia. Napätosťou v určitom bode telesa nazývame súhrn všetkých napätí v rovinách, ktoré možno daným bodom preložiť. Ako si v ďalšom ukážeme, je napätosť v bode dokonale určená, ak poznáme napätia, pôsobiace v rovinách elementárneho hranolčeka.

Napätosť vo všeobecnosti delíme na:

1. priestorovú (trojosovú) napätosť,
2. rovinnú (dvojosovú) napätosť,
3. priamkovú (jednoosovú) napätosť.



Obr. 4-1

Na určenie druhu napätosti v bode telesa vyjmeme z neho elementárny hranol dx , dy, dz (obr. 4-1). Účinok odstránených častí nahradíme vnútornými silami. Napätie môže byť vo všeobecnosti rozložené po priereze nerovnomerne, no na elementárnych stenách hranola toto rozloženie môžeme pokladať za rovnomerné.

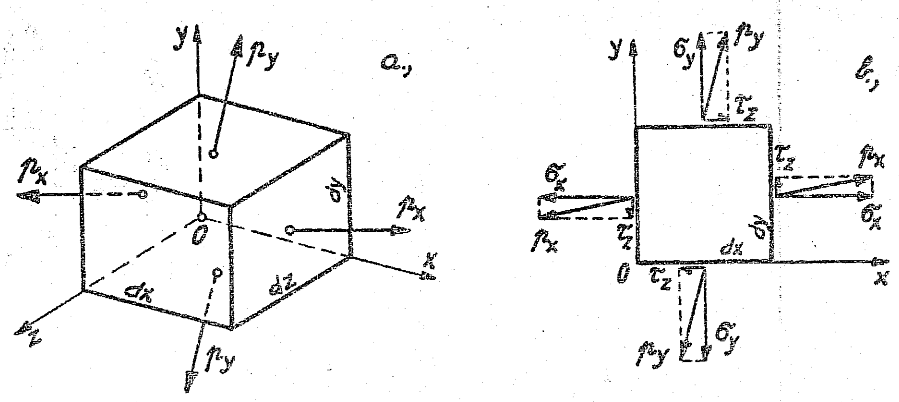
Na obr. 4-1 sú nakreslené vnútorné sily, pripadajúce na jednotku plochy, teda napätia, ktoré prechádzajú ťažiskami príslušných plôšiek.

Ak sú všetky vyznačené napätia nenulové, ide o priestorovú napätosť.

Ak určíme polohu elementárneho hranola v telese tak, že vo dvoch protiľahlých stenách budú napätia (napr. p_z) rovné nule (obr. 4-2) a v ostatných stenách sú napätia nenulové, ide o napätosť rovinnú.

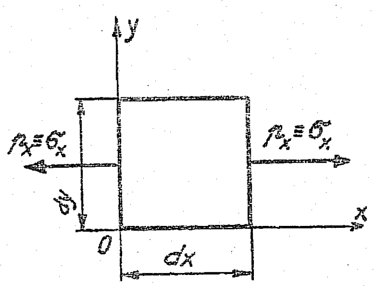
Ak môžeme dať elementárnemu hranolu v telese takú polohu, aby napr. p_y a p_z boli rovné nule (obr. 4-3), musí byť $p_x \equiv \sigma_x$, potom ide o priamkovú napätosť.

Z uvedeného vyplýva, že rovinná a priamková napätosť sú zvláštne (špeciálne) prípady priestorovej napätosti.

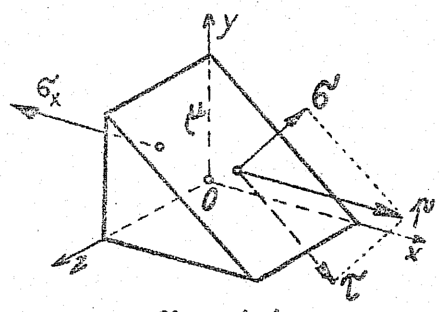


Obr. 4-2

Pre správne ohodnotenie nebezpečia, ohrozujúceho pevnosť súčiastky, treba dokonale poznať jej stav napätosti. Musíme preto okrem napätia v stenách elementárneho hranola vedieť určiť napätia v ľubovoľne sklonenom reze.



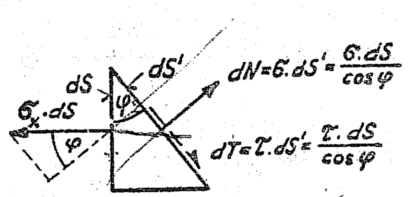
Obr. 4-3



Obr. 4-4

4.1 PRIAMKOVÁ (JEDNOOSOVÁ) NAPÄTOSŤ

Pri určovaní napätia σ a τ v ľubovoľnej polohe rezu v bode telesa vyjmeme elementárny trojboký hranol podľa obr. 4-4. Z podmienok rovnováhy vnútorných síl elementu (obr. 4-5) do smeru napätia σ a τ dostaneme:



$$\sum F_n = 0 : \quad \sigma \cdot \frac{dS}{\cos\varphi} - \sigma_x \, dS \cos\varphi = 0$$

$$\sum F_t = 0 : \quad \tau \cdot \frac{dS}{\cos\varphi} - \sigma_x \, dS \sin\varphi = 0$$

Obr. 4-5

a z toho potom

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\varphi \qquad \text{a} \qquad \tau = \sigma_x \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

Tieto rovnice však možno ďalej upraviť, ak použijeme vzťahy:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2} \; ; \qquad \sin\varphi \,.\, \cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$$

potom

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2}\cos 2\varphi \\ \tau &= \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\varphi \end{aligned}\right\} \qquad /IV\text{-}1/$$

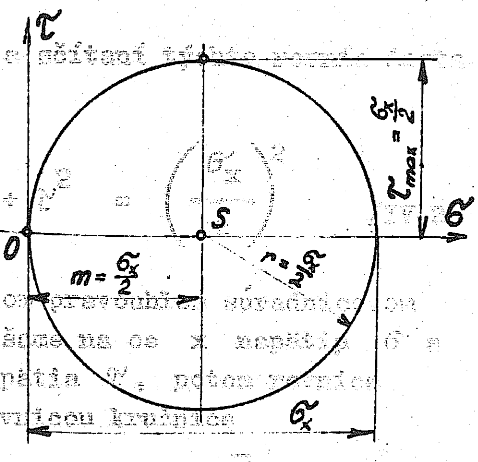
Keďže v rovniciach /IV-1/ nevyskytuje sa plocha dS a ani žiadna materiálová konštanta, napätie σ a τ závisí teda len od σ_x a uhla φ. Ďalej z rovníc /IV-1/ vidieť, že normálové napätie σ je najväčšie v rovine, kolmej na os prúta ($\varphi = 0$), kde ale šmykové napätie sa rovná nule. Naproti tomu šmykové napätie je maximálne v rovine určenej uhlom $\varphi = 45^\circ$ (resp. 135°), pritom ale normálové napätie nie je nulové.

4.2 MOHROVA KRUŽNICA NAPÄTÍ (JEDNOOSOVEJ NAPÄTOSTI)

Priebeh napätia σ a τ v závislosti od uhla φ možno znázorniť tiež graficky, keď rovnice /IV-1) prepíšeme na tvar

$$\sigma - \frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma_x}{2}\cos 2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\varphi$$



Obr. 4-6

Po umocnení a sčítaní týchto rovníc dostaneme:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 \qquad /IV\text{-}2/$$

Ak vo zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme vynášame na os x napätia σ a na os y napätia τ, potom rovnica /IV-2/ je rovnicou kružnice

$$\left[(x - m)^2 + y^2 = r^2\right]$$

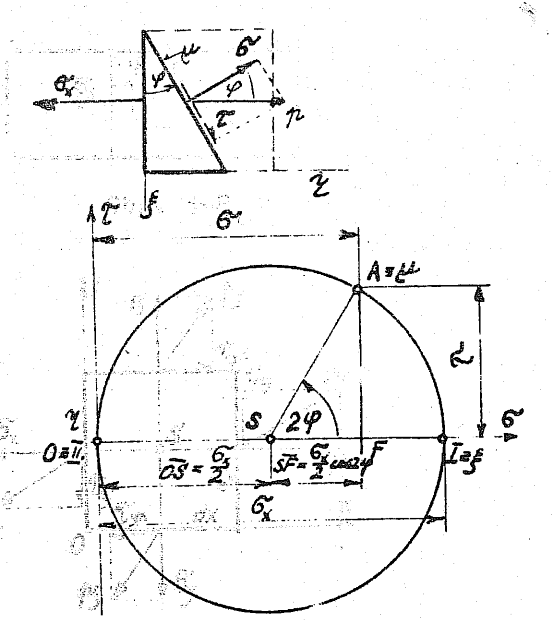
ktorej stred leží na osi σ vo vzdialenosti $m = \frac{\sigma_x}{2}$ od počiatku (obr. 4-6) a jej polomer je $r = \frac{\sigma_x}{2}$. Túto kružnicu nazývame Mohrovou kružnicou napätia.

Každému rezu elementárneho hranola odpovedá bod na Mohrovej kružnici, ktorého súradnice udávajú veľkosť normálového a šmykového napätia v znázorňovanom reze. Teda napätia σ a τ v reze μ sú určené súradnicami bodu $\mu \equiv A$ na Mohrovej kružnici (obr. 4-7).

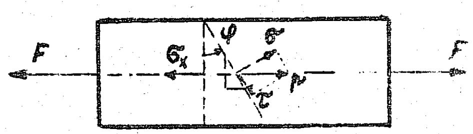
Pri grafickom určovaní σ a τ postupujeme potom nasledovne:

1. zostrojíme Mohrovu kružnicu pre dané σ_x (obr. 4-7);
2. od bodu $\xi \equiv I$ na kružnici, ktorý odpovedá rezu ξ elementárneho hranola, nanesieme stredový uhol 2φ v rovnakom zmysle, ako v elementárnom hranole (vždy od ξ ku μ);
3. rameno stredového uhla 2φ vytína na Mohrovej kružnici bod $\mu \equiv A$, ktorého súradnice určujú v príslušnej mierke veľkosť napätí σ a τ.

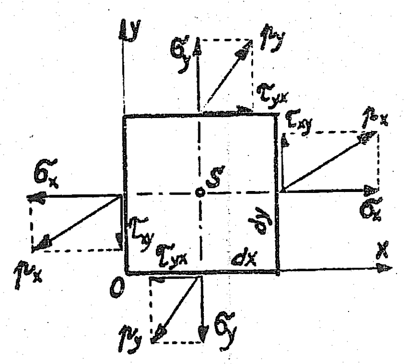
Jeden z najčastejšie sa vyskytujúcich prípadov priamkovej napätosti je namáhanie tyče prostým ťahom alebo tlakom (obr. 4-8).



Obr. 4-7



Obr. 4-8



Obr. 4-9

4.3 ROVINNÁ (DVOJOSOVÁ) NAPÄTOSŤ

Ako už bolo uvedené, o rovinnej napätosti možno hovoriť vtedy, keď napätia v dvoch protiľahlých rovnobežných stenách elementárneho hranola sú nulové (obr. 4-2a,b).

Uvažujme elementárny hranol, na ktorý pôsobia napätia p_x a p_y $(p_z = 0)$ podľa obr. 4-9. Tieto napätia rozložíme do smerov súradnicových osí. Prvý index šmykových napätí napr. τ_{xy} značí, že ide o šmykové napätie, pôsobiace v ploške kolmej na os x. Druhý index značí, že uvedené napätie je rovnobežné s osou y.

Z momentovej podmienky rovnováhy vnútorných síl k bodu S dostaneme

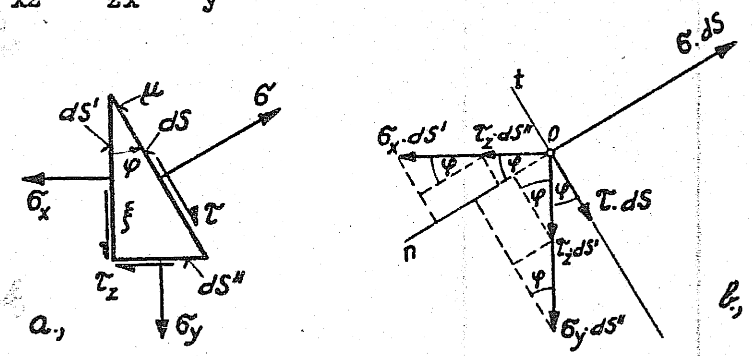
$$\sum M_S = 0 : \quad \tau_{yx}\, dx\, dz \frac{dy}{2} + \tau_{yx}\, dx\, dz \frac{dy}{2} -$$

$$- \tau_{xy}\, dy\, dz \frac{dx}{2} - \tau_{xy}\, dy\, dz \frac{dx}{2} = 0$$

a z toho

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \equiv \tau_z$$

Pretože elementárny hranol je myslený vlastne ako bod telesa, možno všeobecne povedať, že v určitom bode telesa sú v rezoch vzájomne kolmých šmykové napätia rovnaké a smerujú buď k priesečnici týchto rovín, alebo od nej a nazývame ich združené šmykové napätia. Označujeme ich potom podľa toho, ku ktorej osi (priesečnici) smerujú. V našom prípade to bude, ako je to už aj v poslednom vzťahu uvedené, z. Podobne to platí aj pre ďalšie šmykové napätia, napr. $\tau_{xz} = \tau_{zx} \equiv \tau_y$ a pod.



Obr. 4-10

Napätia vo všeobecnom reze μ, podobne ako pri priamkovej napätosti, určíme z rovnováhy vnútorných síl trojbokého hranola (obr. 4-10a, resp. obr. 4-10b).

Z podmienok rovnováhy síl do smeru normály a dotyčnice k rovine dS dostaneme

$$\sum F_n = 0 : \qquad \sigma . dS - \sigma_x . dS' \cos\varphi - \sigma_y . dS'' \sin\varphi -$$
$$- \tau_z . dS'' \cos\varphi - \tau_z . dS' \sin\varphi = 0$$

$$\sum F_t = 0 : \qquad \tau . dS - \sigma_x . dS' \sin\varphi + \sigma_y . dS'' \sin\varphi -$$
$$- \tau_z . dS'' \sin\varphi + \tau_z . dS' \cos\varphi = 0$$

Ako však vidieť z obr. 4-10a, platí:

$$dS' = dS \cos\varphi \qquad a \qquad dS'' = dS \sin\varphi$$

Ak toto dosadíme do posledných dvoch rovníc, dostaneme po úprave

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + 2\tau_z \sin\varphi . \cos\varphi$$
$$\tau = \sigma_x \sin\varphi . \cos\varphi - \sigma_y \sin\varphi . \cos\varphi + \tau_z \sin^2\varphi - \tau_z \cos^2\varphi$$

Tieto rovnice možno ďalej upraviť použitím vzťahov

$$\cos^2\varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} , \qquad \sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} ,$$

$$2 \sin\varphi . \cos\varphi = \sin 2\varphi$$

a ďalšej úprave do tvaru:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_z \sin 2\varphi \\ \tau &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_z \cos 2\varphi \end{aligned}\right\} \qquad /IV-3/$$

Z rovníc /IV-3/ vidieť, že napätia σ a τ v reze μ, ktorý je odklonený od rezu ξ o uhol φ, sú nezávislé od dS a materiálových konštánt.

Zistíme ďalej také rezy I a II, v ktorých majú normálové napätia σ extrémne hodnoty. Keďže σ je funkciou uhla φ, určíme polohu φ_o extrémnych hodnôt napätí z podmienky:

$$\left[\frac{d\sigma}{d\varphi}\right]_{\varphi = \varphi_o} = 0 : \quad - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2 \sin 2\varphi_o + 2\tau_z \cos 2\varphi_o = 0 \qquad /IV-4/$$

a z toho

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_z}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad /IV-5/$$

Hodnoty extrémnych normálových napätí dostaneme, keď dosadíme do prvej z rovníc /IV-3/ hodnoty uhlov φ_0. Tam ale vystupujú funkcie sínus a cosínus. Pre vzájomnú závislosť tu vystupujúcich trigonometrických funkcií je známy vzťah z matematiky

$$\cos 2\varphi_0 = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_0}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{2\tau_z}{\sigma_x - \sigma_y}\right)^2}} = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}}$$

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{\pm \operatorname{tg} 2\varphi_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_0}} = \dots\dots\dots = \pm \frac{2\tau_z}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}}$$

Zistime ďalej, ktoré znamienka vyhovujú pre extrém, napr. pre σ_{max}. Na to treba poznať i druhú deriváciu funkcie, a tá bude

$$\left[\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}\right]_{\varphi = \varphi_0} = -2(\sigma_x - \sigma_y) . \cos 2\varphi_0 - 4\tau_z . \sin 2\varphi_0$$

Po dosadení za $\cos 2\varphi_0$ a $\sin 2\varphi_0$ a po úprave dostaneme

$$\left[\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}\right]_{\varphi = \varphi_0} = -\left[\pm 2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}\right]$$

Aby mala funkcia $\sigma = t(\varphi)$ maximum, musí byť jej druhá derivácia záporná, a to bude vtedy, keď v poslednom výraze vezmeme člen v zátvorke s kladným znamienkom.

Potom aj uhol φ_0 rezu I, v ktorom pôsobí maximálne normálové napätie, je jednoznačne určený rovnicami

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{2\tau_z}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}} \qquad /IV-6/$$

$$\cos 2\varphi_0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}} \qquad /IV-6/$$

Pre uhol roviny rezu II, v ktorej pôsobí minimálne normálové napätie, platia potom záporné znamienka.

Ak teda dosadíme do prvej z rovníc /IV-3/ rovnice /IV-6/, dostaneme po úprave

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2} \qquad /IV-7/$$

Potom, ako to vidieť z rovnice /IV-7/, σ_1 je maximálne a σ_2 minimálne normálové napätie.

Ak by sme do druhej z rovníc /IV-3/ dosadili za φ_0, zistili by sme, že v rezoch I a II sú šmykové napätia nulové.

Roviny I a II nazývame preto hlavnými rovinami a napätia σ_1 a σ_2 v nich pôsobiace hlavnými napätiami.

Polohu rovín extrémnych hodnôt šmykových napätí τ, ako aj ich hodnotu určili by sme rozborom druhej z rovníc /IV-3/ podobným spôsobom, ako to bolo pri normálových napätiach. Dostali by sme tak

$$\tau_{1,2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2} \qquad /IV-8/$$

Extrémne šmykové napätia, pôsobiace v dvoch vzájomne na seba kolmých rezoch, líšia sa od seba len znamienkami (čo znova len potvrdzuje zákon združených šmykových napätí); v rezoch, kde pôsobia extrémne šmykové napätia, súčasne pôsobia i normálové napätia.

Ak urobíme súčet hlavných napätí, definovaných rovnicou /IV-7/, dostaneme

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \text{konšt}$$

čo dokazuje, že súčet normálových napätí pre hociktorý pár dvoch na seba kolmých rovín v tom istom bode telesa je konštantný, invariantný a rovný súčtu hlavných napätí; to je tzv. invarianta napätí.

4.4 MOHROVA KRUŽNICA NAPÄTÍ ROVINNEJ NAPÄTOSTI

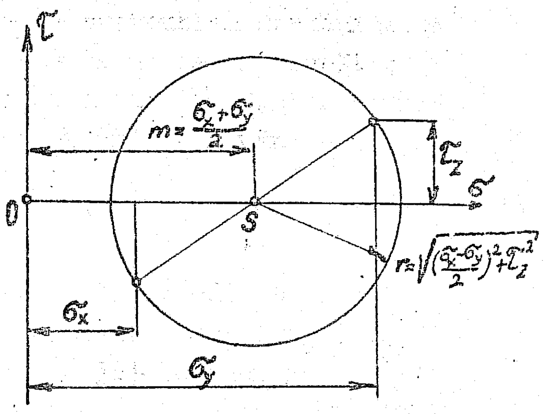
Veľmi výhodne možno určiť napätia σ a τ v závislosti od uhla φ graficky pomocou Mohrovej kružnice napätí. Jej rovnicu možno odvodiť na základe vzťahov /IV-3/, ktoré prepíšeme na tvar

$$\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_z \sin 2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_z \cos 2\varphi$$

Umocnením a sčítaním týchto dvoch rovníc dostaneme po úprave

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2 \qquad /IV\text{-}9/$$



Obr. 4-11

Ak v zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme vynášame na os x napätie σ a na os y napätie τ, potom rovnica /IV-9/ je rovnicou kružnice

$$\left[(x - m)^2 + y^2 = r^2\right]$$

ktorej stred leží na osi σ (obr. 4-11) vo vzdialenosti $m = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ od počiatku, a jej polomer je

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2}$$

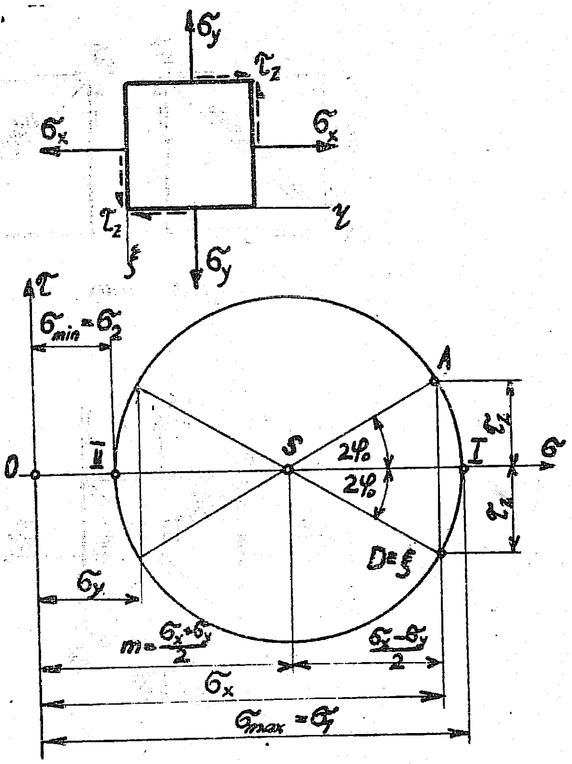
Mohrovu kružnicu z daných napätí σ_x, σ_y a τ_z zostrojíme potom nasledovne:

1. na vodorovnú os vynesieme v mierke normálové napätie σ_x a σ_y ;
2. v mieste σ_x a σ_y vynesieme na kolmicu v rovnakej mierke τ_z ;
3. koncovými bodmi τ_z prechádza Mohrova kružnica (obr. 4-12).

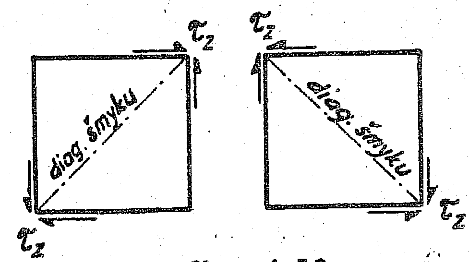
Podobne ako pri priamkovej napätosti, aj tu možno jednotlivé body kružnice popisovať ako rezy na elementárnom hranole.

Rezu ξ elementárneho hranola, v ktorom pôsobí napätie σ_x a τ_z, odpovedá jeden z bodov A alebo D na Mohrovej kružnici. Pri určovaní tohto bodu musíme vyhľadať najprv rez I hlavného napätia σ_1 v elementárnom hranole, ktorému na Mohrovej kružnici odpovedá bod I. Na to však potrebujeme nasledovnú definíciu (uvádzame ju bez dôkazu):

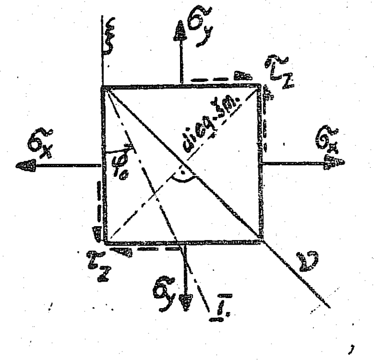
Rovina hlavného napätia σ_1 leží medzi rovinou, v ktorej pôsobí algebraicky väčšie dané normálové napätie, a medzi rovinou kolmou na diagonálu šmyku.



Obr. 4-12



Obr. 4-13



Obr. 4-14

Pod diagonálou šmyku rozumieme priamku, spojujúcu hrany elementárneho hranola, do ktorých smerujú šmykové napätia (obr. 4-13). Napríklad pre normálové napätie $\sigma_x > \sigma_y$ a šmykové napätie τ_z podľa obr. 4-14 bude ležať rovina I hlavného napätia σ_1 medzi rovinou ξ a rovinou ν. Ak budeme vynášať všetky uhly v rovnakom zmysle v Mohrovej kružnici aj v elementárnom hranole, potom môžeme podľa uvedenej vety určiť na Mohrovej kružnici bod, odpovedajúci rovine ξ, ako aj bod $\mu \equiv K$, odpovedajúci ľubovoľnej rovine elementárneho hranola. V Mohrovej kružnici musíme však vynášať vždu uhol dvojnásobný, t.j. $2\varphi_0$, resp. 2φ.

Postup pri grafickom určovaní napätí σ a τ v reze μ (obr. 4-15):

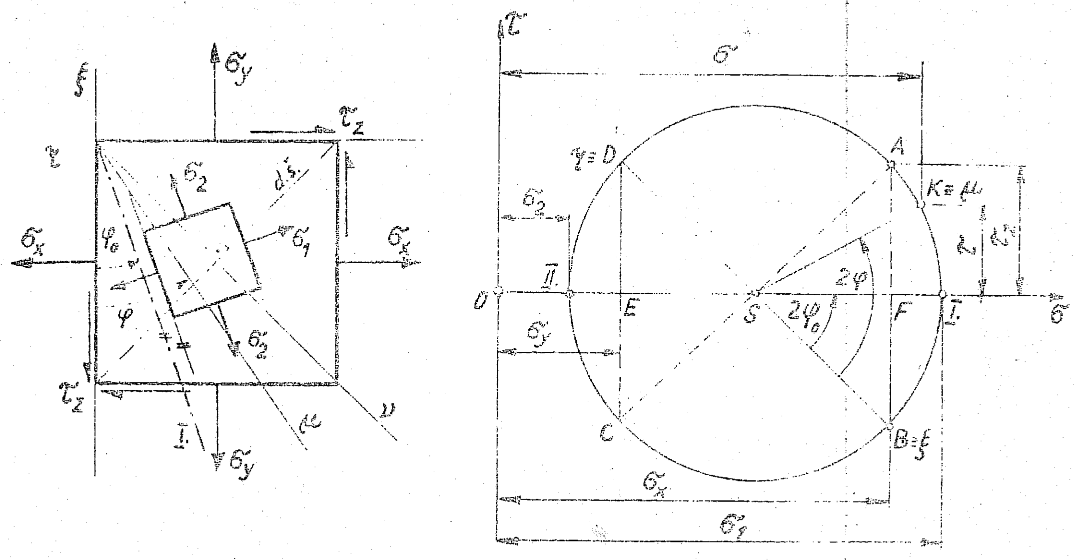
1. pre dané hodnoty σ_x, σ_y a τ_z nakreslíme vo vopred určenej mierke Mohrovu kružnicu;

2. v elementárnom hranole určíme (podľa uvedenej definície) rovinu I ;

3. v Mohrovej kružnici určíme bod ξ, odpovedajúci rovine ξ v elementárnom hranole. Tento bod na Mohrovej kružnici určíme tak, že od bodu I nanesieme uhol $2\varphi_0$ v rovnakom zmysle ako v elementárnom hranole;

4. od bodu ξ nanesieme v Mohrovej kružnici uhol 2φ v rovnakom zmysle ako v elementárnom hranole;

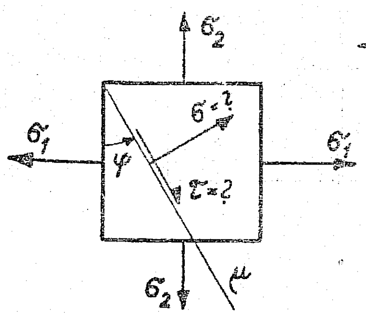
5. rameno uhla 2φ vytína na kružnici bod $\mu \equiv K$, ktorého súradnice v príslušnej mierke určujú veľkosť σ a τ.

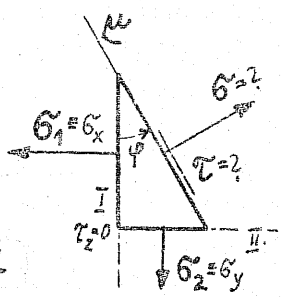


Obr. 4-15

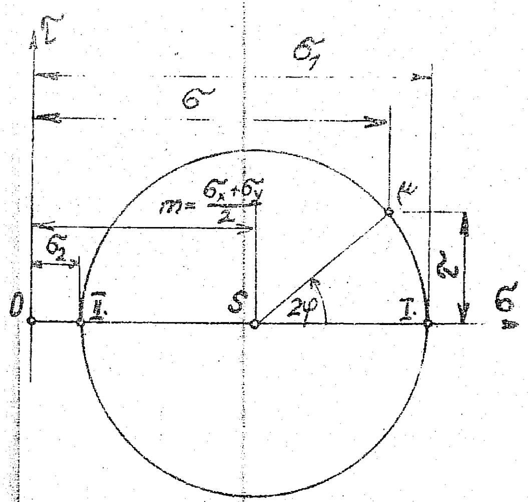
Zvláštne prípady rovinnej napätosti

1. Rovinná napätosť je daná priamo hlavnými napätiami σ_1 a σ_2 (obr. 4-16).





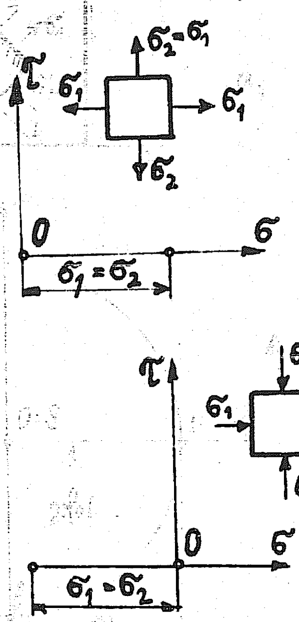
Obr. 4-16



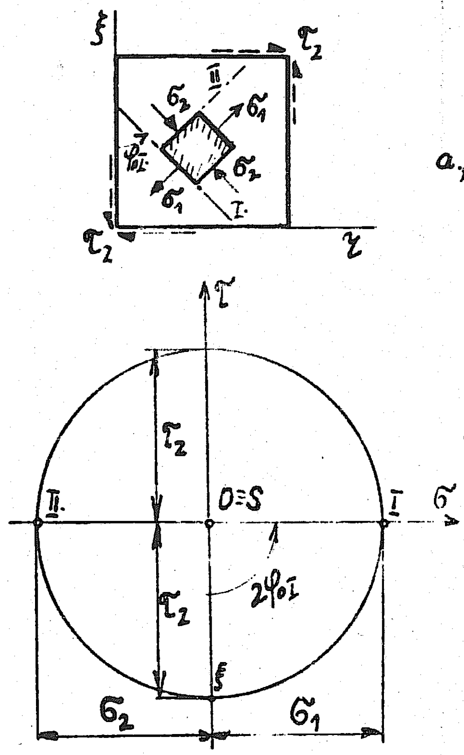
Obr. 4-17

Napätie σ a τ určíme graficky z Mohrovej kružnice, ako je to znázornené na obr. 4-17. Stredový uhol 2φ v Mohrovej kružnici vynášame od bodu I v rovnakom zmysle ako v elementárnom hranole.

2. Ak je $\sigma_1 = \sigma_2$, čo je prípad všestranného ťahu alebo tlaku, potom sa Mohrova kružnica zredukuje na bod (obr. 4-18), z čoho vyplýva, že v každej rovine elementárneho hranola bude rovnaké napätie.



Obr. 4-18



Obr. 4-19

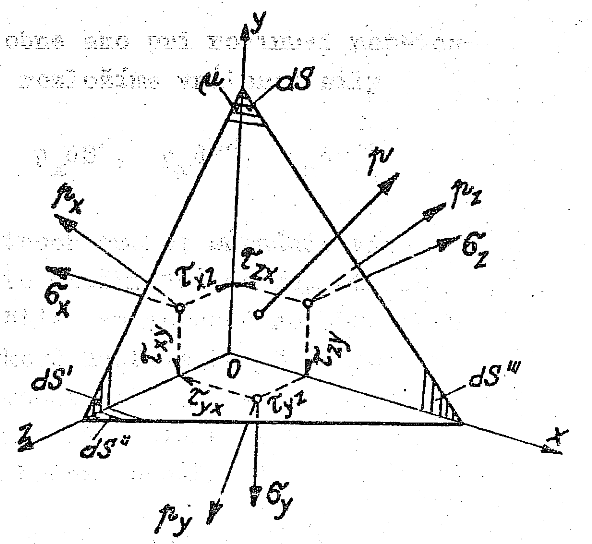
3. Ak v dvoch navzájom kolmých stenách elementárneho hranola pôsobia len šmykové napätia (obr. 4-19), takúto napätosť nazývame prostým (čistým) šmykom.

Mohrova kružnica napätia takéhoto druhu namáhania je znázornená na obr. 4-19b.

4.5 PRIESTOROVÁ (TROJOSOVÁ) NAPÄTOSŤ

Ako sme už prv uviedli, o priestorovej napätosti v danom bode telesa hovoríme vtedy, keď pôsobia napätia vo všetkých stenách elementárneho hranola (obr. 4-1).

Hlavnou úlohou bude určenie napätia p (resp. σ a τ) v ľubovoľnom reze μ a zistenie jeho extrémnych hodnôt. Za tým účelom vyjmeme si v danom bode telesa elementárny štvorsten (obr. 4-20). Účinok odstránených častí telesa nahradzujeme vnútornými silami, ktoré na jednotku plochy sú p_x, p_y a p_z.



Obr. 4-20

Podobne ako pri rovinnej napätosti, rozložíme vnútorné sily

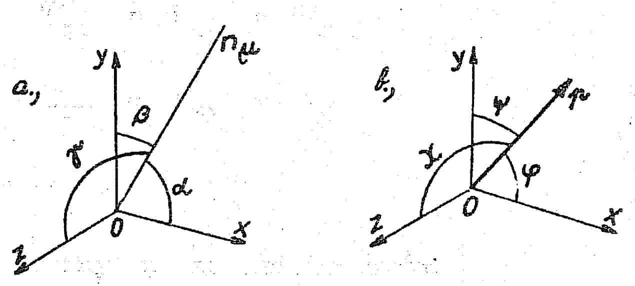
$$p_x dS', \quad p_y dS'', \quad p_z dS'''$$

do troch smerov súradnicových osí. Tieto zložky vnútorných síl sú napätia, znázornené na obr. 4-20. Šmykové napätia tu pôsobiace sú združené tak, ako sme o nich hovorili už v článku 4.3, a ďalej ich budeme označovať:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_x$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_y$$



Obr. 4-21

Rovina μ je určená uhlami α, β, γ, ktoré zviera normála tejto roviny n so súradnicovými osami (obr. 4-21a). Napätie p zviera so súradnicovými osami uhly φ, ψ, χ (obr. 4-21b), ktoré vo všeobecnosti nie sú totožné s uhlami α, β a γ.

Ak označíme plochu rezu μ ako dS, potom jej priemet do roviny yz bude:

$$dS' = dS \cdot \cos(\widehat{n,x}) = dS \cdot \cos\alpha$$

a podobne ďalšie priemety:

$$dS'' = dS \cdot \cos\beta \; ; \qquad dS''' = dS \cdot \cos\gamma$$

Zo statických podmienok rovnováhy vnútorných síl, pôsobiacich na elementárny štvorsten (obr. 4-22) v smere súradnicových osí, dostaneme:

$$\sum F_x = 0 : \quad p\, dS \cos\varphi - \sigma_x\, dS \cos\alpha - \tau_z\, dS \cos\beta - \tau_y\, dS \cos\gamma = 0$$

$$\sum F_y = 0 : \quad p\, dS \cos\psi - \sigma_y\, dS \cos\beta - \tau_x\, dS \cos\gamma - \tau_z\, dS \cos\alpha = 0$$

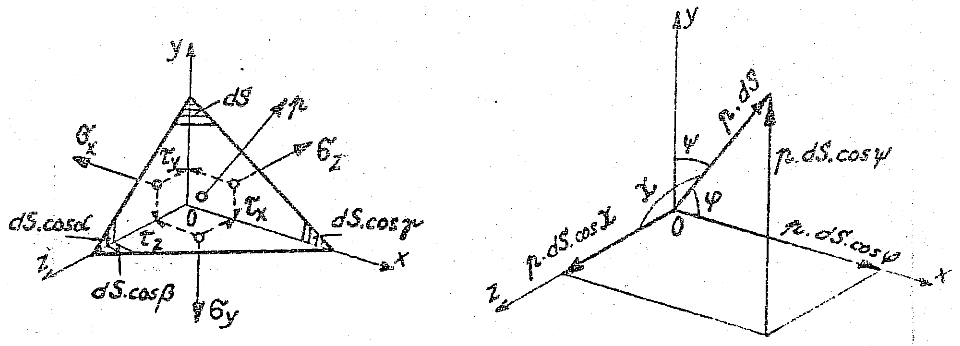
$$\sum F_z = 0 : \quad p\, dS \cos\chi - \sigma_z\, dS \cos\gamma - \tau_y\, dS \cos\alpha - \tau_x\, dS \cos\beta = 0$$

a z toho

$$\left.\begin{aligned} p \cos\varphi &= \sigma_x \cos\alpha + \tau_z \cos\beta + \tau_y \cos\gamma \\ p \cos\psi &= \sigma_y \cos\beta + \tau_x \cos\gamma + \tau_z \cos\alpha \\ p \cos\chi &= \sigma_z \cos\gamma + \tau_y \cos\alpha + \tau_x \cos\beta \end{aligned}\right\} \qquad /IV-10/$$

Po umocnení a sčítaní týchto rovníc dostaneme

$$p^2 (\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi) = (\sigma_x \cos\alpha + \tau_z \cos\beta + \tau_y \cos\gamma)^2 + (\sigma_y \cos\beta + \tau_x \cos\gamma + \tau_z \cos\alpha)^2 + (\sigma_z \cos\gamma + \tau_y \cos\alpha + \tau_x \cos\beta)^2$$



Obr. 4-22

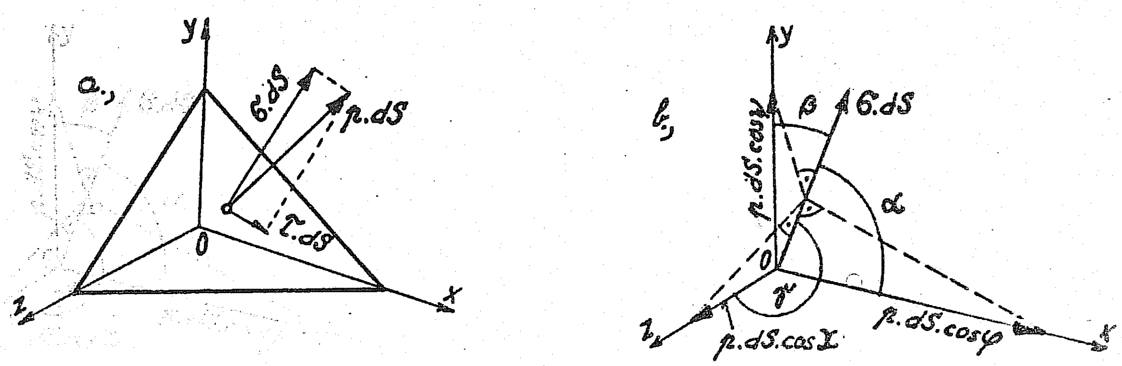
Z analytickej geometrie však poznáme vzťah

$$\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1$$

Použitím tohto vzťahu na úpravu poslednej rovnice dostaneme:

$$p^2 = (\sigma_x \cos\alpha + \tau_z \cos\beta + \tau_y \cos\gamma)^2 + (\sigma_y \cos\beta + \tau_x \cos\gamma + \tau_z \cos\alpha)^2 + (\sigma_z \cos\gamma + \tau_y \cos\alpha + \tau_x \cos\beta)^2 \qquad /IV-11/$$

Pretože sila $p \cdot dS$ je výslednicou vnútornej sily $\sigma \cdot dS$ a $\tau \cdot dS$ (obr. 4-23a), dostaneme $\sigma \cdot dS$ premietnutím sily $p \cdot dS$ do smeru normály, alebo ako súčet priemetov zložiek $p \cdot dS \cdot \cos\varphi$, $p \cdot dS \cdot \cos\psi$, $p \cdot dS \cdot \cos\chi$ vnútornej sily $p \cdot dS$ do smeru normály (obr. 4-23b).



Obr. 4-23

Potom

$$\sigma . dS = p.dS.\cos\varphi.\cos\alpha + p.dS.\cos\psi.\cos\beta + p.dS.\cos\chi.\cos\gamma$$

a z toho, ak dosadíme za $p \cdot \cos\varphi$, $p \cdot \cos\psi$ a $p \cdot \cos\chi$ rovnice /IV-10/, dostaneme

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma + 2\,\tau_z \cos\alpha.\cos\beta +$$

$$+ 2\,\tau_x \cos\beta.\cos\gamma + 2\,\tau_y \cos\gamma.\cos\alpha \qquad /IV-12/$$

Podľa obr. 4-23a môžeme tiež napísať

$$(p \cdot dS)^2 = (\sigma . dS)^2 + (\tau . dS)^2$$

a z toho potom určíme šmykové napätie v rovine ρ

$$\tau = \sqrt{p^2 - \sigma^2} \qquad /IV-13/$$

pričom za p a σ do rovnice /IV-13/ dosadili by sme rovnicu /IV-11/ a /IV-12/.

Určenie hlavných napätí

Tak ako pri rovinnej napätosti, aj tu existujú v bode telesa roviny, v ktorých sú len napätia normálové, a to sú extrémy pre tento bod. Tieto roviny (rezy) a im prislúchajúce napätia nazývame hlavnými.

Hlavné napätia vypočítame z podmienky, že v hlavných rovinách sú šmykové napätia nulové. Z toho potom vyplýva

$$\sigma = p$$

$$\cos\alpha = \cos\varphi$$

$$\cos\beta = \cos\psi$$

$$\cos\gamma = \cos\chi$$

Po dosadení a úprave dostaneme rovnicu /IV-10/ v tvare

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)\cos\alpha + \tau_z\cos\beta + \tau_y\cos\gamma &= 0 \\ \tau_z\cos\alpha + (\sigma_y - \sigma)\cos\beta + \tau_x\cos\gamma &= 0 \\ \tau_y\cdot\cos\alpha + \tau_x\cos\beta + (\sigma_z - \sigma)\cos\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad /IV\text{-}14/$$

Ďalší vzťah, potrebný na určenie neznámych σ v rovniciach /IV-14/, je

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad /IV\text{-}15/$$

Dostávame tak štyri rovnice, potrebné na určenie štyroch neznámych. Rovnice /IV-14/ sú lineárne homogénne rovnice vzhľadom na smerové kosínusy ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$). Aby sústava homogénnych rovníc mala nenulové riešenie (nulové riešenie vylučujeme), musí sa determinant tejto sústavy rovníc rovnať nule, teda

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma), & \tau_z, & \tau_y \\ \tau_z, & (\sigma_y - \sigma), & \tau_x \\ \tau_y, & \tau_x, & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \qquad /IV\text{-}16/$$

Po rozpísaní tohto determinantu dostaneme rovnicu tretieho stupňa na určenie troch hlavných napätí (ktoré sú vždy reálne) v tvare

$$\sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_x^2 - \tau_y^2 -$$

$$- \tau_z^2) - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\,\tau_x\tau_y\tau_z - \sigma_x\tau_x^2 - \sigma_y\tau_y^2 - \sigma_z\tau_z^2) =$$

$$= 0 \qquad /IV\text{-}17/$$

Z tejto rovnice určíme hlavné napätia:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Ak utvoríme kubickú rovnicu z koreňových súčiniteľov

$$(\sigma - \sigma_1).(\sigma - \sigma_2).(\sigma - \sigma_3) = 0 ,$$

po jej úprave dostaneme

$$\sigma^3 - \sigma^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sigma(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0$$

Porovnaním s rovnicou /IV-17/ dostaneme

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{konšt}$$

a to znamená, že súčet normálových napätí v troch k sebe vzájomne kolmých rovinách má stálu hodnotu - je to <u>invarianta napätí</u>.

Ak sú známe hlavné napätia σ_1, σ_2, σ_3 a ak zvolíme súradnicové osi v ich smeroch ($\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_z$, $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$), potom napätia v ľubovoľnom reze μ, ktorý je určený uhlami α, β, γ, určíme pomocou rovníc /IV-11/, /IV-12/ a /IV-13/.

<u>Poznámka:</u> Keďže v rovniciach, odvodených pri priamkovej, rovinnej i priestorovej napätosti nevyskytuje sa žiadna materiálová konštanta, platia všetky odvodené rovnice tak pre namáhanie v oblasti elastickej, ako aj plastickej.

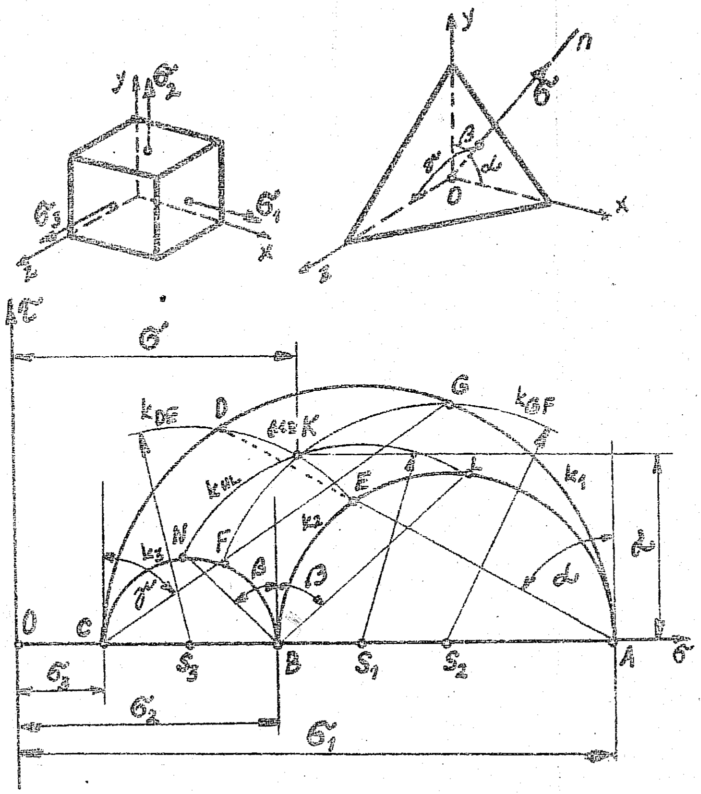
4.6 MOHROVA KRUŽNICA PRIESTOROVEJ NAPÄTOSTI

Napätia σ a τ v reze μ možno určiť taktiež graficky pomocou Mohrových kružníc napätia, ktoré uvádzame bez dôkazu. Pri grafickom určovaní napätí σ a τ v rovine μ, určenej uhlami α, β, γ (obr. 4-24), postupujeme nasledovne:

1. na vodorovnú os nanesieme hlavné napätia σ_1, σ_2, σ_3 a opíšeme kružnice nad priemermi $\sigma_1 - \sigma_2$, $\sigma_1 - \sigma_3$ a $\sigma_2 - \sigma_3$;
2. vynesieme od kolmice v bode A uhol α. Rameno tohto uhla pretne kružnice k_1 a k_2 v bodoch E a D;
3. bodmi D a E opíšeme kružnicu k_{DE} zo stredu S_3;

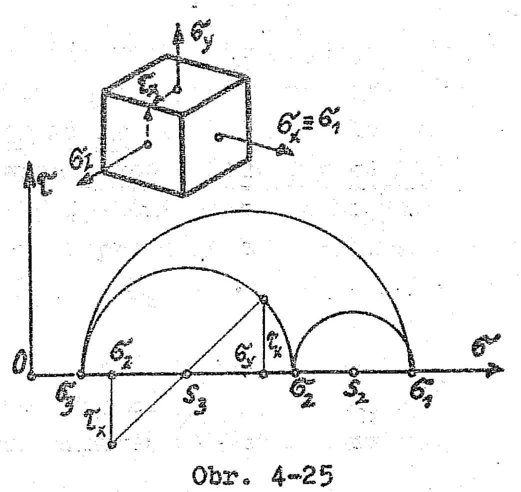
4. podobne rameno uhla γ, vyneseného v bode C od kolmice v tomto bode, pretne kružnice k_1 a k_3 v bodoch F a G, ktorými opíšeme kružnicu k_{GF}, zo stredu S_2;

5. súradnice priesečníka týchto kružníc $K \equiv \mu$ udávajú v príslušnej mierke napätia σ a τ v reze μ.



Obr. 4-24

Poznámka: Keby sme vyniesli ešte aj uhol β od kolmice v bode B na obidve strany, pretínali by ramená tohto uhla kružnice k_2 a k_3 v bodoch N a L. Kružnica k_{NL}, opísaná zo stredu S_1, prechádzala by taktiež bodom $K \equiv \mu$.



Obr. 4-25

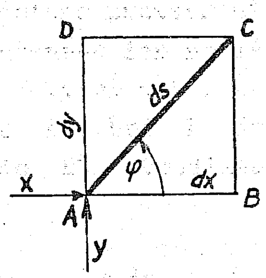
Treba ešte pripomenúť, že napätia v ľubovoľnom reze μ priestorovej napätosti možno graficky určiť len vtedy, ak poznáme aspoň jedno z hlavných napätí. Na obr. 4-25 je konštrukcia Mohrových kružníc napätí pre dané hodnoty napätí σ_1, σ_y, σ_z a τ_x.

Ak je napätosť v určitom bode telesa daná napätiami σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z, musíme napätia riešiť len matematicky, alebo pomocou rovnice /IV-17/ určiť hlavné napätia, a potom ďalej úlohu riešiť už graficky.

V.

5.0 Pretvorenie v bode telesa

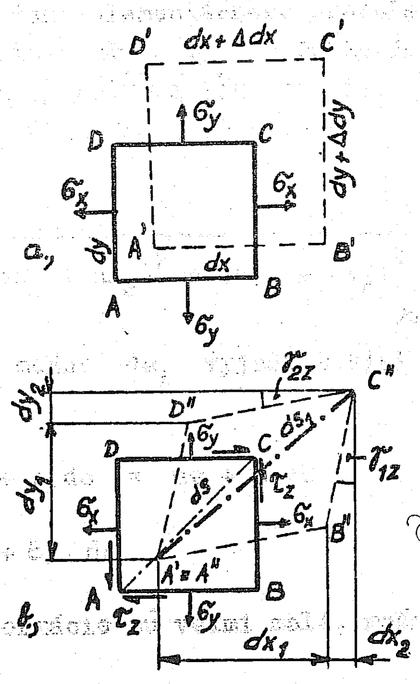
Častou úlohou v pružnosti a pevnosti je určenie predĺženia v ľubovoľnom smere v bode telesa. Aby sme zistili napr. pomerné predĺženie v takomto bode v rovine, uvažujme predĺženie spojnice $\overline{AC} = ds$ elementárneho hranola (obr. 5-1), vyňatého v určitom bode telesa.



Obr. 5-1

Na obr. 5-2a je nakreslené pretvorenie elementárneho hranola, zaťaženého len normálovými napätiami σ_x a σ_y. Vplyvom tohto pretvorenia sa bod A posunie do A′, bod B do B′, bod C do C′ a bod D do D′. Predĺženie hrán potom bude:

$$\Delta dx = \varepsilon_x . dx \; ; \qquad \Delta dy = \varepsilon_y . dy$$



Obr. 5-2

Pri súčasnom zaťažení elementárneho hranola normálovými napätiami σ_x, σ_y a šmykovým napätím τ_z sa tento pretvorí tak, ako je to vyznačené na obr. 5-2b. Dĺžka uhlopriečky ds_1 potom bude

$$ds_1 = \sqrt{(dx_1 + dx_2)^2 + (dy_1 + dy_2)^2} \qquad /V\text{-}1/$$

Ako je už známe, možno ds_1 vyjadriť tiež vzťahom

$$ds_1 = ds + \Delta ds = ds + \varepsilon . ds =$$

$$= (1 + \varepsilon) . ds$$

Keďže uhlové deformácie sú veľmi malé, možno približne písať:

$$\underline{dx_1} \doteq \overline{A'B'} = dx + \Delta dx =$$

$$= dx + \varepsilon_x dx = \underline{(1 + \varepsilon_x) . dx}$$

$$\underline{dy_1} \doteq \overline{A'D'} = dy + \Delta dy = dy + \varepsilon_y dy = \underline{(1 + \varepsilon_y) . dy}$$

$$\underline{dx_2} \doteq \gamma_{1z} \cdot dy_1 \doteq \underline{\gamma_{1z} \cdot dy}$$

$$\underline{dy_2} \doteq \gamma_{2z} \cdot dx_1 \doteq \underline{\gamma_{2z} \cdot dx}$$

Po dosadení do rovnice /V-1/ dostaneme:

$$(1 + \varepsilon)\, ds = \sqrt{\left[(1 + \varepsilon_x)\, dx + \gamma_{1z} \cdot dy\right]^2 + \left[(1 + \varepsilon_y)\, dy + \gamma_{2z} \cdot dx\right]^2}$$

Ak potom celú rovnicu umocníme a vykrátime ds , a podľa obr. 5-1 dosadíme za: $\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$ a $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$, dostaneme

$$(1 + \varepsilon)^2 = \left[(1 + \varepsilon_x) \cos\varphi + \gamma_{1z} \cdot \sin\varphi\right]^2 + \left[(1 + \varepsilon_y) \sin\varphi + \gamma_{2z} \cdot \cos\varphi\right]^2$$

Ak vykonáme vyznačené operácie a prijmeme predpoklady, že pomerné predĺženia ε, ε_x , ε_y a uhlové pretvorenia γ_{1z} , γ_{2z} sú oproti jednotke veľmi malé, možno ich štvorce a súčiny ako veličiny malé vyšších rádov zanedbať, a tak po úprave bude

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2\varphi + \varepsilon_y \sin^2\varphi + (\gamma_{1z} + \gamma_{2z}) \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

Ak ešte označíme celkovú zmenu pravého uhla $\gamma_z = \gamma_{1z} + \gamma_{2z}$, a použijeme tiež vzťahy

$$\cos^2\varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} ; \qquad \sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} ;$$

$$2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \sin 2\varphi ;$$

dostaneme po úprave vzťah pre ε v tvare

$$\underline{\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi} + \frac{\gamma_z}{2} \sin 2\varphi \qquad /V-2/$$

Tento výraz je analogický s prvou rovnicou /IV-3/ na určenie σ z daných σ_x , σ_y a τ_z v rovinnej napätosti. V obidvoch rovniciach si navzájom odpovedajú

$$\sigma \sim \varepsilon \qquad \tau \sim \frac{\gamma}{2}$$

$$\sigma_x \sim \varepsilon_x \qquad \tau_z \sim \frac{\gamma_z}{2}$$

$$\sigma_y \sim \varepsilon_y$$

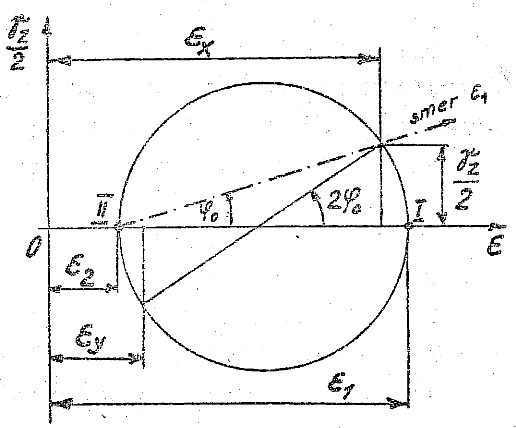
Z uvedeného vidieť, že možno potom použiť všetky výsledné vzorce pre rovinnú napätosť, ak príslušné napätia nahradíme pomerným predĺžením a uhlovým pretvorením. Pre hlavné pomerné predĺženia a uhlové pretvorenie budú platiť vzťahy

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\left(\frac{\gamma_z}{2}\right)^2} \qquad /V-3/$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\varphi - \frac{\gamma_z}{2} \cos 2\varphi \qquad /V-4/$$

Rovnako aj pre uhol hlavného pomerného predĺženia dostaneme

$$\mathrm{tg}\, 2\varphi_o = \frac{\gamma_z}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \qquad /V-5/$$



Obr. 5-3

Keďže vo všetkých tu odvodených rovniciach nevyskytuje sa žiadna materiálová konštanta, platia tieto rovnice pre všetky materiály, a to pre deformácie elastické i plastické, a to tým presnejšie, čím sú deformácie menšie.

Závislosť medzi ε a γ možno analogicky s rovinnou napätosťou znázorniť Mohrovou kružnicou pretvorení v súradniciach

$$\varepsilon \text{ a } \frac{\gamma_z}{2} \quad \text{(obr. 5-3).}$$

VI.

6.0 Súvis medzi napätosťou a pretvorením

6.1 HOOKOV ZÁKON PRI JEDNOOSOVEJ NAPÄTOSTI

Vyšetrime pretvorenie elementárneho hranola, na ktorý pôsobí len napätie σ_x (obr. 6-1).

Súvis medzi napätím σ_x a pomerným predĺžením ε_x v smere osi x definovaný je Hookovým zákonom rovnicou /II-9/, t.j.

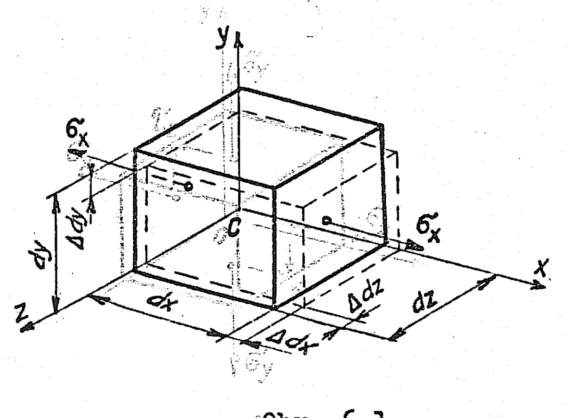
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}$$

Priečne zúženia definované sú zase rovnicami /II-11/, a teda

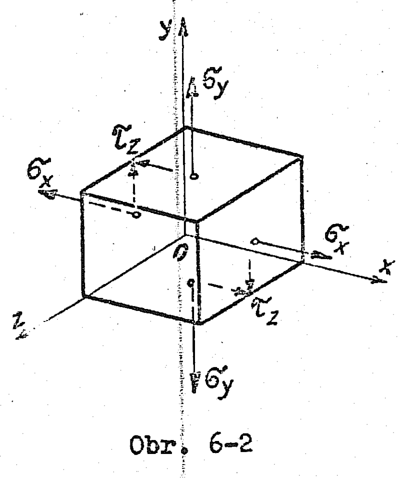
$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma_x}{mE}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma_x}{mE}$$

Z toho vyplýva, že aj priamková napätosť vyvoláva priestorové pretvorenie.



Obr. 6-1



Obr. 6-2

6.2 HOOKOV ZÁKON PRI ROVINNEJ NAPÄTOSTI

Vyšetrime pretvorenie elementárneho hranola (obr. 6-2), na ktorý súčasne pôsobia napätia σ_x, σ_y a τ_z. Predpokladáme pritom platnosť Hookovho zákona.

Riešenie uskutočníme superpozíciou. Najprv nech pôsobí samotné napätie σ_x, ktoré vyvolá (podobne ako v čl. 6.1) v smere osi x pomerné predĺženie

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

a v smere osi y a z zase pomerné skrátenia

$$\varepsilon'_y = -\frac{\sigma_x}{mE} \qquad \varepsilon'_z = -\frac{\sigma_x}{mE}$$

Podobne pri samotnom pôsobení napätia σ_y bude v smere osi y pomerné predĺženie

$$\varepsilon''_y = \frac{\sigma_y}{E}$$

a v smere osí x a z pomerné skrátenia

$$\varepsilon''_x = -\frac{\varepsilon''_y}{m} = -\frac{\sigma_y}{mE} \qquad \varepsilon_z = -\frac{\varepsilon''_y}{m} = -\frac{\sigma_y}{mE} \, .$$

Pri súčasnom pôsobení oboch týchto napätí dostaneme celkové pomerné predĺženia ε_x, ε_y, ε_z algebraickým súčtom jednotlivých pomerných predĺžení, a teda bude

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x \, ; \qquad \varepsilon_y = \varepsilon'_y + \varepsilon''_y \, ; \qquad \varepsilon_z = \varepsilon'_z + \varepsilon''_z$$

Po dosadení a úprave dostali by sme

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m}\right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m}\right) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{mE} \end{aligned}\right\} \qquad /VI-1/$$

Tieto rovnice, tzv. rovnice elasticity, vyjadrujú zákon superpozície napätí a pretvorení pre rovinnú napätosť v najjednoduchšom tvare. Všeobecné znenie tohto zákona je:

Ak je napätosť v bode telesa výslednou z niekoľkých napätostí, tzn. ak je daná ich superpozíciou, je aj výsledné pretvorenie dané superpozíciou jednotlivých čiastočných pretvorení. Tento zákon (jeho platnosť) je podmienený Hookovým zákonom.

K rovniciam /VI-1/, pri súčasnom pôsobení šmykového napätia, treba pripísať i rovnicu pre uhlové pretvorenie

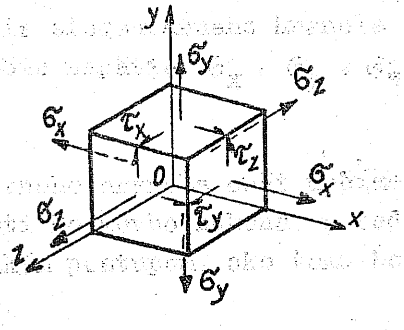
$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$$

Z rovníc /IV-1/ ďalej vyplýva, že pri rovinnej napätosti pretvorenie je priestorové.

Poznámka: Ak sú známe (napr. z merania) ε_x, ε_y, m a E, možno z rovníc /VI-1/ určiť napätia σ_x a σ_y

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{m^2 E}{m^2 - 1}\left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_y}{m}\right) \\ \sigma_y &= \frac{m^2 E}{m^2 - 1}\left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x}{m}\right) \end{aligned}\right\} \qquad /VI-2/$$

6.3 HOOKOV ZÁKON PRI PRIESTOROVEJ NAPÄTOSTI



Obr. 6-3

Vyšetrime pretvorenie elementárneho hranola (obr. 6-3), na ktorý pôsobia napätia σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z.

Deformácie elementárneho hranola opäť určíme za predpokladu platnosti Hookovho zákona, a teda i superpozíciou rovnakým postupom, ako tomu bolo v predošlom prípade.

Výsledné pretvorenie v smere súradnicových osí dostaneme algebraickým súčtom jednotlivých pomerných predĺžení, teda:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x' + \varepsilon_x'' + \varepsilon_x''' ; \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_y' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_y''' ;$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z' + \varepsilon_z'' + \varepsilon_z'''$$

Teda, podobne ako pri rovinnej napätosti, i tu bude

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m}\right) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right) \end{aligned}\right\} . \qquad /VI-3/$$

Pri spolupôsobení aj šmykového napätia treba k týmto rovniciam uvažovať ešte vzťahy pre uhlové pretvorenia

$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G} ; \qquad \gamma_y = \frac{\tau_y}{G} ; \qquad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G} \qquad /VI-4/$$

Rovnice /VI-3/ sú tzv. <u>rovnice elasticity</u> priestorovej napätosti.

Podobne, ako tomu bolo pri rovinnej napätosti, možno rovnice elasticity písať tiež v tvare

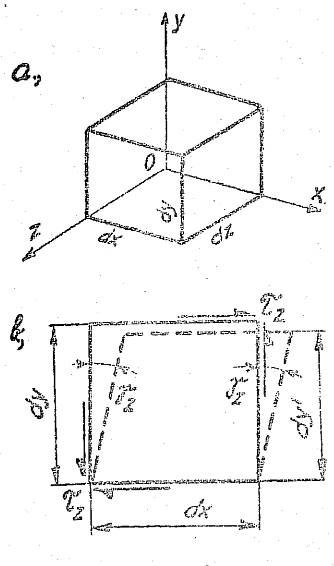
$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{m\,E}{m+1}\left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2}\right) = 2\,G\left(\varepsilon_x + \frac{\theta}{m-2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{m\,E}{m+1}\left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2}\right) = 2\,G\left(\varepsilon_y + \frac{\theta}{m-2}\right) \\ \sigma_z &= \frac{m\,E}{m+1}\left(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2}\right) = 2\,G\left(\varepsilon_z + \frac{\theta}{m-2}\right) \end{aligned}\right\} . \qquad /VI-5/$$

kde $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ je pomerná zmena objemu, a $G = \dfrac{m\,E}{2(m+1)}$, čo neskôr odvodíme.

Odvodené rovnice /VI-3/, resp. /VI-5/ platia aj pre napätosť danú hlavnými napätiami.

6.4 POMERNÁ ZMENA OBJEMU

Pri určovaní zmeny objemu uvažujme elementárny hranol rozmerov dx , dy , dz (obr. 6-4a).



Obr. 6-4

Pretvorenie elementárneho hranola je vo všeobecnosti dané pomernými predĺženiami ε_x, ε_y, ε_z a uhlovými pretvoreniami γ_x, γ_y a γ_z. Ak sú všetky tieto pretvorenia malé, možno zmenu dĺžky hrán vplyvom zmeny kolmosti, spôsobenej šmykovým napätím (obr. 6-4b), zanedbať, a potom bude

$$dy \doteq dy'$$

Pôvodný objem elementárneho hranola je

$$dV = dx\, dy\, dz$$

Objem pretvoreného hranola bude

$$dV' = (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz)$$

alebo

$$dV' = dx(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)\, dy(1 + \varepsilon_z)\, dz$$

Po vynásobení a zanedbaní malých veličín vyššieho rádu (všetky súčiny ε_x, ε_y, ε_z) dostaneme:

$$dV' = dx\, dy\, dz\,(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = dx.dy.dz + dx.dy.dz.(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

alebo

$$dV' = dV + dV(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

Z toho potom zmena objemu je

$$\Delta dV = dV' - dV = dV(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

a pomerná zmena objemu bude

$$\Theta = \frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad /VI\text{-}6/$$

Ak do tohto výrazu dosadíme ešte za ε_x, ε_y, ε_z z rovníc elasticity /VI-5/, po úprave dostaneme:

$$\Theta = \frac{m - 2}{m\,E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad /VI-7/$$

Poznámka: V prípade všestranného ťahu alebo tlaku bude:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$$

a tak v tomto prípade bude:

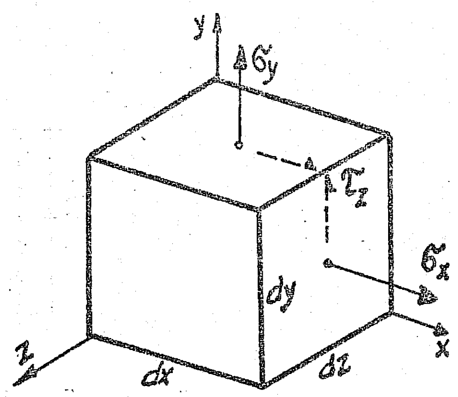
$$\Theta = \frac{m - 2}{m\,E} 3p \qquad /VI-8/$$

Pre nestlačiteľné telesá je pomerná zmena objemu $\Theta = 0$ a z toho vyplýva: $m - 2 = 0$, a v takom prípade $m = 2$.

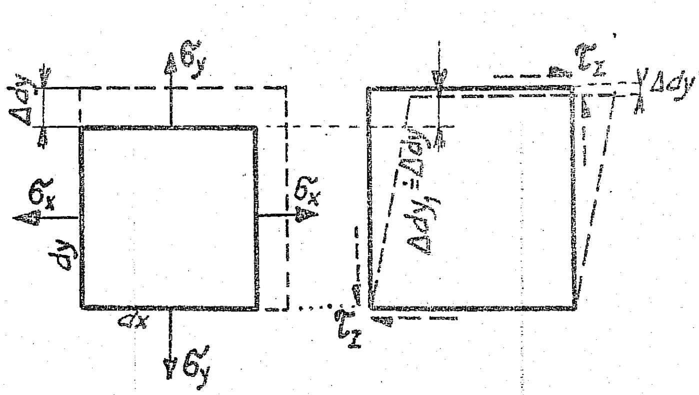
Poissonova konštanta musí byť teda vždy väčšia ako 2. V opačnom prípade, t.j. pre $m < 2$ by bola, ako to vyplýva z rovnice /VI-8/, pri všestrannom ťahu pomerná zmena objemu Θ záporná, čo zrejme odporuje skutočnosti.

6.5 ENERGIA NAPÄTOSTI PRI ROVINNEJ NAPÄTOSTI

Určíme najprv energiu napätosti elementárneho hranola, na ktorý pôsobia normálové napätia σ_x, σ_y a šmykové napätie τ_z podľa obr. 6-5.



Obr. 6-5



Obr. 6-6

Keď sú deformácie malé, má zošikmenie stien účinkom šmykového napätia τ_z len veľmi malý vplyv na zmenu pôvodnej dĺžky dy (obr. 6-6), a preto energia napätosti normálových napätí aj v tomto prípade závisí len na predĺžení hrán vplyvom napätí σ_x a σ_y.

Energie napätosti od jednotlivých napätí σ_x, σ_y, τ_z možno potom algebraicky sčítať (použijeme pritom aj rovnice /II-13/, resp. /II-14/), potom celková energia napätosti elementárneho hranola bude

$$dA = \frac{\sigma_x \cdot \varepsilon_x}{2} dV + \frac{\sigma_y \cdot \varepsilon_y}{2} dV + \frac{\tau_z \cdot \gamma_z}{2} dV \qquad /VI-9/$$

Merná energia napätosti, t.j. energia napätosti pripadajúca na jednotku objemu elementárneho hranola, potom bude

$$A_1 = \frac{dA}{dV} = \frac{\sigma_x \cdot \varepsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \cdot \varepsilon_y}{2} + \frac{\tau_z \cdot \gamma_z}{2} \qquad /VI-10/$$

Ak na vyjadrenie pomerných predĺžení použijeme rovnice elasticity /VI-3/ a pomerného posunutia Hookovho zákona pre šmyk /II-10/, po úprave dostaneme

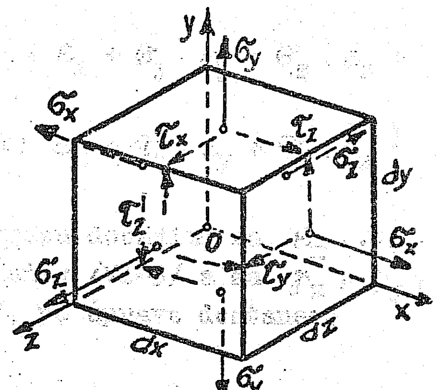
$$A_1 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \frac{2}{m} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y) + \frac{1}{2G} \cdot \tau_z^2 \qquad /VI-11/$$

Ak je rovinná napätosť daná hlavnými napätiami σ_1 a σ_2 ($\tau_z = 0$), rovnica /VI-11/ prejde do tvaru

$$A_1 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{2}{m} \sigma_1 \cdot \sigma_2) \qquad /VI-12/$$

6.6 ENERGIA NAPÄTOSTI PRI PRIESTOROVEJ NAPÄTOSTI

Rovnakým spôsobom, ako pre rovinnú napätosť, možno odvodiť pre mernú energiu napätosti pri priestorovej napätosti (obr. 6-7) vzťah



Obr. 6-7

$$A_1 = \frac{1}{2} (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z + $$
$$+ \tau_x \cdot \varepsilon_x + \tau_y \cdot \varepsilon_y + \tau_z \cdot \varepsilon_z)$$

Ak do tohto výrazu dosadíme za ε_x, ε_y, ε_z rovnice elasticity /VI-3/ a za γ_x, γ_y, γ_z rovnice /VI-4/, po úprave dostaneme

$$A_1 = \frac{1}{2E} \Big[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m} (\sigma_x \cdot \sigma_y + $$

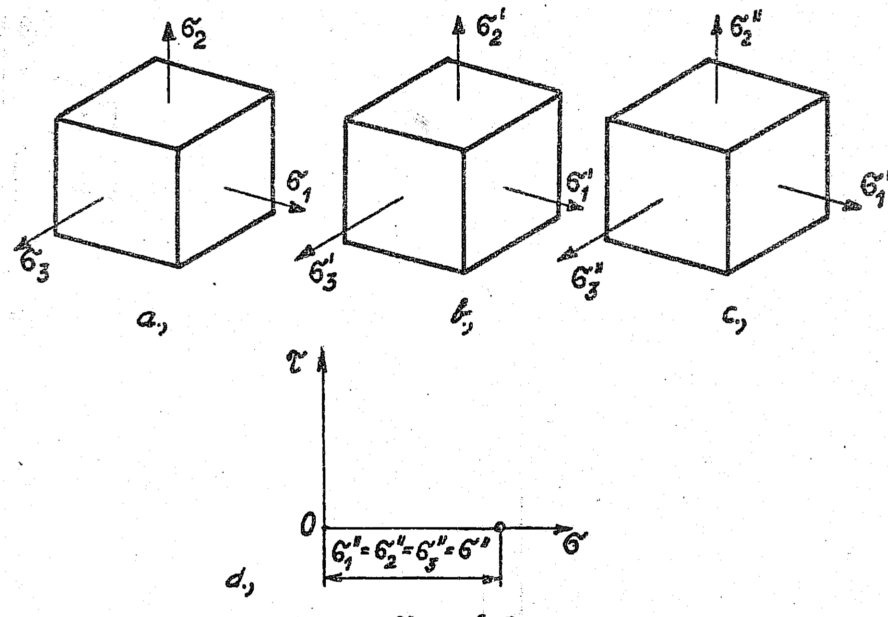
$$+ \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x) \Big] + \frac{1}{2\,G}\left[\tau_x^{\,2} + \tau_y^{\,2} + \tau_z^{\,2}\right] \qquad /VI-13/$$

Ak je priestorová napätosť daná hlavnými napätiami σ_1, σ_2, σ_3, (τ_x = = τ_y = τ_z = 0), rovnica /VI-13/ prejde do tvaru

$$A_1 = \frac{1}{2\,E}\left[\sigma_1^{\,2} + \sigma_2^{\,2} + \sigma_3^{\,2} - \frac{2}{m}\,(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3)\right] \qquad /VI-14/$$

6.7 MERNÁ ENERGIA NAPÄTOSTI PRE ZMENU TVARU

Keďže vo všeobecnosti zmení sa tak objem, ako aj tvar telesa, možno celkovú energiu napätosti rozdeliť na energiu napätosti, potrebnú na zmenu tvaru, a energiu napätosti, potrebnú na zmenu objemu.



Obr. 6-8

Keď je priestorová napätosť daná hlavnými napätiami σ_1, σ_2 a σ_3 (obr. 6-8a), aby sme zistili jednotlivé podiely energie napätosti, rozložíme hlavné napätia na zložky

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1' + \sigma_1'' \\ \sigma_2 &= \sigma_2' + \sigma_2'' \\ \sigma_3 &= \sigma_3' + \sigma_3'' \end{aligned}\right\} \qquad /VI-15/$$

kde σ_1', σ_2', σ_3' sú napätia spôsobujúce zmenu tvaru,

σ_1'', σ_2'', σ_3'' - napätia spôsobujúce zmenu objemu.

Ak na elementárny hranol pôsobia len napätia σ_1', σ_2', σ_3' (obr. 6-8b), nastáva len zmena tvaru hranola, to znamená, že objem musí zostať konštantný, t.j. že zmena objemu $\triangle dV = 0$, čo podľa rovnice /VI-7/ znamená, že aj

$$\frac{m-2}{m\,E} \cdot (\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3') = 0$$

Aby bola táto rovnica splnená, musí byť

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0 \qquad /VI\text{-}16/$$

Ak na elementárny hranol pôsobia len napätia σ_1'', σ_2'', σ_3'' (obr. 6-8c), nastáva len zmena objemu hranola, tzn. že sa nemení jeho tvar, a vtedy nesmú v žiadnom reze hranola pôsobiť šmykové napätia. Mohrove kružnice napätia takejto priestorovej napätosti zredukujú sa na bod (obr. 6-8d). Musí potom platiť

$$\sigma_1'' = \sigma_2'' = \sigma_3'' = \sigma'' \qquad /VI\text{-}17/$$

Sčítaním rovníc /VI-15/ dostaneme

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = (\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3') + \sigma_1'' + \sigma_2'' + \sigma_3''$$

Použitím rovnice /VI-16/ a /VI-17/ na úpravu posledného vzťahu dostaneme

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\,\sigma''$$

a z toho zložka napätia (resp. zložky napätia) vyvolávajúca zmenu objemu je

$$\sigma'' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \qquad /VI\text{-}18/$$

Celková merná energia napätosti je

$$A_1 = A_1' + A_1''$$

kde A_1' je merná energia napätosti, potrebná na zmenu tvaru;

A_1'' - merná energia napätosti, potrebná na zmenu objemu.

Mernú energiu napätosti, potrebnú na zmenu tvaru, môžeme teda napísať v tvare:

$$A_1' = A_1 - A_1'' \qquad /VI-19/$$

Mernú energiu napätosti, potrebnú na zmenu objemu, vypočítame z rovnice /VI-14/, keď do tejto dosadíme rovnicu /VI-17/, resp. /VI-18/, a po úprave dostaneme

$$A_1'' = \frac{m-2}{6\ mE}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \qquad /VI-20/$$

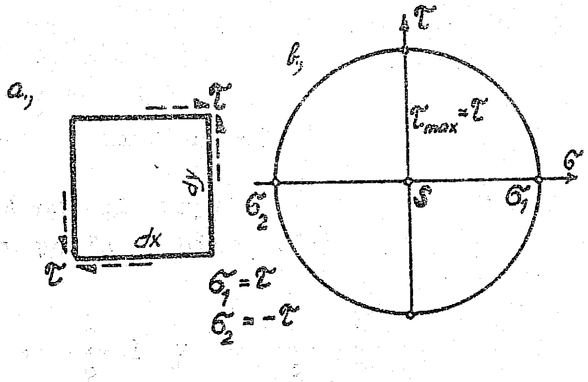
Ak teraz dosadíme rovnicu /VI-20/ do rovnice /VI-19/, po úprave dostaneme mernú energiu napätosti, potrebnú na zmenu tvaru

$$A_1' = \frac{m+1}{3\ mE}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 . \sigma_2 + \sigma_2 . \sigma_3 + \sigma_1 . \sigma_3)\right] \qquad /VI-21/$$

Túto energiu napätosti niekedy nazývame aj energiou napätosti šmykových napätí.

6.8 SÚVISLOSŤ MEDZI E , G a m

Medzi modulom pružnosti v ťahu - tlaku E , modulom pružnosti v šmyku G a Poissonovou konštantou m existuje závislosť, ktorú môžeme ľahko odvodiť.



Obr. 6-9

Uvažujme pri tom elementárny hranol, zaťažený samotnými šmykovými napätiami (obr. 6-9a), ako špeciálny prípad rovinnej napätosti.

Merná energia napätosti prostého šmyku podľa rovnice /II-14/ je

$$A_{1\tau} = \frac{1}{2}\tau . \gamma = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G} \qquad /II-14/$$

Mernú energiu napätosti prostého šmyku možno však vyjadriť podľa rovnice /VI-12/ ako

$$A_1 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{2}{m}\sigma_1 . \sigma_2\right)$$

kde podľa Mohrovej kružnice napätí (obr. 6-9b) je $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = -\tau$;

a ak za tieto hodnoty dosadíme do poslednej rovnice, dostaneme

$$A_1 = \frac{1}{2\,E}\left(\tau^2 + \tau^2 + \frac{2}{m}\,\tau^2\right) = \frac{m+1}{m\,E}\,\tau^2 \qquad /VI\text{-}22/$$

Rovnice /II-14/ a /VI-22/ v tomto prípade vyjadrujú mernú energiu napätosti toho istého prípadu, a teda musí byť

$$A_{1\tau} = A_1$$

t.j.:

$$\frac{\tau^2}{2\,G} = \frac{m+1}{m\,E}\,\tau^2$$

a z toho modul pružnosti v šmyku bude

$$G = \frac{m\,E}{2\,(m+1)} \qquad /VI\text{-}23/$$

VII.

7.0 Hypotézy porušenia materiálu pri priestorovej napätosti

Prevažná časť údajov o pevnosti materiálov bola získaná laboratórnymi skúškami namáhaním na ťah alebo na tlak. Prirodzene, že aj dimenzovanie súčiastky namáhanej prostým ťahom bude podľa toho úloha veľmi jednoduchá. Treba splniť len podmienku, aby najväčšie napätie neprekročilo hodnotu dovoleného namáhania σ_{dov}, ktoré pri väčšine húževnatých materiálov má pre ťah i tlak rovnaké hodnoty. Krehké materiály majú tieto hodnoty rozdielne.

Už v II. kapitole bolo uvedené, že dovolené namáhanie určuje sa tak, aby bola zaručená istá miera bezpečnosti <u>s</u> oproti vzniku nebezpečného stavu (pod nebezpečným stavom rozumieme porušenie alebo veľkú trvalú deformáciu). Pri priamkovej napätosti (kde $\sigma_2 = 0$ a $\sigma_3 = 0$) možno všetky medzné podmienky pre posúdenie nebezpečia poruchy určiť z laboratórnych skúšok v ťahu alebo tlaku.

Pri rovinnej alebo priestorovej napätosti, kde ani jedno z hlavných napätí nie je rovné nule, môže byť začiatok nebezpečného stavu (t.j. stavu, keď dochádza k poruche alebo veľkým trvalým deformáciám) spôsobený všeobecne rôznymi číselnými hodnotami σ_1, σ_2, σ_3. Každej kombinácii týchto napätí budú prislúchať určité nebezpečné hodnoty hlavných napätí, pri ktorých nastáva nebezpečný stav materiálu.

Na určenie týchto nebezpečných napätí σ_1, σ_2, σ_3 bolo by potrebné namáhať vzorky materiálov v laboratóriách pri rôznych vzájomných pomeroch hodnôt týchto napätí. Prakticky takéto pokusy uskutočniť ani nie je možné vzhľadom na prevádzkové ťažkosti, ale najmä pre veľké množstvo skúšok.

Treba preto nájsť spôsob, ako zostaviť pri zloženej napätosti podmienky pevnosti podľa hodnôt medze klzu σ_{Kt} a medze pevnosti σ_{Pt}, získaných zo skúšok pri priamkovej napätosti. Nebezpečný stav, či už pri húževnatých materiáloch (okamih vzniku veľkých trvalých deformácií), alebo pri krehkých materiáloch (okamih vzniku trhlín) pri rovinnej a priestorovej napätosti budeme posudzovať pomocou tzv. <u>porovnávajúceho napätia σ_s</u>, ktoré samotné by vyvolalo rovnaký nebezpečný stav, ako skutočná rovinná alebo priestorová napätosť. Pri dimenzovaní kladie sa spravidla požiadavka, aby porovnávajúce napätie bolo menšie, ako dovolené namáhanie, teda

$$\sigma_s \leqq \sigma_{dov}$$

Veľkosť porovnávajúceho napätia je definovaná rôzne podľa jednotlivých hypotéz.

I. Hypotéza najväčšieho normálového napätia (Rankin, Clapeyron)

Táto hypotéza predpokladá, že nebezpečný stav materiálu nastane vtedy, keď najväčšie normálové napätie danej napätosti dosiahne hodnotu normálového napätia priamkovej napätosti, pri ktorom nastáva zlom (krehkých materiálov), resp. veľké trvalé deformácie (húževnatých materiálov).

Teda aj všeobecne, keď všetky tri hlavné napätia σ_1, σ_2 a σ_3 sú rôzne od nuly, treba pri kontrole podľa tejto hypotézy počítať len s veľkosťou najväčšieho normálového napätia v ťahu alebo v tlaku, a ostatné napätia ako keby nemali vplyv na pevnosť materiálu. Porovnávacie napätie bude v tomto prípade rovné maximálnemu hlavnému napätiu:

$$\sigma_s = \sigma_1 = \sigma_{max} \qquad (\text{pri tlaku } \sigma_s = \sigma_3)$$

a podmienka pevnosti podľa tejto hypotézy potom bude

$$\sigma_s = \sigma_1 \leqq \sigma_{dov} \qquad /VII\text{-}1/$$

Táto hypotéza dáva vyhovujúce výsledky len pre krehké materiály. $\sigma_s = \sigma_1$

II. Hypotéza najväčšieho pomerného predĺženia (Saint-Vénant)

Podľa tejto hypotézy dochádza k nebezpečnému stavu materiálu vtedy, keď pomerné predĺženie (resp. skrátenie) v ktoromkoľvek smere danej napätosti dosiahne hodnotu pomerného predĺženia priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva porucha.

Nebezpečný stav nastáva teda pri pomernom predĺžení

$$\varepsilon = \frac{\sigma_s}{E}$$

Najväčšie pomerné predĺženie pri všeobecnej napätosti je dané rovnicou elasticity /VI-3/:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}\right)$$

Porovnaním posledných dvoch výrazov dostaneme

$$\sigma_s = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}$$

$\sigma_s = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}$

Podmienka pevnosti podľa tejto hypotézy potom bude

$$\sigma_s = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \leqq \sigma_{dov} \qquad /VII-2/$$

Vyhovujúce výsledky dáva táto hypotéza pre krehké materiály.

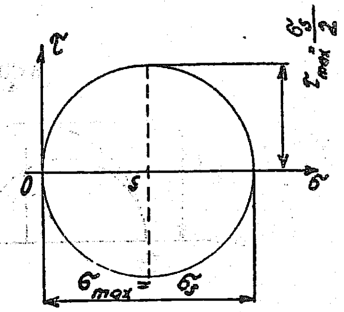
III. Hypotéza najväčšieho šmykového napätia (Guest – Coulomb)

Podľa tejto hypotézy nastáva pri všeobecnej napätosti nebezpečný stav (porušenie) materiálu vtedy, keď najväčšie šmykové napätie danej napätosti dosahuje hodnotu šmykového napätia priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva porucha.

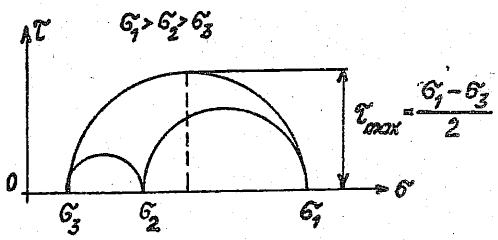
Keď pripustíme pri prostom ťahu (obr. 7-1) - Mohrova kružnica jednoosovej napätosti - pre normálové napätie hodnotu $\sigma_{max} = \sigma_s$, potom najväčšie šmykové napätie bude:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_s}{2}$$

ktoré pôsobí v rezoch sklonených pod uhlom 45° k smeru ťahového napätia σ.



Obr. 7-1



Obr. 7-2

Maximálne šmykové napätie priestorovej napätosti (obr. 7-2) podľa Mohrových kružníc priestorovej napätosti bude

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Porovnaním posledných dvoch výrazov dostaneme

$$\sigma_s = \sigma_1 - \sigma_3 \qquad \text{(pre rovinnú napätosť: } \sigma_s = \sigma_1 - \sigma_2\text{)}$$

Podmienku pevnosti pre priestorovú napätosť dostaneme v tvare

$$\sigma_s = \sigma_1 - \sigma_3 \leqq \sigma_{dov} \qquad /VII\text{-}3/$$

a pre rovinnú napätosť

$$\sigma_s = \sigma_1 - \sigma_2 \leqq \sigma_{dov} \qquad /VII\text{-}4/$$

Táto hypotéza súhlasí dosť presne so skutočnosťou, najmä pri húževnatých materiáloch. Potvrdená je skúškami všestranného tlaku. Neplatí pre krehké materiály.

IV. Hypotéza celkovej energie napätosti (Beltrami - Haigh)

Podľa tejto hypotézy nastáva porušenie materiálu nezávisle od zloženej napätosti vtedy, keď celková energia napätosti danej napätosti dosiahne, resp. prekročí hodnotu celkovej energie napätosti priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva porušenie materiálu.

Keď pri prostom ťahu pripustíme hodnotu normálového napätia $\sigma_s \leqq \sigma_{dov}$, bude energia napätosti tejto priamkovej napätosti daná výrazom

$$A_1 = \frac{\sigma_s^2}{2\,E}$$

Celková energia napätosti pri priestorovej napätosti podľa rovnice /VI-14/ je

$$A_1 = \frac{1}{2\,E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m}(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3)\right]$$

Porovnaním obidvoch energií napätosti dostaneme

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m}(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3)}$$

Podmienka pevnosti pre priestorovú napätosť podľa tejto hypotézy je

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m}(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3)} \leqq \sigma_{dov} \qquad /VII\text{-}5/$$

a pre rovinnú napätosť, kde $\sigma_3 = 0$, bude:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{2}{m}\sigma_1 \cdot \sigma_2} \leqq \sigma_{dov} \qquad /VII-6/$$

Táto hypotéza súhlasí so skutočnosťou pri húževnatých materiáloch pri napätosti, ktorá spôsobuje zväčšenie objemu.

V. <u>Hypotéza energie napätosti pre zmenu tvaru (energie napätosti šmykových napätí) - Huber - Misses - Hencky (H - M - H)</u>

Podľa tejto hypotézy nastáva porušenie materiálov nezávisle od zloženej napätosti vtedy, keď energia napätosti pre zmenu tvaru danej napätosti prekročí hodnotu energie napätosti pre zmenu tvaru priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva porucha.

Keď je priestorová napätosť daná napätiami σ_1, σ_2, σ_3, potom merná energia napätosti pre zmenu tvaru je podľa rovnice /VI-21/

$$A_1' = \frac{m+1}{3\,mE}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\,\sigma_3 + \sigma_1\,\sigma_3)\right]$$

Mernú energiu napätosti pre zmenu tvaru pri jednoosovej napätosti dostaneme taktiež podľa rovnice /VI-21/, keď do nej dosadíme za $\sigma_1 = \sigma_s$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$. Potom bude

$$A_1' = \frac{m+1}{3\,m\,E}\,\sigma_s^2$$

Porovnaním týchto vzťahov a úpravou, podobne ako v predchádzajúcej hypotéze, podmienka pevnosti potom bude

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3)} \leqq \sigma_{dov} \qquad /VII-7/$$

a pre rovinnú napätosť danú napätiami σ_1, σ_2, $\sigma_3 = 0$, bude

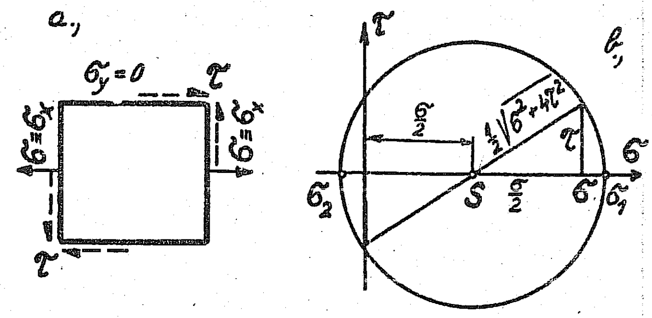
$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \leqq \sigma_{dov} \qquad /VII-8/$$

Skúšky ukázali, že táto hypotéza dáva najpresnejšie hodnoty pre húževnaté materiály s výnimkou všestranného ťahu, keď by podľa tejto hypotézy materiál zniesol nekonečne veľký všestranný ťah ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$, t.j.: $\sigma_s = 0$).

Poznámka: Všetky pevnostné hypotézy vyjadrené sú pomocou hlavných napätí a tak pre jednotlivé prípady namáhania bude vždy potrebné najprv určiť hlavné napätia pre danú napätosť, tieto potom dosadiť do príslušnej hypotézy.

Príklad 1:

Veľmi častý je prípad rovinnej napätosti, danej napätiami σ a τ (obr. 7-3a). Určime pre takýto prípad podmienky pevnosti podľa jednotlivých pevnostných hypotéz!



Obr. 7-3

Hlavné napätia pomocou Mohrovej kružnice (obr. 7-3b) budú definované vzťahmi

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \end{aligned}\right\} \qquad /VII-9/$$

a potom podľa jednotlivých pevnostných hypotéz bude:

I. Hypotéza najväčšieho normálového napätia

Ak do rovnice /VII-1/ dosadíme za hlavné napätie σ_1 z rovnice /VII-9/, po úprave dostaneme podmienku pevnosti v tvare

$$\sigma_s = 0{,}5\sigma + 0{,}5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqq \sigma_{dov} \qquad /VII-10/$$

II. Hypotéza najväčšieho pomerného predĺženia

Keď do rovnice /VII-2/ dosadíme za σ_1 a σ_2 z rovnice /VII-9/, podmienka pevnosti podľa tejto hypotézy po úprave bude

$$\sigma_s = 0{,}35\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqq \sigma_{dov} \qquad /VII-11/$$

III. Hypotéza najväčšieho šmykového napätia

Keď do rovnice /VII-4/ dosadíme rovnicu /VII-9/, po úprave dostaneme

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqq \sigma_{dov} \qquad /VII-12/$$

IV. Hypotéza celkovej energie napätosti

Keď dosadíme do rovnice /VII-6/ za σ_1, σ_2 rovnice /VII-9/ a za $m = 10/3$, dostaneme

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma^2 + 2{,}6\,\tau^2} \leqq \sigma_{dov} \qquad /VII-13/$$

V. Hypotéza energie napätosti pre zmenu tvaru (H-M-H)

Keď do rovnice /VII-8/ dosadíme rovnicu /VII-9/, podmienka pevnosti bude

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leqq \sigma_{dov} \qquad /VII-14/$$

Príklad 2:

Keď je daná rovinná napätosť len samotnými šmykovými napätiami (obr. 7-4a), potom, ako to vidieť aj z Mohrovej kružnice napätí (obr. 7-4b), hlavné napätia budú:

$$\sigma_1 = \tau, \qquad \sigma_2 = -\tau$$

a potom podľa jednotlivých hypotéz bude:

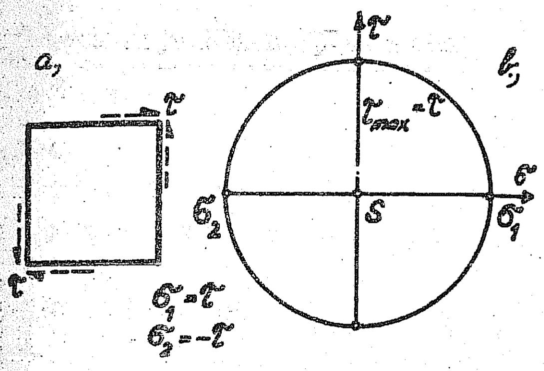
I. Hypotéza najväčšieho normálového napätia

Keď do rovnice /VII-1/ dosadíme za $\sigma_1 = \tau$ a $\sigma_2 = -\tau$, dostaneme

$$\sigma_s = \tau \leqq \sigma_{dov}$$

a z toho

$$\tau_{dov} = \sigma_{dov} \qquad /VII-15/$$



Obr. 7-4

II. Hypotéza najväčšieho pomerného predĺženia

Keď do rovnice /VII-2/ dosadíme za $\sigma_1 = \tau$ a $\sigma_2 = -\tau$, po úprave bude

$$\sigma_s = 1{,}3\,\tau \leqq \sigma_{dov}$$

a z toho:

$$\tau_{dov} = 0{,}77\,\sigma_{dov} \qquad /VII-16/$$

III. Hypotéza maximálneho šmykového napätia

Keď do rovnice /VII-4/ dosadíme za $\sigma_1 = \tau$ a $\sigma_2 = -\tau$, dostaneme

$$\tau_{dov} = 0{,}5\,\sigma_{dov} \qquad /VII-17/$$

IV. Hypotéza celkovej energie napätosti

Keď do rovnice /VII-6/ dosadíme za $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = -\tau$ a $m = 10/3$, po úprave dostaneme

$$\sigma_s = 1{,}61\,\tau \leqq \sigma_{dov}$$

a z toho

$$\tau_{dov} = 0{,}62\,\sigma_{dov} \qquad /VII-18/$$

V. Hypotéza energie napätosti pre zmenu tvaru (H-M-H)

Keď do rovnice /VII-8/ dosadíme za $\sigma_1 = \tau$ a $\sigma_2 = -\tau$, dostaneme:

$$\sigma_s = 1{,}73\,\tau \leqq \sigma_{dov}$$

a z toho

$$\tau_{dov} = 0{,}577 \cdot \sigma_{dov} \qquad /VII-19/$$

Ako vidieť, dostávame podľa jednotlivých pevnostných hypotéz rozdielne hodnoty dovoleného namáhania v šmyku v závislosti od dovoleného namáhania v ťahu. Vyhovujúce a najviac sa približujúce skutočnosti dávajú výsledky, získané zo IV., resp. V. hypotézy, tzn. že dovolené namáhanie v šmyku je asi 60 % dovoleného namáhania v ťahu.

ŽIVA