

2.0 ŘEŠENÍ KONSTRUKČNÍCH PRVKŮ ROTAČNĚ SYMETRICKÝCH TĚLES

Velkorozměrové aparáty zastoupené různými typy nádrží, zásobníků, vodojemů, kolon atd. jsou sestavovány ze základních konstrukčních prvků válce, koule, kužele a anuloidu, přičemž rovné stěny se z ekonomických důvodů používají minimálně. Z hlediska efektivního a úsporného využití materiálu na stavbu těchto zařízení je jedním z hlavních úkolů konstruktéra dosažení vysoké provozní spolehlivosti a životnosti zařízení. Protože se jedná vesměs o tenkostěnné skořepiny, je účelné dosáhnout tohoto cíle především zachováním membránového stavu v celém průřezu.

2.1 Způsoby zachování membránového stavu

Základním předpokladem pro zachování membránového stavu je určitý druh vnějšího zatížení, tvar skořepiny a její možné úpravy, způsob jejího uložení. Poruchy membránového stavu vyvolávají koncentrátoři, jako jsou tvarové změny skořepiny, skoková změna tloušťky stěny, zatížení osamělým břemenem (sílu), gradient teploty. To je pak příčinou přidavných ohybových napětí, které stěny skořepin - - zde membrán - nemohou přenášet. V podstatě mohou být zatíženy pouze rotačně symetrickým zatížením nebo zatížením, které je v rovnováze s vnitřními silami. Osamělé síly může membrána přenášet tehdy, působí-li pouze v tečném směru.

Změna tvaru musí být provedena s velkými poloměry přechodu nebo zesílením vhodnou výztuhou. Způsob řešení je naznačený na obr. 2.1: ostrý přechod při spojení dvou koulí různé poloměry R_1, R_2 zatížených přetlakem p . Protože membrána může přenášet pouze membránové síly, pak tahová síla N_1 a N_2

$$N_1 \equiv N_{1\alpha} \equiv N_{1\varphi} = 0,5 \cdot pR_1$$

$$N_2 \equiv N_{2\alpha} \equiv N_{2\varphi} = 0,5 \cdot pR_2$$

Horizontální složky $\Delta H =$

$$= H_1 - H_2 = N_1 \cdot \sin \alpha_1 -$$

$$- N_2 \cdot \sin \alpha_2. \text{ Je-li kolmice}$$

spuštěná v místě spoje na

spojnici os daná úsečkou a

pak platí, že $\sin \alpha_1 = a/R_1$ a $\sin \alpha_2 = a/R_2$; dosazením do rovnovážné rovnice ve vodorovném směru

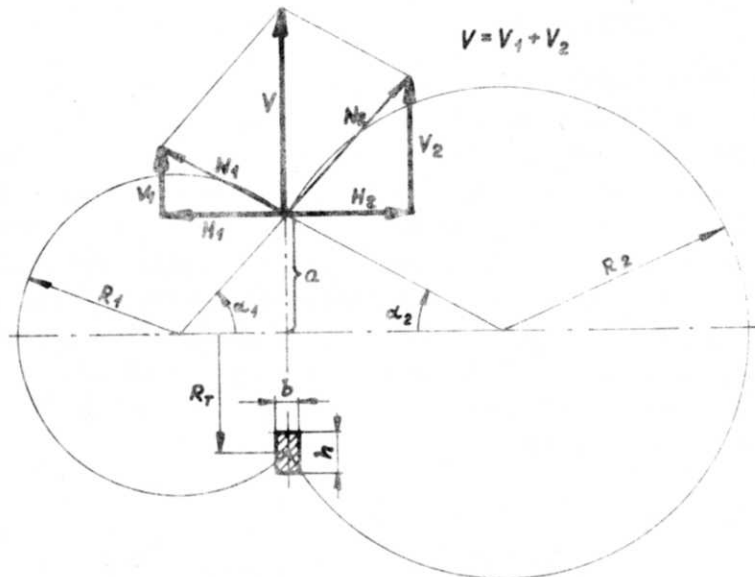
$$\Delta H = 0,5 \cdot pR_1 \cdot \frac{a}{R_1} - 0,5 \cdot pR_2 \cdot \frac{a}{R_2} = 0$$

a proto jsou obě složky stejné, tj. $H_1 = H_2$.

Pro svislou složku V musí platit, že

$$V = V_1 + V_2 = N_1 \cdot \cos \alpha_1 + N_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0,5 \cdot p \cdot (\sqrt{R_1^2 - a^2} + \sqrt{R_2^2 - a^2})$$

Tuto sílu však nemůže membrána převzít. Na ní musí být dimenzováno žebro (výztuha),



Obr. 2.1

kteře leží v rovině proniku. Žebro, jehož nejjednodušší průřez je obdélníkový $A_z = h \cdot b$, je po obvodě namáháno silami V a bude namáháno osovou silou $F_0 = V \cdot R_T$ (kde R_T je poloměr těžištní osy žebra). Při velkém poměru poloměru k tloušťce membrány (nebo při $R_T/a \approx 1$) lze místo výpočtu těžiště a R_T použít poloměr R ; osové napětí v žebře musí vyhovovat podmínce

$$\sigma_z = \frac{F_0}{A_z} \leq \sigma_D$$

Do průřezu žebra A_z se započítává i spolunosná délka pláště daná buď hodnotou cca $0,8\sqrt{R \cdot s}$ nebo desetinnásobkem tloušťky s . U membrány se předpokládá, že její ohybová tuhost je proti ohybové tuhosti žebra zanedbatelná.

Princip zachycení síly V žebrem bude i u jiných tvarových přechodů membrán podobný. Cílem bylo dokázat, že i při náhlé změně tvaru využitím žebra lze ve stěně v určité vzdálenosti od změny zachovat membránový stav.

Uložení skořepiny musí být řešeno tak, aby reakce v uložení byla opět v rovnováze s membránovou silou ve stěně nebo při podepření by nemělo být bráněno volné deformaci pláště skořepiny (kluzné uložení). V případě šikmého uložení musí být zachycena složka, kterou membrána nemůže přenést, žebrem umístěným tak, aby zachytilo normálovou složku této síly.

2.2 Membránové síly při nesymetrickém vnějším zatížení

Vnitřní síly membrán jako staticky určitých konstrukcí lze určit z rovnováhy s vnějšími silami na vymezeném prvku [2-8] viz obr.2.2. Složky vnějších sil jsou rozloženy do hlavních os: směr x - tečna k rovnoběžce, směr y - tečna k poledníku, směr z - normála ke střednici uvolněného prvku. Podle počtu neznámých vnitřních sil je nutno sestavit stejný počet rovnovážných rovnic. Pro zvolené úvahy s užitím osově nesymetrického vnějšího zatížení tj. pro nenulové složky p_x , p_y a p_z , vzniknou u rotačně symetrických membrán normálové síly N_α , N_φ a smykové síly $N_{\alpha\varphi}$ a $N_{\varphi\alpha}$. Za předpokladu kladných směrů hlavních os podle obr.2.2 (změna proti [2-8] z důvodů umožnění dalších matematických úprav) a že uvedené jednotkové síly [$N \cdot m^{-1}$] působí na střednici o jednotkové délce $dl_{1,2}$, $dl_{2,3}$ atd. budou síly podle obr.2.2

$$"A" = N_\alpha \cdot r_\alpha \cdot d\varphi$$

$$"A + dA" = \left(N_\alpha + \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha \right) \left(r_\alpha d\varphi + \frac{\partial (r_\alpha d\varphi)}{\partial \alpha} d\alpha \right) \approx N_\alpha \cdot r_\alpha \cdot d\varphi + \frac{\partial (N_\alpha r_\alpha d\varphi)}{\partial \alpha} d\alpha$$

$$"B" = N_\varphi \cdot R_\alpha \cdot d\alpha$$

$$"B + dB" = N_\varphi \cdot R_\alpha \cdot d\alpha + \frac{\partial (N_\varphi \cdot R_\alpha \cdot d\alpha)}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$"AB" = N_{\alpha\varphi} \cdot r_\alpha \cdot d\varphi$$

$$"AB + dAB" = N_{\alpha\varphi} \cdot r_\alpha \cdot d\varphi + \frac{\partial (N_{\alpha\varphi} \cdot r_\alpha \cdot d\varphi)}{\partial \alpha} d\alpha$$

$$"BA" = N_{\varphi\alpha} \cdot R_\alpha \cdot d\alpha$$

$$"BA + dBA" = N_{\varphi\alpha} \cdot R_\alpha \cdot d\alpha + \frac{\partial (N_{\varphi\alpha} \cdot R_\alpha \cdot d\alpha)}{\partial \varphi} d\varphi$$

Z nich lze sestavit rovnovážné rovnice vyplývající z řezů poledníkového - obr.2. 2b a rovnoběžkového - obr.2.2c.

1) Součet sil ve směru tečny k rovnoběžce - osa x

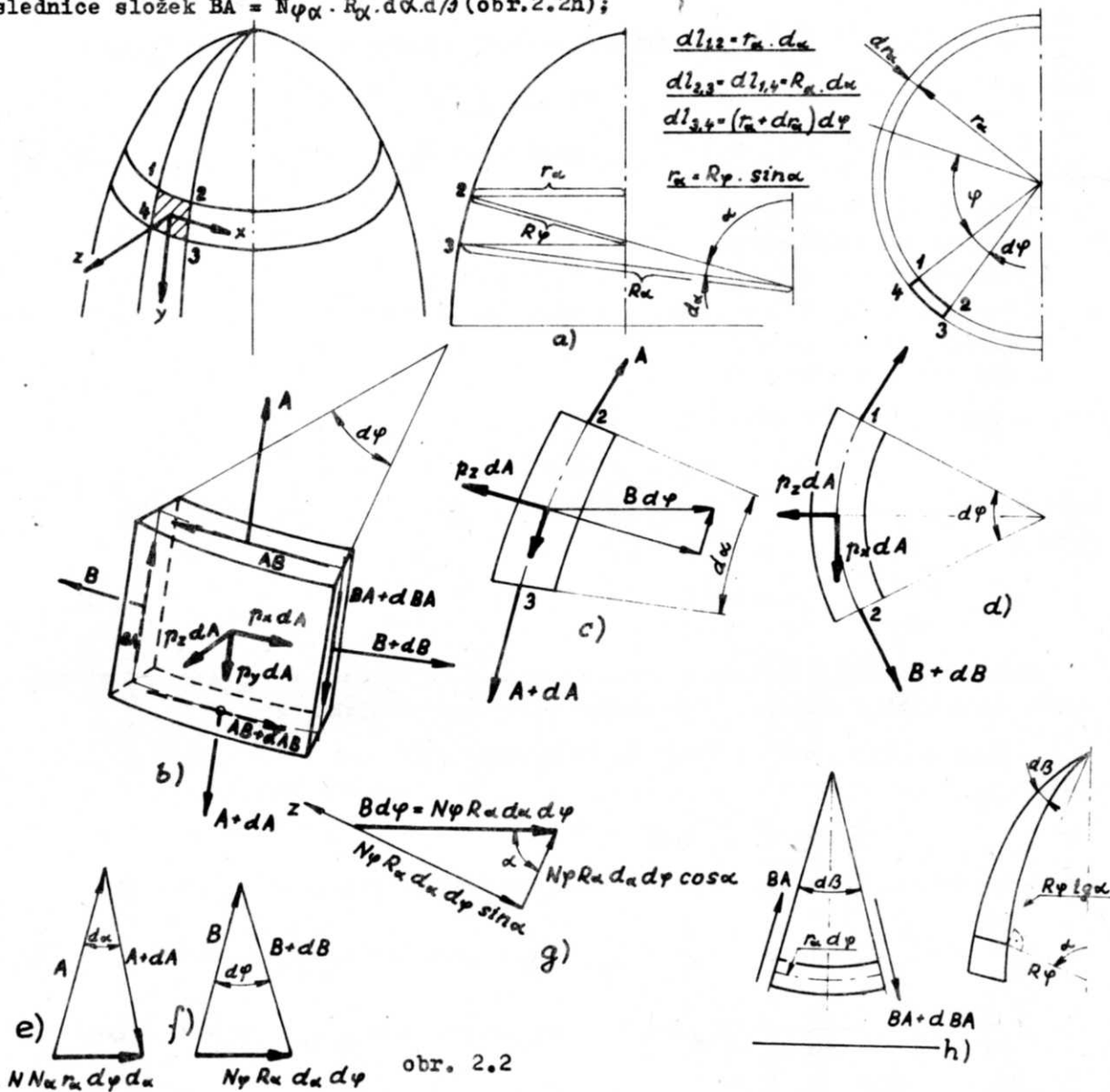
a) výslednice vnějších sil $p_x dA = p_x r_\alpha \cdot d\varphi \cdot R_\alpha \cdot d\alpha$

b) výslednice sil $A = 0$

c) výslednice sil $B = \frac{\partial(N_\varphi R_\alpha \cdot d\alpha)}{\partial\varphi} d\varphi$

d) výslednice sil $AB = \frac{\partial(N_\varphi r_\alpha \cdot d\alpha)}{\partial\alpha} d\alpha$

e) s ohledem na to, že plochy řezu 1 a 2 nejsou rovnoběžné, bude působit výslednice složek $BA = N_\varphi r_\alpha \cdot R_\alpha \cdot d\alpha \cdot d\beta$ (obr. 2.2h);



zde úhel $d\beta$ je vrcholový úhel řezu, z obr. je zřejmé, že $d\beta = \frac{r_\alpha \cdot d\varphi}{R_\varphi \cdot \tan\alpha}$,
 proto výslednice BA do směru x je $N_\varphi r_\alpha \cdot R_\alpha \cdot d\alpha \cdot \frac{r_\alpha \cdot d\varphi}{R_\varphi \cdot \tan\alpha}$

Součet vnitřních a vnějších sil:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{N_\varphi \cdot R_\alpha \cdot d\alpha}{\partial\varphi} \right) d\varphi + \frac{\partial}{\partial\alpha} (N_\alpha \varphi \cdot r_\alpha \cdot d\varphi) d\alpha + \frac{1}{R_\varphi \cdot \tan\alpha} N_\varphi r_\alpha \cdot R_\alpha \cdot d\alpha \cdot d\varphi + p_x \cdot r_\alpha \cdot d\varphi \cdot R_\alpha \cdot d\alpha = 0$$

Krácením $d\alpha$, $d\varphi$ a dosazením za $r_\alpha = R_\varphi \cdot \sin\alpha$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} (N_\varphi \cdot R_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\alpha} (N_\alpha \varphi \cdot R_\varphi \cdot \sin\alpha) + N_\varphi r_\alpha \cdot R_\alpha \cdot \cos\alpha = -p_x \cdot R_\alpha \cdot R_\varphi \cdot \sin\alpha \quad (2-1)$$

2) Součet sil do směru tečny k poledníku - osa y:

- a) výslednice vnějších sil $p_y dA = p_y r_\alpha \cdot d\varphi \cdot R_\alpha \cdot d\alpha$
- b) výslednice sil A $= \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_\alpha r_\alpha \cdot d\varphi) \cdot d\alpha$
- c) výslednice sil B (obr. 2.2f,g) $= N_\varphi \cdot R_\alpha \cdot d\alpha \cdot d\varphi \cdot \cos \alpha$
- d) výslednice sil AB = 0
- e) výslednice sil BA $= \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi r_\alpha \cdot d\alpha) \cdot d\varphi$

Součet vnitřních a vnějších sil:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (N_\alpha r_\alpha \cdot d\varphi) \cdot d\alpha + \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi r_\alpha \cdot d\alpha) \cdot d\varphi - N_\varphi R_\alpha \cdot d\alpha \cdot d\varphi \cdot \cos \alpha = -p_y r_\alpha R_\alpha d\alpha \cdot d\varphi$$

Opět krácením $d\alpha$, $d\varphi$ a dosazením za $r_\alpha = R_\varphi \cdot \sin \alpha$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (N_\alpha R_\varphi \sin \alpha) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi R_\alpha) - N_\varphi R_\alpha \cos \alpha = -p_y R_\alpha R_\varphi \sin \alpha \quad (2-2)$$

3) součet sil do směru normály - osa z:

- a) výslednice vnějších sil $p_z dA = p_z r_\alpha \cdot d\varphi \cdot R_\alpha \cdot d\alpha$
- b) výslednice sil A (obr. 2.2e) $= N_\alpha r_\alpha \cdot d\varphi \cdot d\alpha$
- c) výslednice sil B (obr. 2.2f,g) $= N_\varphi \cdot R_\alpha \cdot d\alpha \cdot d\varphi \cdot \sin \alpha$
- d) výslednice sil AB = 0
- e) výslednice sil BA = 0

Součet vnitřních a vnějších sil:

$$N_\alpha r_\alpha \cdot d\varphi \cdot d\alpha + N_\varphi R_\alpha \cdot d\varphi \cdot d\alpha \cdot \sin \alpha = +p_z r_\alpha R_\alpha \cdot d\alpha \cdot d\varphi$$

Opětým dosazením za r_α , krácením $d\alpha$, $d\varphi$, $\sin \alpha$ dostáváme známou Laplaceovu rovnici

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\varphi}{R_\varphi} = +p_z \quad (2-3)$$

4) Momentová podmínka ke středu prvku na ramenech $R_\alpha \cdot d\alpha$ a $r_\alpha \cdot d\varphi$ za předpokladu, že poloměry křivosti jsou mnohem větší než tloušťka s

$$N_\alpha \varphi \cdot r_\alpha \cdot d\varphi \cdot R_\alpha \cdot d\alpha - N_\varphi \alpha \cdot R_\alpha \cdot d\alpha \cdot r_\alpha \cdot d\varphi = 0$$

platí, že

$$N_\alpha \varphi \equiv N_\varphi \alpha = S \quad (2-4)$$

S ohledem na rovnici (2-4) lze nyní potřebné rovnice redukovat na tři, tj.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_\alpha R_\varphi \sin \alpha) + \frac{\partial S}{\partial \varphi} R_\alpha - N_\varphi R_\alpha \cos \alpha &= -p_x R_\alpha R_\varphi \sin \alpha \\ \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} R_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} (S R_\varphi \sin \alpha) + S R_\alpha \cos \alpha &= -p_y R_\alpha R_\varphi \sin \alpha \\ \frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\varphi}{R_\varphi} &= +p_z \end{aligned} \right\} (2-5)$$

Pro kulovou membránu platí, že $R_\alpha \equiv R_\varphi = R$ a

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_\alpha \sin \alpha) + \frac{\partial S}{\partial \varphi} - N_\varphi \cos \alpha &= -p_x R \sin \alpha \\ \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (S \sin \alpha) + S \cos \alpha &= -p_y R \sin \alpha \end{aligned} \right\} (2-5b)$$

$$N_{\alpha} + N_{\varphi} = + p_z R$$

Určitého zjednodušení lze dosáhnout dosazením Laplaceovy algebraické rovnice do prvních dvou parciálních diferenciálních rovnic např. $N_{\varphi} = -N_{\alpha} + p_z R$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (N_{\alpha} \cdot \sin \alpha) + \frac{\partial S}{\partial \varphi} + N_{\alpha} \cdot \cos \alpha = (-p_x \cdot \sin \alpha + p_z \cdot \cos \alpha) R$$

$$-\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (S \cdot \sin \alpha) + S \cdot \cos \alpha = - (p_y \cdot \sin \alpha - \frac{\partial p_z}{\partial \varphi}) R$$

Dalšího zjednodušení se dosáhne tím, že derivace součinu $d/d\alpha (N_{\alpha} \cdot \sin \alpha) = \sin \alpha \cdot dN_{\alpha}/d\alpha + N_{\alpha} \cdot \cos \alpha$ a pak $\sin \alpha \cdot dN_{\alpha}/d\alpha = d/d\alpha (N_{\alpha} \cdot \sin \alpha) - N_{\alpha} \cdot \cos \alpha$; podobně $d/d\alpha (S \cdot \sin \alpha) = \sin \alpha \cdot dS/d\alpha + S \cdot \cos \alpha$ a $\sin \alpha \cdot dS/d\alpha = d/d\alpha (S \cdot \sin \alpha) - S \cdot \cos \alpha$. Dělením obou rovnic $\sin \alpha$ je konečná úprava rovnic pro kulovou membránu

$$\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \alpha} + 2 \cdot N_{\alpha} \cdot \cotg \alpha + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \alpha} = R \cdot (-p_x + p_z \cdot \cotg \alpha) \quad (2-5c)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} + 2 \cdot S \cdot \cotg \alpha - \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \alpha} \frac{1}{\sin \alpha} = R \cdot (-p_y + \frac{\partial p_z}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \alpha})$$

Tyto dvě rovnice neobsahují proměnnou N_{φ} .

2.2.1 Obecná zatížení rotačně symetrických membrán - řešení řadami

V podstatě se jedná v (2-5c) o dvě parciální diferenciální rovnice se dvěma závisle proměnnými α a φ . Jejich přímé řešení je obtížné; proto pro některá vnější zatížení např. větrem, jež se dají vyjádřit periodickými funkcemi, se použilo redukce na jednu proměnnou pomocí rozkladu jak vnějšího zatížení, tak i vnitřních sil pomocí Fourierových řad. Pro počet členů řady n lze funkce $p_x, p_y, p_z = f(\alpha, \varphi)$ zapsat jako funkce jedné proměnné

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{xn} \cdot \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{P}_{xn} \cdot \sin n\varphi \\ P_y &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{yn} \cdot \sin n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{P}_{yn} \cdot \cos n\varphi \\ P_z &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{zn} \cdot \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{P}_{zn} \cdot \sin n\varphi \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

a podobně

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} N_{\alpha n} \cdot \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{N}_{\alpha n} \cdot \sin n\varphi \\ N_{\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} N_{\varphi n} \cdot \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{N}_{\varphi n} \cdot \sin n\varphi \\ S &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot \sin n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{S}_n \cdot \cos n\varphi \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

kde vždy první člen vztahu představuje symetrickou a druhý označený s pruhem anti-symetrickou část. Dosazením těchto závislostí do (2-5c) vždy pro jednu část lze parciální diferenciální rovnice přepsat na obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{d N_{\alpha n}}{d \alpha} + 2 \cdot N_{\alpha n} \cdot \cotg \alpha + n \frac{S_n}{\sin \alpha} = R \cdot (-p_{xn} + p_{zn} \cdot \cotg \alpha) \quad (2-8)$$

$$\frac{d S_n}{d \alpha} + 2 \cdot S_n \cdot \cotg \alpha - N_{\alpha n} \frac{n}{\sin \alpha} = R \cdot (-p_{yn} + p_{zn} \frac{n}{\sin \alpha})$$

Rovnice s antimetrickými členy by byly podobné s označením $\overline{N_{\alpha n}}$, $\overline{S_n}$, $\overline{p_{xn}}$, a $\overline{p_{zn}}$. Stále se jedná o dvě vzájemně závislé rovnice. Zavedením skupinových neznámých X a Y daných jako součet a rozdíl neznámých $N_{\alpha n}$ a S_n tj. $X_n = N_{\alpha n} + S_n$ a $Y_n = N_{\alpha n} - S_n$, přejdou jednoduchým způsobem na dvě rovnice vzájemně nezávislé:

$$\frac{d X_n}{d \alpha} + (2 \cotg \alpha + \frac{n}{\sin \alpha}) \cdot X_n + R \cdot (p_{xn} + p_{yn} - \frac{n + \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot p_{zn}) = 0 \quad (2-9)$$

$$\frac{d Y_n}{d \alpha} + (2 \cotg \alpha - \frac{n}{\sin \alpha}) \cdot Y_n + 2R \cdot (p_{xn} - p_{yn} + \frac{n - \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot p_{zn}) = 0$$

Tvar těchto rovnic odpovídá obecnému typu lineární diferenciální rovnice I.řádu $y' + P(x)y + Q(x) = 0$, pro kterou lze nalézt řešení

$$y = [C - \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx] \cdot e^{-\int P(x) dx}$$

Při aplikaci na (2-9) s integrační konstantou C lze nalézt, že

$$P(x) = 2 \cotg \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} \quad ; \quad Q(x) = R (p_{xn} + p_{yn} - \frac{n + \cos \alpha}{\sin \alpha} p_{zn})$$

a funkce $e^{n \int \frac{d\alpha}{\sin \alpha}} = e^{n \ln \operatorname{tg} \alpha / 2} = \operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{2}$; $e^{-n \int \frac{d\alpha}{\sin \alpha}} = \operatorname{cotg}^n \frac{\alpha}{2}$

$$e^{2 \int \cotg \alpha \cdot d\alpha} = e^{2 \ln \sin \alpha} = \sin^2 \alpha \quad ; \quad e^{-2 \int \cotg \alpha \cdot d\alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Použitím uvedených postupů v rovnici (2-9) lze vypočítat X_n a Y_n

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \frac{\operatorname{cotg}^n \alpha / 2}{\sin^2 \alpha} \left[C_{xn} - R \int \left(p_{xn} + p_{yn} - p_{zn} \frac{n + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{2} d\alpha \right] \\ Y_n &= \frac{\operatorname{tg}^n \alpha / 2}{\sin^2 \alpha} \left[C_{yn} - R \int \left(p_{xn} - p_{yn} + p_{zn} \frac{n - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{cotg}^n \frac{\alpha}{2} d\alpha \right] \end{aligned} \right\} (2-10)$$

s integračními konstantami C_{xn} a C_{yn}

Výsledné membránové síly $N_{\alpha n}$ a S_n se získají zpětným dosazením do podmínek pro neznámé X_n a Y_n . N_{α} a S se vypočtou vynásobením příslušným $\cos n \varphi$ nebo $\sin n \varphi$. Tak

$$N_{\alpha n} = \frac{X_n + Y_n}{2} \quad \text{a} \quad S_n = \frac{X_n - Y_n}{2} \quad (2-11)$$

Konkrétní případ řešení touto metodou lze ukázat na zatížení kulové membrány větrem. Nejjednodušší bude použití pouze prvního členu řady. Při základních úvahách předpokládejme, že $p_x \equiv p_y = 0$ a $p_z = p_{z1} \cdot \cos \varphi$ s hodnotou $p_{z1} = -p_v \cdot \sin \alpha$. Pak neznámé

$$X_1 = \frac{\cotg \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha} \left[C_x - R \cdot p_v \int (1 + \cos \alpha) \cdot \sin^2 \alpha \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \cdot d\alpha \right]$$

$$Y_1 = \frac{\tg \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha} \left[C_y + R \cdot p_v \int (1 - \cos \alpha) \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot d\alpha \right]$$

Po matematické úpravě $\tg \alpha/2 = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ a $\cotg \alpha/2 = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$, bude

$$X_1 = \frac{\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha} \left[C_x - R \cdot p_v \int (1 + \cos \alpha) \sin^2 \alpha \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} d\alpha \right]$$

$$= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \left[C_x + R \cdot p_v \cdot \left(\cos \alpha - \frac{\cos^3 \alpha}{3} \right) \right] \quad \text{kde}$$

$$\int \sin^3 \alpha d\alpha = \int (1 - \cos^2 \alpha) \sin \alpha d\alpha = - \int (1 - z^2) dz = - \left(\frac{z^3}{3} - z + C \right) =$$

$$= - \left(\frac{\cos^3 \alpha}{3} - \cos \alpha + C \right)$$

Podobně

$$Y_1 = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \left[C_y - R \cdot p_v \cdot \left(\cos \alpha - \frac{\cos^3 \alpha}{3} \right) \right]$$

Pro symetrickou část funkce lze již stanovit velikost sil N_α a S

$$N_\alpha = N_{\alpha 1} \cdot \cos \varphi = \frac{X_1 + Y_1}{2} \cos \varphi = \frac{\cos \varphi}{2 \cdot \sin^3 \alpha} \left[(C_x + C_y) + (C_x - C_y) \cdot \cos \alpha + \right.$$

$$\left. + 2R \cdot p_v \cdot (\cos \alpha - \cos^3 \alpha) \right] \quad (2-12a)$$

$$S = S_1 \cdot \sin \varphi = \frac{X_1 - Y_1}{2} \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{2 \cdot \sin^3 \alpha} \left[(C_x - C_y) + (C_x + C_y) \cdot \cos \alpha + \right.$$

$$\left. + 2R \cdot p_v \cdot (\cos \alpha - \cos^3 \alpha) \right] \quad (2-12b)$$

Dalším úkolem je určení integračních konstant C_x a C_y . S ohledem na matematický tvar sil se jmenovatelem $\sin^3 \alpha$ je problém vypočítat průběh v blízkosti $\alpha = 0$. Z charakteru zatížení vyplývá, že funkce jak pro N_α , tak i pro S musí mít hladký průběh v celém rozsahu α a to znamená, že ve všech bodech, a to i pro $\alpha = 0$, musí mít konečné hodnoty. S ohledem na zlomek $1/\sin^2 \alpha$ je podle l'Hospitalova pravidla nutné, aby pro $\alpha = 0$ byl čítec rovný nule až do druhé derivace.

1.KROK: čítec v rovnici (2-12a) se musí pro $\alpha = 0$ rovnat nule

$$\left[C_x + C_y + (C_x - C_y) \cos \alpha + 2R \cdot p_v \left(\cos \alpha - \frac{\cos^3 \alpha}{3} \right) \right]_{\alpha=0} = 0$$

$$C_x + C_y + C_x - C_y + 2R \cdot p_v \cdot \frac{2}{3} = 0 \quad \text{a odtud } C_x = -\frac{2}{3} R \cdot p_v \quad (2-13a)$$

2.KROK: 1.derivace pro $\alpha = 0$ se musí rovnat nule

$$\frac{d[\quad]}{d\alpha} = \left\{ - (C_x - C_y) \cdot \sin \alpha + 2R \cdot p_v \left[\sin \alpha \cdot \left(\cos \alpha - \frac{\cos^3 \alpha}{3} \right) + \cos \alpha \cdot \sin^3 \alpha \right] \right\}_{\alpha=0} = 0$$

S ohledem na to, že ve všech členech je $\sin \alpha$, musí se celý čitatel v první derivaci rovnat nule.

3.KROK: 2.derivace pro $\alpha = 0$ se musí rovnat nule.

$$\frac{d^2[\]}{d\alpha^2} = \left\{ (C_x - C_y) \cdot \cos \alpha - 2R \cdot p_v \cdot \left[\cos \alpha \cdot \left(\cos \alpha - \frac{\cos^3 \alpha}{3} \right) - 2\sin^4 \alpha + 3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \right] \right\} = 0$$

$$C_x - C_y - 2R \cdot p_v \left[1 - \frac{1}{3} \right] = 0 \quad \text{a odtud}$$

$$C_y = \frac{2}{3} R \cdot p_v \quad (2-13b)$$

Dosazením C_x a C_y do vztahů pro síly (2-12a,b)

$$N_\alpha = -\frac{R \cdot p_v}{3} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \alpha} \cdot (2 \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) \quad (2-14a)$$

Z Laplaceovy rovnice

$$\begin{aligned} N_\varphi &= R \cdot p_z - N_\alpha = -R \cdot p_v \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi - N_\alpha = \\ &= R \cdot p_v \cdot \cos \varphi \cdot \left[\frac{1}{3 \cdot \sin^3 \alpha} (2 \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) - \sin \alpha \right] \end{aligned} \quad (2-14b)$$

$$S = -\frac{R \cdot p_v}{3} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin^3 \alpha} \cdot (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) \quad (2-14c)$$

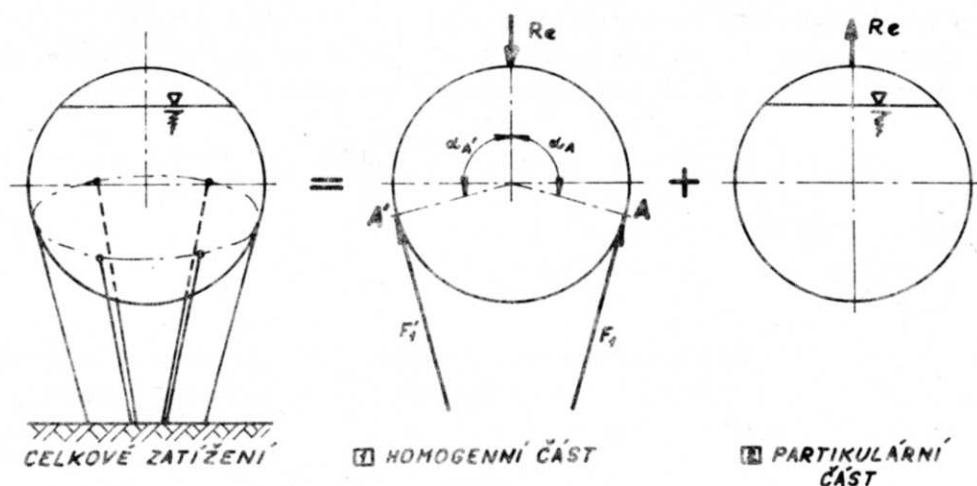
Pro zatížení, kde se uvažuje větší počet členů řady, by např. pro 2 členy $p_z = p_{z2} \cdot \cos 2\varphi = -p_v \sin \alpha \cos 2\varphi$ a podobně pro další. Pro jiná zatížení jako jsou např. osamělé síly a momenty se tato metoda nehodí. Homogenní řešení rovnic (2-8), tj. bez členů p_{xn} , p_{yn} a p_{zn} , by vedlo pouze na zatížení v pólech. Zde se ve skutečnosti taková zatížení nevyskytují a zároveň taková místa odporují podmínkám čistě membránového stavu.

2.2.2 Zajištění membránového stavu při místním účinku osamělých sil a momentů

Jednou z metod umožňující zachování membránového stavu při obecném zatížení místními osamělými silami a momenty je řešení pomocí komplexní proměnné. Nejpravděpodobnějším užitím metody je u kulové membrány velkoobjemového zásobníku - - uložené na osamělých podporách. Proto řešení odvozené Goldenveiserem [2-18], rozpracované u nás v ÚAM-VŽKG v Brně [2-19], budou vysvětlena na několika případech. Umožňují z rovnováhy sil v místě podpor a reakce v pólu určit superpozicí se spojitým zatížením od zatížení rotačně symetrického, např. vlastní tíhy, hmotnosti náplně atd., zatížení (membránové síly), které odpovídají skutečnému průběhu v membráně. Princip řešení je zřejmý z obr. 2.3. Homogenní tvar diferenciálních rovnic (2-5c), tj. bez pravé strany, řešený metodou komplexní proměnné, znázorňuje část značená [1]; Partikulární integrál zahrnující vnější zatížení pak část [2]. Superpozicí lze získat celkový průběh vnitřních sil.

2.2.2.1 Řešení komplexní proměnnou - homogenní část

Homogenní tvar rovnic pro kouli podle (2-5c):



obr.2.3

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \alpha} \cdot \sin \alpha + 2N_{\alpha} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} \sin \alpha + 2S \cdot \cos \alpha - \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

Vynásobením rovnic členem $-\sin^2 \alpha$ a zavedením nových neznámých

$$n = -N_{\alpha} \cdot \sin^2 \alpha \quad ; \quad s = S \cdot \sin^2 \alpha \quad (2-16)$$

přejdou rovnice (2-15) do tvaru

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha \cdot \frac{\partial n}{\partial \alpha} - \frac{\partial s}{\partial \varphi} &= 0 \\ \sin \alpha \cdot \frac{\partial s}{\partial \alpha} + \frac{\partial n}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

Pro převod na známý tvar komplexně proměnných je třeba z těchto rovnic odstranit $\sin \alpha$, což lze provést např. zavedením nové proměnné $\xi = \ln \operatorname{tg} \alpha/2$ a $\partial / \partial \xi = \sin \alpha \cdot \partial / \partial \alpha$, pročež

$$\frac{\partial n}{\partial \xi} - \frac{\partial s}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{\partial s}{\partial \xi} + \frac{\partial n}{\partial \varphi} = 0 \quad (2-18)$$

Najde-li se pro tyto rovnice řešení, pak membránové síly

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha} &= -n(\xi) \cdot \cos h^2 \xi = -N_{\varphi} \\ S &= s(\xi) \cdot \cos h^2 \xi \end{aligned} \right\} \quad (2-19)$$

Rovnice (2-18) jsou Cauchy-Riemannovými podmínkami pro existenci mezi reálnou a imaginární částí určité funkce

$$N(\xi) = n + is = \operatorname{Re} \{ N \} + i \cdot \operatorname{Im} \{ N \} \quad (2-20)$$

komplexní proměnné

$$\xi = x + iy = e^{\xi} \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \quad (2-21)$$

Reálná část funkce, která popisuje určitý membránový stav, vyjadřuje vliv

normálních a imaginární část vliv smykových sil.

Postup řešení je nyní proveden podle [2-19], [2-5]; základní úprava vychází ze tvaru funkce odvozené z Maclaurinovy řady (upravené Taylorovy řady).

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

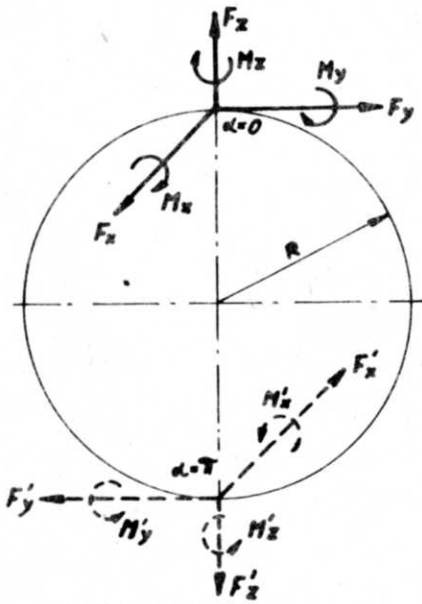
$$N(\xi) = b_1 \xi + b_0 + b_{-1} \xi^{-1} \quad (2-22)$$

kde b_1 , b_0 a b_{-1} jsou komplexní konstanty vyjadřující jednak složky zatížení v pólu $\alpha = 0$ (obr.2.4) a jednak zatížení vyplývající ze statické rovnováhy sil a momentů v protipólu $\alpha = \pi$. Tak

$$b_0 = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{F_z}{R} \right) + i \cdot \frac{M_z}{R^2}$$

$$b_1 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2 \cdot F_x}{R} - \frac{M_y}{R^2} \right) + \frac{i}{2\pi} \left(\frac{2 \cdot F_y}{R} + \frac{M_x}{R^2} \right)$$

$$b_{-1} = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{M_y}{R^2} - i \cdot \frac{M_x}{R^2} \right) \quad (2-23)$$



obr.2.4

Pro výpočet uvedených konstant je však rozhodující zatížení v místě $\alpha = 0$.

1) Zatížení v pólu:

Jednoduchý případ výpočtu pro zatížení silou

F_y představuje (obr.2.5). Podle (2-23) bude

$$b_0 \neq b_{-1} = 0 \text{ a } b_1 = i \cdot F_y / \pi R.$$

Tím nabude pomocná funkce $N(\xi)$ tvar

$$N(\xi) = i \cdot \frac{F_y}{\pi R} \cdot \xi = i \cdot \frac{F_y}{\pi R} \cdot e^{\epsilon} (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

Z čehož reálná část

$$n = \text{Re} \{ N(\xi) \} = i^2 \frac{F_y}{\pi R} e^{\epsilon} \cdot \sin \varphi = -\frac{F_y}{\pi R} e^{\epsilon} \cdot \sin \varphi$$

Při přechodu na proměnnou α se použije transformace

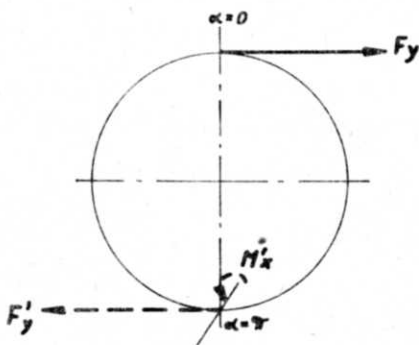
$$n = -\frac{F_y}{\pi R} e^{\ln \text{tg } \alpha / 2} \sin \varphi = -\frac{F_y}{\pi R} \text{tg } \frac{\alpha}{2} \sin \varphi$$

Pak membránová síla N_α z rovnice (2-16)

$$N_\alpha = -\frac{n}{\sin^2 \alpha} = \frac{F_y}{\pi R} \cdot \frac{\text{tg } \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha} \cdot \sin \varphi = -N \varphi$$

Pro výpočet smykové síly se použije imaginární část funkce

$$is = \text{Im} \{ N(\xi) \} = i \frac{F_y}{\pi R} \cdot e^{\epsilon} \cdot \cos \varphi ;$$



obr.2.5

$$s = \frac{F_y}{\pi \cdot R} e^{\ln \operatorname{tg} \alpha / 2} \cos \varphi = \frac{F_y}{\pi \cdot R} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \varphi$$

Smyková síla podobně jako N_α bude podle (2-16)

$$S = \frac{s}{\sin^2 \alpha} = \frac{F_y}{\pi R} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha} \cos \varphi$$

Pro zajištění rovnováhy musí v pólu $\alpha = \pi$ působit nejen síla F_y' stejné velikosti, ale opačného smyslu, ale i moment udržující protirovnováhu vůči dvojici sil F_y a F_y' tedy $M_x = F_y \cdot 2R$, jinak by došlo k roztočení koule.

Tento stav naznačený v obr.(2.5) neodpovídá reálnému zatížení. Je třeba definovat membránový stav pro zatížení v obecném bodě.

2) Zatížení v obecném bodě:

V následující části bude proveden rozbor problematiky při zatížení vnějšími silami a momenty v obecném bodě na kouli. Tento bod je jednoznačně určen souřadnicemi α_A a φ_A (obr.2.6). Protože lépe bude možno orientovat síly v pravouhlém systému, zavedou se souřadnice x, y, z , kde bod A bude definován hodnotami x_A, y_A, z_A přičemž pro transformaci souřadnic platí, že $x_A = R \cdot \sin \alpha_A \cdot \cos \varphi_A$, $y_A = R \cdot \sin \alpha_A \cdot \sin \varphi_A$ a $z_A = R \cdot \cos \alpha_A$. Kladný smysl udávají šipky na obrázku, momenty točí proti silám ve směru hodinových ručiček.

Rovnováhu s daným zatížením v bodě A tvoří pouze reakce v pólu $\alpha = 0$. Pro tento případ odvodil opět Goldenveiser [2-18] funkci komplexní proměnné ve tvaru

$$N(\xi) = C_1 \frac{\xi_A}{\xi(\xi - \xi_A)} + \frac{C_2}{(\xi - \xi_A)^2} + \frac{C_3}{(\xi - \xi_A)^3} \quad (2-24)$$

kde

obr.2.6

ξ_A - komplexní proměnná odpovídající bodu A

ξ - komplexní proměnná odpovídající libovolnému bodu

C_1, C_2, C_3 - komplexní konstanty závislé na zatížení v bodě A

Je-li $X = 1/2\pi$, pak

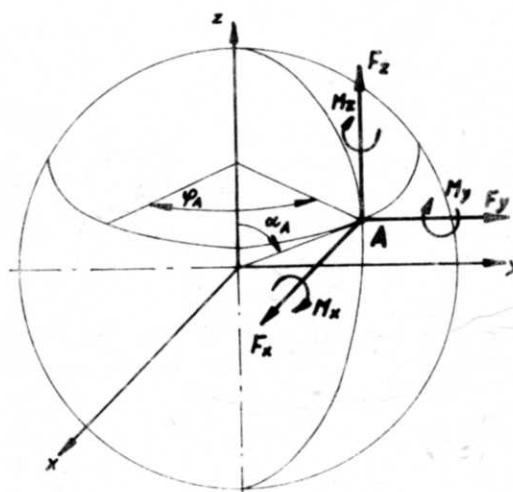
$$C_1 = -X \cdot b_x + \frac{X}{i} \cdot b_y = -X \cdot (b_x + i b_y)$$

$$C_2 = -X [b_x \cdot (2 \cdot \xi_A - \xi_A^3) + i \cdot b_y \cdot (2 \cdot \xi_A + \xi_A^3) + 3 \cdot b_z \cdot \xi_A^2] \quad (2-25)$$

$$C_3 = -X [b_x \cdot (\xi_A^2 - \xi_A^4) + i \cdot b_y \cdot (\xi_A^2 + \xi_A^4) + 2 \cdot b_z \cdot \xi_A^3]$$

s hodnotami

$$b_j = \frac{F_j}{R} - i \cdot \frac{M_j}{R^2} \quad (2-26)$$



pro $j = x, y, z$

Jako příklad budiž uvedeno řešení [2-5] podle obr.2.7, kde zatížení v bodě A představuje směr tečny k poledníku F. Tato síla je v rovnováze se stejně

velkou silou F' opačného směru a s momentem M' v pólu $\alpha = 0$. Rozkladem síly a momentu na složky bude

$$F_x = -F \cdot \cos \alpha_A \cdot \cos \varphi_A \quad M_x = -F \cdot R \cdot \sin \varphi_A$$

$$F_y = -F \cdot \sin \alpha_A \cdot \cos \varphi_A \quad M_y = F \cdot R \cdot \cos \varphi_A$$

$$F_z = F \cdot \sin \alpha_A \quad M_z = 0$$

Z transformace souřadnic vyplývá, že $\sin \alpha = 1/\cosh \epsilon$ a $\cos \alpha = -\tanh \epsilon$, což po dosazení do (2-26)

$$b_x = \frac{F}{R} (\cos \varphi_A \cdot \tanh \epsilon_A + i \cdot \sin \varphi_A)$$

$$b_y = \frac{F}{R} (\sin \varphi_A \cdot \tanh \epsilon_A - i \cdot \cos \varphi_A)$$

$$b_z = \frac{F}{R} \frac{1}{\cosh \epsilon_A}$$

Z předchozího výkladu víme, že $\xi = e^\epsilon \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ a $\xi^{-1} = e^{-\epsilon} \cdot (\cos \varphi - i \cdot \sin \varphi)$.

Pak lze vztahy pro b_x až b_z přepsat

obr.2.7

$$b_x = \frac{F}{R} \left(\cos \varphi_A \frac{\sinh \epsilon_A}{\cosh \epsilon_A} + i \cdot \sin \varphi_A \right) = \frac{F}{2R \cdot \cosh \epsilon_A} \left[\cos \varphi_A \cdot (e^{\epsilon_A} - e^{-\epsilon_A}) + i \cdot \sin \varphi_A \cdot (e^{\epsilon_A} + e^{-\epsilon_A}) \right]$$

$$= \frac{F}{2R \cdot \cosh \epsilon_A} \left[e^{\epsilon_A} \cdot (\cos \varphi_A + i \sin \varphi_A) - e^{-\epsilon_A} \cdot (\cos \varphi_A - i \sin \varphi_A) \right] = \frac{F}{2R \cdot \cosh \epsilon_A} (\xi_A - \xi_A^{-1})$$

; podobně lze spočítat, že

$$b_y = -\frac{i \cdot F}{2R \cdot \cosh \epsilon_A} (\xi_A + \xi_A^{-1}) \quad ; \quad b_z = -\frac{F}{R \cdot \cosh \epsilon_A}$$

Po dosazení do konstant C_1 až C_3

$$C_1 = -X (b_x + b_y) = -\frac{F}{4\pi R \cdot \cosh \epsilon_A} \left[(\xi_A - \xi_A^{-1}) - i^2 \cdot (\xi_A + \xi_A^{-1}) \right] =$$

$$= -\frac{F \cdot \xi_A}{2\pi R \cdot \cosh \epsilon_A}$$

$$C_2 = -X [b_x \cdot (2\xi_A - \xi_A^3) + i \cdot b_y \cdot (2\xi_A + \xi_A^3) + 3 \cdot b_z \cdot \xi_A^2] =$$

$$= \frac{F}{4\pi R \cdot \cosh \epsilon_A} \left[(\xi_A - \xi_A^{-1}) \cdot (2\xi_A - \xi_A^3) + (\xi_A + \xi_A^{-1}) \cdot (2\xi_A + \xi_A^3) + 6 \cdot \xi_A^2 \right] =$$

$$= 0$$

$C_3 = 0$ a dosazením do základních rovnic (2-24)

$$N(\xi) = C_1 \frac{\xi_A}{\xi(\xi - \xi_A)} = - \frac{F}{2\pi R \cos h \epsilon_A} \frac{\xi_A^2}{\xi_A(\xi - \xi_A)} \quad (2-24a)$$

Rozkladem na reálnou a imaginární část bude

$$N_\alpha = -N_\varphi = \frac{\operatorname{Re}\{N(\xi)\}}{\sin^2 \alpha} = \frac{F \cdot \sin \alpha_A}{2\pi R \cdot \sin^2 \alpha} \frac{\operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}^2(\alpha_A/2) \cos 2(\varphi - \varphi_A) - \operatorname{tg}^3(\alpha_A/2) \cos(\varphi - \varphi_A)}{A}$$

podobně

$$S = \frac{\operatorname{Im}\{N(\xi)\}}{\sin^2 \alpha} = \frac{F \cdot \sin \alpha_A}{2\pi R \sin^2 \alpha} \frac{\operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}^2(\alpha_A/2) \sin 2(\varphi - \varphi_A) - \operatorname{tg}^3(\alpha_A/2) \sin(\varphi - \varphi_A)}{A}$$

kde společný jmenovatel A

$$A = \operatorname{tg}(\alpha/2) \left[\operatorname{tg}^2(\alpha/2) - 2 \operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\alpha_A/2) \cos(\varphi - \varphi_A) + \operatorname{tg}^2(\alpha_A/2) \right]$$

Využití uvedené metody lze ilustrovat na kulovém zásobníku uloženém na podpěrách umístěných tečně k poledníku. Předpokládáme symetrické rozložení podpěr tak, že v jednom řezu působí dvě stejně velké síly F a F' v místě A a A' (obr. 2.8) jako zrcadlový obraz. Pak oba případy lze řešit superpozicí. Rovnováhu silám F a F' zajistí reakce v pólu Re. Je-li komplexní souřadnice pro bod A ξ_A , pak pro bod A' je $-\xi_A$. Superpozicí přejde vztah (2-24a) na tvar

$$\begin{aligned} N(\xi) &= - \frac{F}{2\pi R \cos h \epsilon_A} \frac{\xi_A^2}{\xi_A(\xi - \xi_A)} - \frac{F}{2\pi R \cos h \epsilon_A} \frac{(-\xi_A)^2}{\xi_A[\xi - (-\xi_A)]} = \\ &= - \frac{F}{\pi R \cos h \epsilon_A} \frac{\xi_A^2}{\xi^2 - \xi_A^2} \end{aligned} \quad (2-24b)$$

Rozkladem na reálnou a imaginární část lze spočítat převodem membránové síly

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha = -N_\varphi &= \frac{F \cdot \sin \alpha_A}{\pi R \sin^2 \alpha} \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha/2) \operatorname{tg}^2(\alpha_A/2) \cos 2(\varphi - \varphi_A) - \operatorname{tg}^4(\alpha_A/2)}{B} \\ S &= \frac{F \sin \alpha_A}{\pi R \sin^2 \alpha} \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha/2) \operatorname{tg}^2(\alpha_A/2) \sin 2(\varphi - \varphi_A)}{B} \end{aligned} \right\} \quad (2-27)$$

kde společný jmenovatel $B = \operatorname{tg}^4(\alpha/2) - 2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2) \operatorname{tg}^2(\alpha_A/2) \cos 2(\varphi - \varphi_A) + \operatorname{tg}^4(\alpha_A/2)$. Uvedené řešení platí tedy pro jednu dvojici sil. S ohledem na symetrický průběh membránové síly N_α po obvodu a antimetrický u smykové síly S vzhledem k působišti, lze při sumarizaci účinků pracovat s těmito funkcemi jako s příčinkovou čarou. Tu lze získat vyčíslením rovnic (2-27) pro různé úhly φ . Počátek φ_A se položí přímo do působišti síly F . Protože příčinková čára stanovuje účinek jednotkových sil, tedy pro $F = 1$, získá se příčinková funkce dělením (2-27) členem F/R , tedy

$$n_{\alpha} = \frac{\sin \alpha_A}{\pi \cdot \sin^2 \alpha} \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha/2) \operatorname{tg}^2(\alpha_A/2) \cos 2\varphi - \operatorname{tg}^4(\alpha_A/2)}{C}$$

$$s = \frac{\sin \alpha_A}{\pi \cdot \sin^2 \alpha} \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha/2) \operatorname{tg}^2(\alpha_A/2) \sin 2\varphi}{C}$$

(2-28)

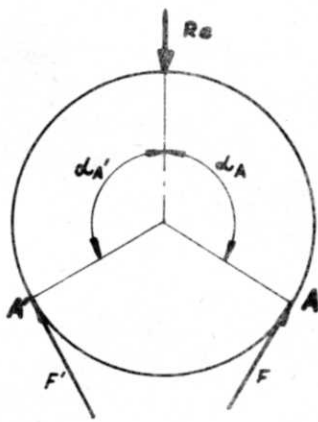
$$\text{kde } C = \operatorname{tg}^4(\alpha/2) - 2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2) \operatorname{tg}^2(\alpha_A/2) \cos 2\varphi + \operatorname{tg}^4(\alpha_A/2)$$

Průběh membránových sil v libovolném místě φ od zatížení dvojicemi sil F_1 a F_1' , F_2 a F_2' atd. lze získat součtem

$$N_{\alpha} = -N_{\varphi} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n F_i \cdot n_{\alpha} (\varphi - \varphi_i) \quad \text{a} \quad S = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n F_i \cdot s (\varphi - \varphi_i)$$

(2-29)

Je třeba si uvědomit, že v místech připojení sil F_i a jejich okolí tj. pro $\alpha = \alpha_A$, nebude platit membránový stav; do vzdálenosti $L = (1 + 2)\sqrt{R \cdot s}$ bude působit diskontinuální napětí [2-8]; z řešení membránové napjatosti je tedy třeba taková místa vyloučit. Je zřejmé, že i hodnocení těchto míst je jiné; většinou se zde umisťují výztuhy pro snížení koncentrátoru napětí.



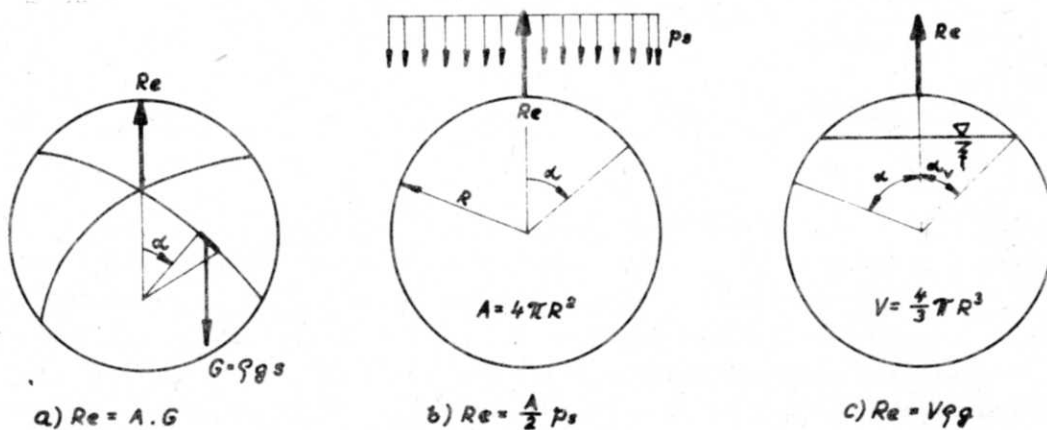
obr.2.8

2.2.2.2 Řešení partikulárního integrálu

V homogenním tvaru rovnic se nevyskytují vnější zatížení. K výpočtu partikulární části obr.2-3 je třeba do reakce v pólu R_e zahrnout všechny možné účinky, jednak spojitých rotačně symetrických zatížení (vlastní tíha, sníh, tíha kapalné náplně) nebo částečně spojitých zatížení působících proti sobě na rovnoběžce nebo poledníku. Uvažuje-li se jednoduchá rotačně symetrická zatížení (obr.2-9a až c) pak pro

a) zatížení vlastní tíhou $G = \rho \cdot g \cdot s$ [MPa], pak reakce R_e je dána velikostí povrchu koule $A = 4\pi \cdot R^2$ a jed-

notkovým zatížením G (plech rozměru 1x1 m); pak reakce $R_e = A \cdot G = 4\pi \cdot R^2 \cdot G$.

a) $R_e = A \cdot G$ b) $R_e = \frac{A}{2} p_s$ c) $R_e = V \rho g$

obr.2.9

Podle (2-8) membránové síly s ohledem na zvolený souřadný systém

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha} &= G \cdot R \frac{1 + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{Re}{4 \pi R} \frac{1 + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ N_{\varphi} &= - \frac{Re}{4 \pi R} \frac{1 + \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \end{aligned} \right\} (2-30)$$

a s ohledem na symetrické zatížení $S = 0$

b) zatížení sněhem (obr.2-9b) p_s se počítá jen na polovině povrchu (horního), tedy $A = 2 \pi R^2$ a reakce $Re = 2 \pi R^2 p_s$; musí platit, že pro $\alpha \geq \pi/2$

$N_{\alpha} \equiv N_{\varphi} = 0$; pro uvažovanou horní část ($\alpha \leq \pi/2$) bude

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha} &= p_s R \cot^2 \alpha = \frac{Re}{2 \pi R} \cot^2 \alpha \\ N_{\varphi} &= \frac{Re}{2 \pi R} (2 \cos \alpha - \cot^2 \alpha) \quad \text{a } S = 0 \end{aligned} \right\} (2-31)$$

c) při zatížení tíhy kapalině náplně bude objem koule $V = 4/3 \cdot \pi \cdot R^3$; při stavu, jaký znázorňuje obr.2-9c $V_V = \pi/3 \cdot R^3 \cdot (1 + \cos \alpha_V)^2 \cdot (2 - \cos \alpha_V)$, kde pro $\alpha_V = 0$ je součin závorek rovný 4. Pak reakce

$$Re = \frac{\pi \cdot R^3}{3} \cdot Q \cdot g \cdot (1 + \cos \alpha_V)^2 \cdot (2 - \cos \alpha_V)$$

Průběh sil v prázdné části koule ($0 \leq \alpha \leq \alpha_V$) bude

$$N_{\alpha V} = - N_{\varphi V} = \frac{Re}{2 \pi R \sin^2 \alpha} ; \quad S_V = 0 \quad (2-32a)$$

Průběh sil v zaplněné části ($\alpha > \alpha_V$)

$$\begin{aligned} N_{\alpha} &= \frac{Q \cdot g \cdot R^2}{6} \left[3 \cdot \cos \alpha_V - 3 \cdot \cos \alpha + \frac{(1 + \cos \alpha) \cdot (2 - \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha} \right] \\ N_{\varphi} &= \frac{Q \cdot g \cdot R^2}{6} \left[3 \cdot \cos \alpha_V - 3 \cdot \cos \alpha - \frac{(1 + \cos \alpha) \cdot (2 - \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha} \right] \end{aligned}$$

$$S = 0 \quad (2-32b)$$

Příklad uložení kulového zásobníku kapaliny na jednotlivých podporách připojených tečně:

Nechť jsou rozměry zásobníku - poloměr $R = 2,5$ m, tloušťka $s = 5$ mm; hustota kapaliny $Q = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, uvažuje se úplně zaplněný zásobník. Je navrženo 8 noh tečně připojených pod úhlem $\alpha_A = 115^\circ$ (obr.2.10). Pro $\alpha_V = 0$ bude velikost reakce

$$Re = 4/3 \pi \cdot R^3 \cdot Q \cdot g = 4/3 \pi \cdot 2,5^3 \cdot 9810 = 642063 \text{ N}$$

a) část homogenního řešení:

Membránové síly budou působit mimo oblast sekundárního napětí tj. mimo oblast (1 až 2) $\sqrt{R \cdot s} = (1 \text{ až } 2) \cdot \sqrt{2,5 \cdot 0,005} = 0,11 \text{ až } 0,22 \text{ m}$; je-li obvod koule na rov-

noběžce pro α_A s poloměrem r_{α_A} . $0 = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sin \alpha_A = 2 \cdot \pi \cdot 2,5 \cdot \sin 115^\circ = 14,236$ m. Pak délky 0,11 až 0,22 odpovídají rozmezí úhlů $(0,11/14,236$ až $0,22/14,236) \cdot 360^\circ = 2,78^\circ$ až $5,56^\circ$. Z toho lze vyvodit závěr, že na každou stranu od připojení nohy ke kouli $\pm 5^\circ$ jak na rovnoběžce, tak i poledníku bude oblast, kterou nelze uvedenou metodou výpočtu hodnotit. Membránová napjatost bude v místech vzdálených od připojených noh více než $\pm 0,198$ m $(= 5/360 \cdot 14,236)$, tj. cca $\pm 0,2$ m.

Podle rovnic (2-29) lze spočítat membránové síly z příčinkových čar n , a (rov.2-28). Např. pro $\alpha_A = 115^\circ$ a $\alpha > 110^\circ$ lze průběh jednotlivých hodnot n_α a s v závislosti na úhlu φ vyjádřit v následující tabulce:

φ	0°	5°	10°	15°	30°	35°	45°	75°	80°	85°
n_α	-1,897	-1,101	-0,56	-0,368	-0,223	-0,209	-0,194	-0,18	-0,179	-0,179
s	0	0,857	0,714	0,538	0,273	0,227	0,16	0,043	0,029	0,014
φ	90°	100°	105°	110°	120°	135°	150°	165°	180°	
n_α	-0,179	-0,179	-0,179	-0,18	-0,184	-0,194	-0,223	-0,368	-1,897	
s	0	-0,029	-0,043	-0,059	-0,093	-0,16	-0,273	-0,538	0	

Z grafického znázornění (obr.2.11) je vidět, že funkce n_α je symetrická a funkce s antisymetrická s ohledem na počátek. Podobně jako pro rovnoběžku $\alpha = 110^\circ$ lze vypočítat průběh příčinkových činitelů pro jiné rovnoběžky.

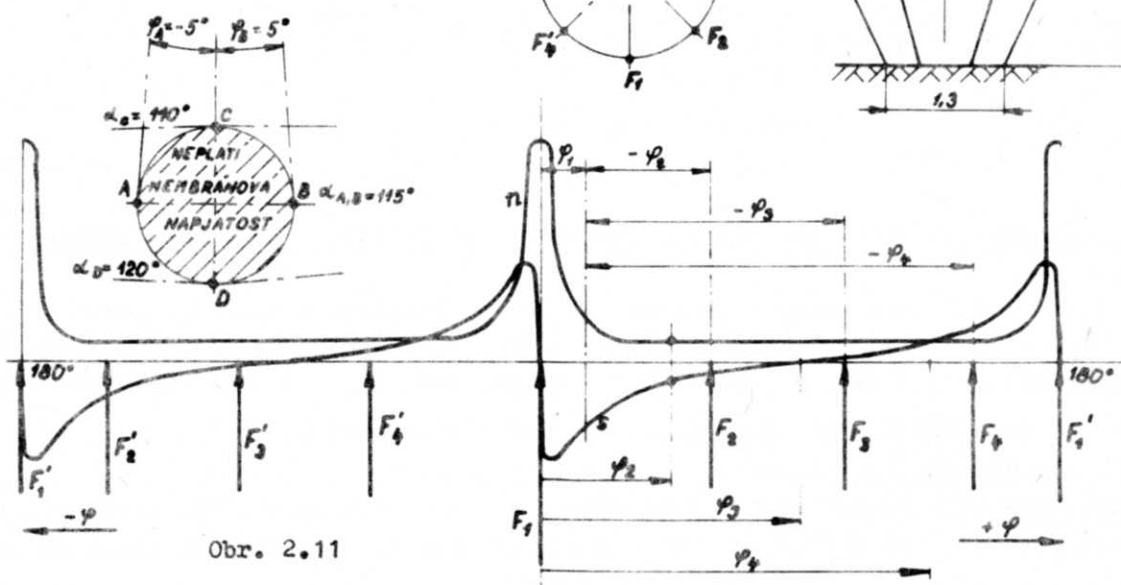
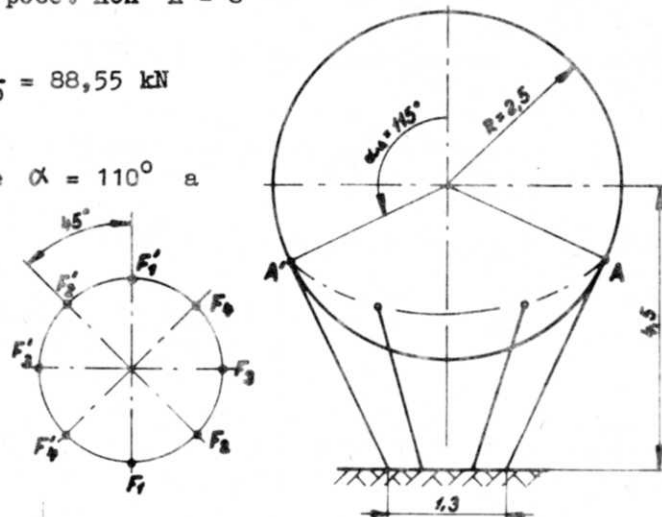
Je-li síla na jednu nohu F_1 a počet noh $n = 8$

$$F_1 = \frac{Re}{n \cdot \sin \alpha_A} = \frac{642}{8 \cdot \sin 115^\circ} = 88,55 \text{ kN}$$

Průběh membránových sil na rovnoběžce $\alpha = 110^\circ$ a

$$\varphi = 0^\circ$$

Obr. 2.10



Obr. 2.11

podle obr.2.11 odpovídá bodu C :

$$N_{\alpha C} = \frac{F_1}{R} [n(0^\circ) + n(45^\circ) + n(90^\circ) + n(135^\circ)] =$$

$$= \frac{88,55}{2,5} (-1,897 - 0,194 - 0,179 - 0,155) = 87,26 \text{ kN} = -N_{\varphi C}$$

$$S_C = \frac{F_1}{R} [s(0^\circ) + s(45^\circ) + s(90^\circ) + s(135^\circ)] =$$

$$= \frac{88,55}{2,5} (0 + 0,16 + 0 - 0,16) = 0$$

Průběh sil po rovnoběžce 110° pro některé další úhly φ , např.

$$\begin{aligned} \varphi = 5^\circ & \dots\dots N_{\alpha} = -59,2 ; & N_{\varphi} &= 59,2 ; & S &= 32,8 \text{ kN} \\ \varphi = 10^\circ & \dots\dots N_{\alpha} = -40,2 ; & N_{\varphi} &= 40,2 ; & S &= 30,4 \text{ kN} \\ \varphi = 15^\circ & \dots\dots N_{\alpha} = -33,8 ; & N_{\varphi} &= 33,8 ; & S &= 27 \text{ kN} \end{aligned}$$

Na rovnoběžce 115° jsou body A a B souměrné a proto pro $\varphi = 5^\circ$

$$N_{\alpha A,B} = \frac{F_1}{R} [n(5^\circ) + n(40^\circ) + n(50^\circ) + n(85^\circ)] =$$

$$= \frac{88,55}{2,5} [-0,176 - 0,176 - 0,176 - 0,176] = -24,9 \text{ kN} = -N_{\varphi A,B}$$

$$S_{A,B} = \frac{88,55}{2,5} [2,007 + 0,209 + 0,147 + 0,015] = 84,3 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } \varphi = 10^\circ & \dots\dots N_{\alpha} = -24,9 ; & N_{\varphi} &= 24,9 ; & S &= 49,6 \text{ kN} \\ \varphi = 15^\circ & \dots\dots N_{\alpha} = -24,9 ; & N_{\varphi} &= 24,9 ; & S &= 39,2 \text{ kN} \\ \varphi = 20^\circ & \dots\dots N_{\alpha} = -24,9 ; & N_{\varphi} &= 24,9 ; & S &= 35,6 \text{ kN} \end{aligned}$$

Na rovnoběžce 120° v bodě D bude pro $\varphi = 0^\circ$ (analogicky bodu C)

$$N_{\alpha D} = \frac{88,55}{2,5} (1,768 - 0,155 - 0,173 - 0,155) = 45,5 \text{ kN} = -N_{\varphi D}$$

$$S_D = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } \varphi = 5^\circ & \dots\dots N_{\alpha} = 15,1 ; & N_{\varphi} &= -15,1 ; & S &= 37,1 \text{ kN} \\ \varphi = 10^\circ & \dots\dots N_{\alpha} = -6,7 ; & N_{\varphi} &= 6,7 ; & S &= 35,2 \text{ kN} \\ \varphi = 15^\circ & \dots\dots N_{\alpha} = -14,2 ; & N_{\varphi} &= 14,2 ; & S &= 31,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

b) část řešení partikulárního integrálu:

Z rovnic (2-32b) lze vypočítat membránové síly \bar{N}_{α} , \bar{N}_{φ} ($S = 0$), které jsou konstantní na celé rovnoběžce; průběh podél poledníku u obou sil s úhlem má následující průběh:

$\alpha = 20^\circ$	$\bar{N}_{\alpha} = 350$	$\bar{N}_{\varphi} = -347$	$\alpha = 115^\circ$	$\bar{N}_{\alpha} = 53,7$	$\bar{N}_{\varphi} = 33,6$
$= 45^\circ$	86	= -68	$= 120^\circ$	= 54,5	= 37,5
$= 90$	51,1	= 10,2	$= 150^\circ$	= 59,3	= 55,1
$= 110^\circ$	52,9	29,4	$= 180^\circ$	= 61,3	= 61,3

c) celkové membránové síly:

Superpozicí řešení a) a b) lze získat pro uvažované body celkové membrá-

nové síly:

Body A a B : $\alpha_A = 115^\circ$, $\alpha = 115^\circ$, $\varphi = \pm 5^\circ$;

$$N_{\alpha}^{\Sigma} = N_{\alpha} + \bar{N}_{\alpha} = -24,9 + 53,7 = 28,8 \text{ kN}$$

$$N_{\varphi}^{\Sigma} = N_{\varphi} + \bar{N}_{\varphi} = 24,9 + 33,6 = 58,5 \text{ kN}$$

$$S^{\Sigma} = 84,3 \text{ kN}$$

Bod C : $\alpha_A = 115^\circ$, $\alpha = 110^\circ$, $\varphi = 0^\circ$

$$N_{\alpha}^{\Sigma} = -87,3 + 52,9 = -34,4 \text{ kN}$$

$$N_{\varphi}^{\Sigma} = 87,3 - 29,4 = 57,9 \text{ kN}$$

$$S^{\Sigma} = 0$$

Bod D : $\alpha_A = 115^\circ$, $\alpha = 120^\circ$, $\varphi = 0^\circ$

$$N_{\alpha}^{\Sigma} = 45,5 + 54,5 = 100 \text{ kN}$$

$$N_{\varphi}^{\Sigma} = -45,5 + 37,5 = -8 \text{ kN}$$

$$S^{\Sigma} = 0$$

S ohledem na konečnou velikost smykové síly S se hlavní síly a napětí pro jednotlivé body určí z Mohrovy kružnice:

$$N_{1,2} = \frac{N_{\alpha} + N_{\varphi}}{2} \pm 0,5 \sqrt{(N_{\alpha} - N_{\varphi})^2 + 4 \cdot S^2}$$

Příslušné hodnoty N_1 , N_2 příp. σ_1 a σ_2 lze najít v následující tabulce:

Body A,B	$N_1 = 129,2 \text{ kN}$ $N_2 = -41,9 \text{ kN}$	$\sigma_1 = 25,8 \text{ MPa}$ $\sigma_2 = -8,4 \text{ MPa}$
Bod C	$N_1 = 57,9 \text{ kN}$ $N_2 = -34,4 \text{ kN}$	$\sigma_1 = 11,6 \text{ MPa}$ $\sigma_2 = -6,9 \text{ MPa}$
Bod D	$N_1 = 100 \text{ kN}$ $N_2 = -8 \text{ kN}$	$\sigma_1 = 20 \text{ MPa}$ $\sigma_2 = -1,6 \text{ MPa}$

Pro ostatní body na příslušných rovnoběžkách a polednicích by postup výpočtu byl podobný. Takto lze získat průběh sil normálových a smykových.

2.3 Výztuhy v proniku válců a kuželů - potrubní odbočky

Podobně jako při řešení náhlé změny tvaru v proniku dvou koulí, kde výztuhy umožňují zachovat membránový stav v převážné části skořepin, lze postupovat i v případech proniku válců nebo kuželů. Zde je však návrh výztuh komplikovanější, protože rozložení napětí je jiné než u koule a na systém mohou působit další síly. Spojování různých průměrů válců s různým sklonem os vytváří problémy s řešením a umístováním výztuh. Příkladem spojů válců příp. kuželů jsou potrubní odbočky. Zde se již mnohdy nejedná o čisté membrány; Poměr poloměru k tloušťce (rozmezí je $R/s = 40$) již nebývá tak velký. S ohledem na to, že tato poměrně jednoduchá výpočtová metoda dává za určitých předpokladů výsledky na straně větší bezpečnosti, lze ji pokládat za vhodné řešení pro dimenzování poměrně náročných konstrukčních dílců. Potrubí a potrubní sítě jsou v chemii velmi rozšířené strojní zařízení pracující v širokém rozsahu pracovních tlaků a teplot. Kromě základního tlakového namáhání vznikají v nich síly od uložení, od teplotních dilatací, od větru, sněhu nebo tlaku zeminy při uložení v zemi apod. Tyto vlivy omezují volné dilatace vestavěného

potrubního systému v osovém, méně již v radiálním směru. Pouze při tlakové zkoušce z obou stran zaslepeného potrubí nejsou deformace omežovány. Možná omezení lze specifikovat podle následujících hledisek:

a) potrubí se může volně deformovat a ve válci jsou od vnitřního přetlaku napětí obvodová $\sigma_t = pR/s$ a osová $\sigma_o = 0,5 pR/s$. Pro ocelové potrubí lze počítat s Poissonovou konstantou $\mu = 0,3$.

$$\text{Obvodová deformace } \epsilon_t = \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_o) = \frac{pR}{Es} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) = 0,85 \cdot \frac{pR}{Es}$$

$$\text{A změna poloměru } \Delta r = 0,85 \cdot \frac{pR^2}{Es} \quad (2-33)$$

$$\text{Osová deformace } \epsilon_o = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} (\sigma_o - \mu \sigma_t) = \frac{pR}{Es} \cdot (0,5 - 0,3) = 0,2 \cdot \frac{pR}{Es}$$

$$\text{a prodloužení potrubí } \Delta l = l \cdot \epsilon_o = 0,2 \frac{pRl}{Es} \quad (2-34)$$

b) při zabudování do potrubního systému účinkem sil působících v osovém směru se brání osovému prodloužení úplně nebo částečně; při úplném zabránění bude

$\Delta l = 0$ a $\epsilon_o = 0$ a součin $\epsilon_o E$ se musí rovnat nule $\epsilon_o E = \sigma_o - \mu \sigma_t = 0$ a tím vztah mezi osovým a obvodovým napětím je

$$\sigma_o = \mu \sigma_t$$

Tím, že obvodové napětí musí zůstat z důvodů rovnováhy stejné jako v případě a), bude

$$\sigma_o = 0,3 \frac{pR}{s} \quad (2-35a)$$

Ve skutečnosti je potrubní větev řešena tak, že umožňuje částečné prodloužení

Δl_ζ ; to je menší než Δl z (2-34). Celkové napětí je dáno součtem σ_o z (2-35a) a přírůstkem $\Delta \sigma_o = \frac{\Delta l_\zeta}{l} E$, tedy

$$\sigma_o = 0,3 \frac{p \cdot R}{s} + \frac{\Delta l_\zeta}{l} E \quad \text{při} \quad \Delta l_\zeta \leq 0,2 \frac{p \cdot R \cdot l}{E \cdot s} \quad (2-35b)$$

c) při zabránění radiální deformace $\Delta R = 0$ bude $\epsilon_t = 0$ a

$$\epsilon_t E = \sigma_t - \mu \sigma_o = 0$$

$$\text{a} \quad \sigma_t = \mu \sigma_o = 0,15 \cdot \frac{pR}{s} \quad (2-36a)$$

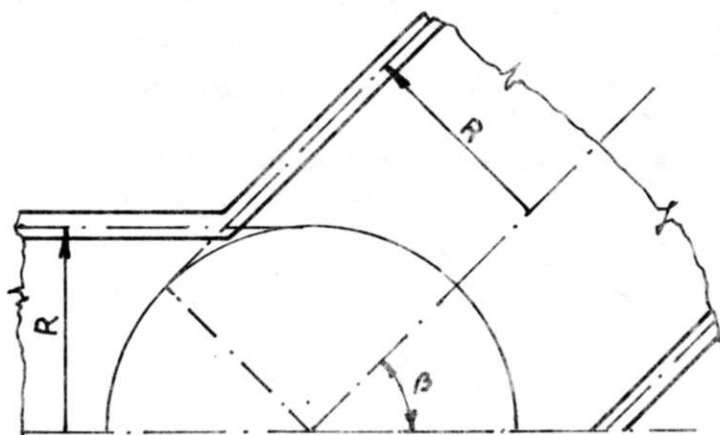
Při částečných deformacích poloměru ΔR_ζ bude obvodové napětí

$$\sigma_t = 0,15 \cdot \frac{p \cdot R}{s} + \frac{\Delta R_\zeta}{R} E \quad (2-36b)$$

přičemž platí, že $\Delta R_\zeta \leq 0,85 \frac{pR^2}{Es}$

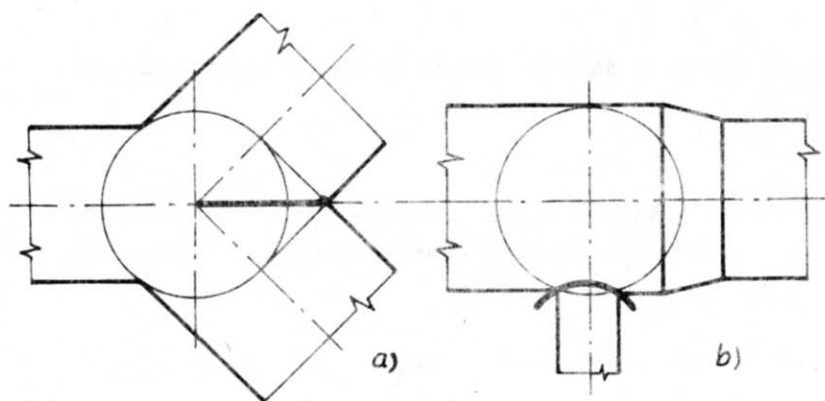
Ve skutečnosti stanovení velikosti Δl_ζ a ΔR_ζ je velmi obtížné a proto uvedené úvahy slouží pouze k hodnocení účinků sil vznikajících u odboček za předpokladu volných deformací.

Při geometrickém rozboru proniku se ukazuje, že rovinnou výztuhu lze vytvořit pouze u symetrických odboček se stejnými průměry potrubí nebo u kuželového přechodu se stěnami tvořící tečny ke kouli vepsané do přírodního potrubí se středem na odbočce střednice (obr.2.12). Je třeba upozornit, že válcové symetrické odbočky



obr.2.12

Membránové napětí u válce v obvodovém směru je $\sigma_t = pR/s$ a v osovém $\sigma_o = 0,5 pR/s$. v místě proniku se membránové síly rozloží do směru tečného k přerušené kružnici a do směru vodorovného s osou potrubí (obr.2.14). Na proužku potrubí v místě proniku o šířce dw se vlivem obvodového napětí zde vytvoří síla



obr.2.13

lze dimenzovat mnohem jednodušeji než odbočky kuželové, ale z hlediska proudění znamenají velké tlakové ztráty (obr.2.13a). Spojení nestejných průměrů válcových odboček vynucuje výztuhy v prostorovém proniku (2.13b).

Pro pochopení účinku sil na výztuhu a přenášení membránových sil je výpočet válcové odbočky přístupnější.

2.3.1 Rozbor namáhání válcové odbočky

Bude zde vysvětlena metoda, kterou popsal Křupka [2-7] da, kterou popsal Křupka [2-7] Bude zde vysvětlena metoda, kterou popsal Křupka [2-7] da, kterou popsal Křupka [2-7]

$$dN = \sigma_t \cdot s \cdot dw$$

kde z geometrie odbočky plyne, že $dw = R \cos \alpha \cdot d\alpha \cdot \cotg \beta$ Po zpětném dosazení

$$dN = \sigma_t \cdot s \cdot R \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \cdot \cotg \beta = pR^2 \cdot \cotg \beta \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \quad (2-37)$$

Tuto sílu lze rozložit do směru: svislého
vodorovného v rovině výztuhy
vodorovného kolmého k rovině výztuhy.

Po zakreslení složek do směru vodorovného-kolmého k rovině výztuhy lze jednoduše odvodit, že se u symetrické odbočky vyrovní.

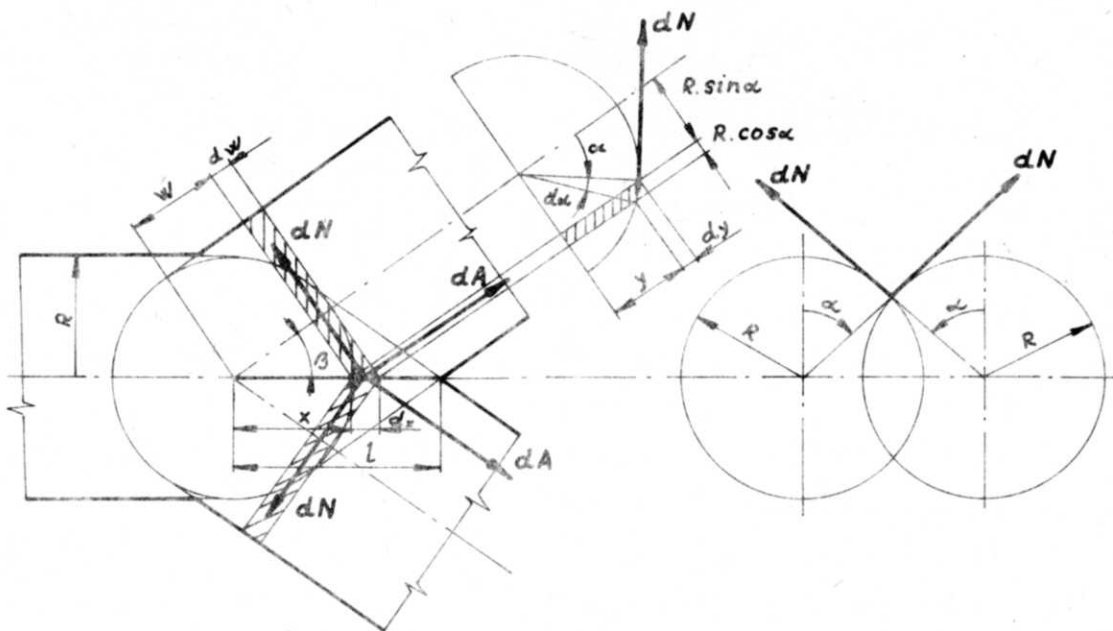
Svislá složka od obou odboček

$$dV_t = 2 \cdot dN \cdot \sin \alpha = 2 \cdot p \cdot R^2 \cdot \cotg \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \quad (2-37a)$$

a vodorovná v rovině výztuhy

$$dH_t = 2 \cdot dN \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta = 2 \cdot p \cdot R^2 \cdot \cos \beta \cdot \cos^2 \alpha \cdot d\alpha \quad (2-37b)$$

Pro představu o průběhu těchto složek podél proniku lze zavést proměnné x a y , které podle obr.2.14 lze vyjádřit na úhlu α



obr.2.14

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{R}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha & dx &= \frac{R}{\sin \beta} \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \\
 y &= R \cdot \cos \alpha & dy &= -R \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha
 \end{aligned} \quad (2-38)$$

a potom

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2} \quad ; \quad \cos \alpha = \frac{y}{R} = z$$

Rozložení dV_t (2-37a)

$$dV_t = p \cdot \frac{R}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha \cdot \frac{R}{\sin \beta} \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \cdot 2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta = p \cdot x \cdot dx \cdot \sin 2\beta \quad (2-39a)$$

a průběh této síly ve směru x

$$\frac{dV_t}{dx} = p \cdot x \cdot \sin 2\beta \quad (2-39b)$$

má lineární průběh.

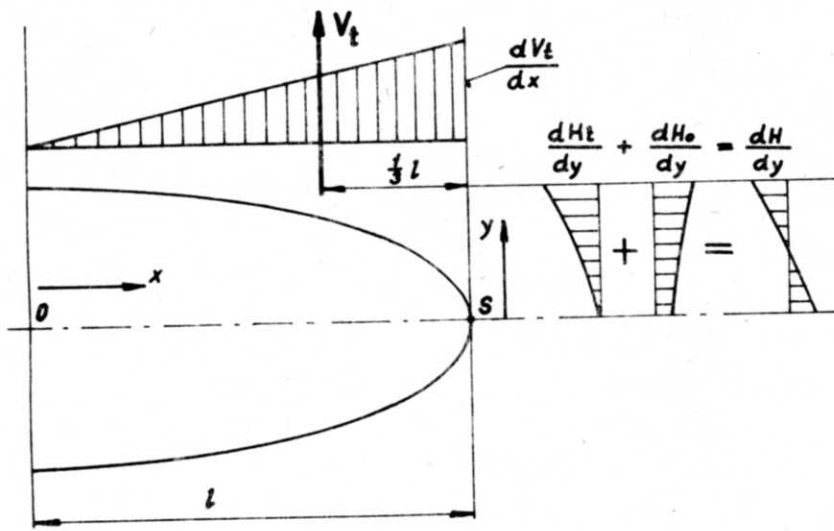
Síla $V_t = p \cdot \sin 2\beta \int_0^l x dx = p \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \sin 2\beta$ působí v těžišti trojúhelníka tj. v $1/3$ délky proniku l

Podobně $dH_t = 2 \cdot p \cdot R^2 \cdot \cos \beta \cdot R \cdot \cos^2 \alpha \cdot (-\sin \alpha \cdot d\alpha) \cdot 1/\sin \alpha =$

$$= -2 \cdot p \cdot \cos \beta \cdot \left(\frac{y}{R}\right)^2 \cdot \frac{dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}} \quad (2-40a)$$

a průběh ve směru y

$$\frac{dH_t}{dy} = -2 \cdot p \cdot R \cdot \cos \beta \cdot \frac{\left(\frac{y}{R}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}} = -2 \cdot p \cdot R \cdot \cos \beta \cdot \frac{z^2}{\sqrt{1 - z^2}} \quad (2-40b)$$



obr.2.15

Osově membránové napětí vyvolává na výztuze vodorovnou sílu ve směru osy

$$dA = \sigma_0 \cdot s \cdot R \cdot d\alpha = \frac{p \cdot R^2}{2} \cdot d\alpha \quad (2-41)$$

Průmět z obou odboček do roviny výztuky

$$dH_0 = 2 \cdot dA \cdot \cos \beta = p \cdot R^2 \cdot \cos \beta \cdot d\alpha \quad (2-41a)$$

Při výměně y za α

$$dH_0 = -p \cdot R \cdot \cos \beta \cdot \frac{R \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha}{\sin \alpha} = -p \cdot R \cdot \cos \beta \cdot \frac{dy}{\sqrt{1 - (\frac{y}{R})^2}} \quad (2-41b)$$

a průběh ve směru y

$$\frac{dH_0}{dy} = -p \cdot R \cdot \cos \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{y}{R})^2}} \quad (2-41c)$$

Z obr.2.14 je vidět, že výslednice ve směru osy dH_t působí směrem vlevo, výslednice dH_o doprava. Proto celkový účinek složek dH

$$\frac{dH}{dy} = \frac{dH_t}{dy} - \frac{dH_o}{dy} = p \cdot R \cdot \cos \beta \cdot \frac{1 - 2 \cdot (\frac{y}{R})^2}{\sqrt{1 - (\frac{y}{R})^2}} \quad (2-42)$$

Průběh svislých i vodorovných složek je zřejmý z obr.2.15. Bude-li navržena výztuha v proniku jen jako půlelipsa (tj. nebude v místě \emptyset svázána půlkruhovými žebry - obr.2.16), lze ji pokládat jako staticky určitý silně zakřivený prut. Maximální ohybový moment bude v bodě S. Srovnáním účinků jednotlivých momentů od sil V_t , H_t a H_o lze provést následující závěry:

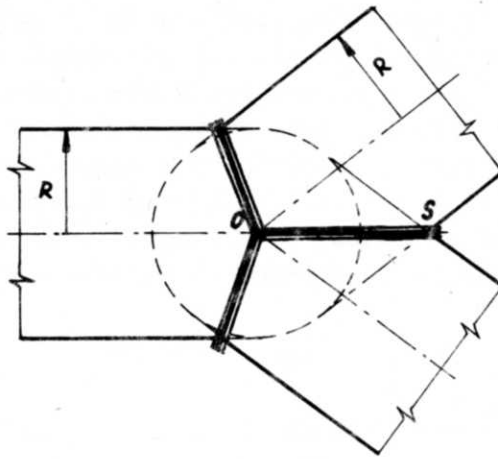
1) Vertikální složka V_t vyvolává moment M_V (viz obr.2.15)

$$M_V = V_t \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \cdot p \cdot l^3 \cdot \sin 2\beta \quad (2-43a)$$

($l = R/\sin \beta$), který působí tahem na vnitřní straně výztuhy.

2) Od H_t vzniká moment opačného smyslu

$$\begin{aligned} M_{H_t} &= \int_0^{\pi/2} y \cdot dH_t = \int_0^{\pi/2} 2p \cdot R^2 \cdot \cos \beta \cdot \cos^2 \alpha \, d\alpha \cdot R \cdot \cos \alpha = \\ &= 2p \cdot R^3 \cdot \cos \beta \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^3 \alpha \, d\alpha = \\ &= 2 \cdot p \cdot R^3 \cdot \cos \beta \cdot \left[\sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{4}{3} \cdot p \cdot R^3 \cdot \cos \beta \quad (2-43b) \end{aligned}$$



3) Od H_o vzniká moment

$$\begin{aligned} M_{H_o} &= \int_0^{\pi/2} y \cdot dH_o = \int_0^{\pi/2} p \cdot R^2 \cdot \cos \beta \cdot d\alpha \cdot R \cdot \cos \alpha = \text{obr. 2.16} \\ &= p \cdot R^3 \cdot \cos \beta \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \alpha \cdot d\alpha = p \cdot R^3 \cdot \cos \beta \cdot [\sin \alpha]_0^{\pi/2} = p \cdot R^3 \cdot \cos \beta \quad (2-43c) \end{aligned}$$

Celkový ohybový moment

$$\begin{aligned} M &= M_V - M_{H_t} + M_{H_o} = p \cdot R^3 \cdot \cos \beta \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot \sin^2 \beta} - \frac{4}{3} + 1 \right) = \\ &= M_{\max A} = p \cdot R^3 \cdot \cos \beta \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot \sin^2 \beta} - \frac{1}{3} \right) \quad (2-43d) \end{aligned}$$

Tato hodnota momentu odpovídá hodnotě při volné deformaci potrubí. K posouzení možných účinků při bránění dilatacím slouží následující úvahy:

a) bude-li bráněno deformaci v osovém směru, změní se osové napětí z 0,5násobku na 0,2násobek; proto 1 v rovnici (2-43d) se změní na 0,6 a výraz v závorce $-4/3 + 0,6$ na $-0,733$; pak maximální ohybový moment

$$M_{\max B} = p \cdot R^3 \cdot \cos \beta \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot \sin^2 \beta} - 0,733 \right) \quad (2-43e)$$

b) bude-li bráněno deformaci v radiálním směru, změní se obvodové napětí z 1 na 0,15 násobek a max. moment

$$M_{\max C} = p \cdot R^3 \cdot \cos \beta \cdot \left(\frac{1}{20 \cdot \sin^2 \beta} - 0,2 + 1 \right) = p \cdot R^3 \cdot \cos \beta \cdot \left(\frac{0,05}{\sin^2 \beta} + \frac{4}{5} \right) \quad (2-43f)$$

Označením závorky v rovnici (2-43d) A a členu $\frac{1}{3 \cdot \sin^2 \beta}$ A', lze závislosti momentů na úhlu β v rovnici (2-43d) až (2-43f) vyjádřit číselně podle následující tabulky pro $\beta = 10^\circ$ až 60°

β	A	A'	B	C
10°	10,56	10,88	10,16	2,42
20°	2,36	2,68	1,9	1,15
30°	0,87	1,15	0,32	0,87
35°	0,56	0,83	0,23	0,78
40°	0,36	0,62	0,06	0,71
50°	0,15	0,37	-0,1	0,57
60°	0,06	0,22	-0,14	0,43

Z tabulky je vidět, že do $\beta \leq 30^\circ$ převažuje první moment A (resp. A') pro volnou dilataci, nad 30° moment C při bránění radiální deformaci. Tento případ v praxi nastává jen zřídka (zabetonované potrubí). Vliv osové dilatace (B) je zanedbatelný. Výsledný ohybový moment (2-43d), jak ukázaly experimenty [2-6], je vždy vyšší než skutečný, je tedy vždy na straně vyšší bezpečnosti. S ohledem na to, že na potrubí mohou kromě dilatačních sil působit síly v uložení příp. další nedefinovatelné, je pro výpočty vhodné uvažovat případ, kdy se uvažuje pro maximální moment pouze vertikální složka obvodového napětí V_t

$$M_{\max} = p \cdot R^3 \cdot \cos \beta \cdot \frac{1}{3 \cdot \sin^2 \beta} = \frac{1}{6} \cdot p \cdot l^3 \cdot \sin 2 \beta \quad (2-43g)$$

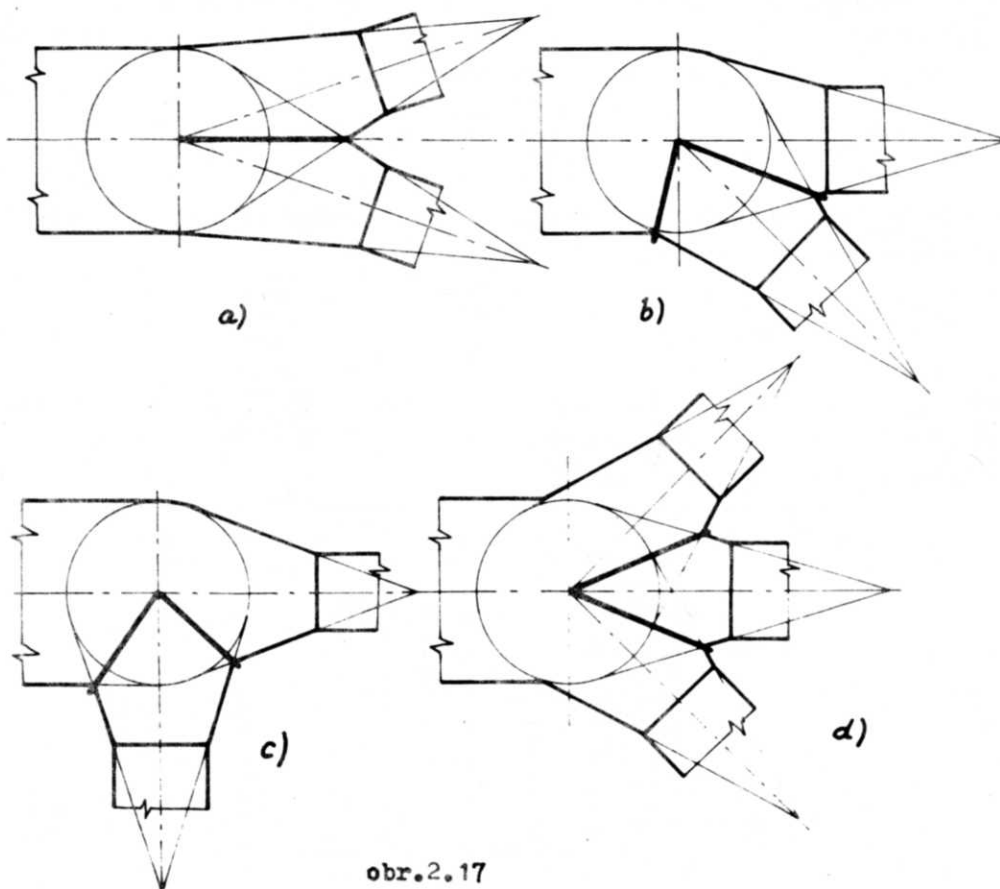
Podle tvaru výztuhy je třeba ji dimenzovat na moment, kde rameno síly V_t se bere od průsečíku stěn s (obr.2.16) do těžiště T (nebo k neutrální ose) označeného e , tedy

$$M = V \cdot e \quad (2-44)$$

Změnou ramene e , jak bude zřejmé z příkladu pro kuželovou odbočku, lze ovlivnit velikost momentu a tím i ohybového napětí. Vhodným tvarováním výztuhy a jejím zasunutím dovnitř (pozor ale na růst hydraulického odporu) lze dosáhnout $e = 0$ a pak je namáhána pouze tahem.

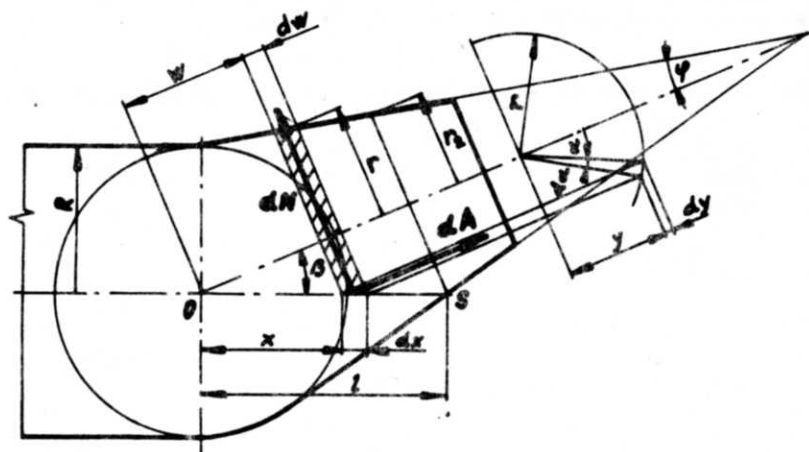
2.3.2 Výztuhy kuželových potrubních odboček

Problém zvětšení hydraulických ztrát u válcových odboček řeší kuželové odbočky, kde změny rychlosti proudění jsou malé. Pomocí kuželových odboček lze řešit větvení do jednoho, dvou nebo více směrů (obr.2.17).



obr.2.17

Na rozdíl od válcové odbočky je výpočet proveden u kuželové pouze pro jednu odbočku (obr.2.18)



Legenda k obr.:

- r - poloměr ve sledovaném místě
- r_1 - poloměr vepsané koule; $r_1 = R$
- r_2 - poloměr průsečíku kužele s původní osou potrubí (bod S); $r_2 = l \cdot \sin \varphi$
- φ - poloviční vrcholový úhel kužele

obr.2.18

Podobně jako u válcové odbočky bude vlivem membránových napětí $\sigma_t = (pr/s) \cdot \cos \varphi$ a $\sigma_o = (pr/2s) \cos \varphi$ na vytčeném proužku $dw = r \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \cdot \cotg \beta$ působit obvodová síla dN

$$dN = \sigma_t \cdot s \cdot dw = \frac{p \cdot r}{\cos \varphi} \cdot dw = \frac{p \cdot r^2}{\cos \varphi} \cdot \cotg \beta \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \quad (2-45)$$

Do vrcholu kužele směřuje síla od osového membránového napětí

$$dA = \sigma_o \cdot s \cdot r \cdot d\alpha = \frac{p \cdot r^2}{2 \cdot \cos \varphi} \cdot d\alpha \quad (2-46)$$

Síly v souřadném systému x, y jsou orientovány obecně a lze je vyjádřit směrovými kosíny (dN pomocí kosínů ζ a dA pomocí kosínů ω) [2-7]; u symetrických odboček

$$\cos \zeta_x = -\sin \beta \cdot \cos \alpha \quad \cos \omega_x = \frac{C \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi - \sin \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin \varphi}{C}$$

$$\cos \zeta_y = \sin \alpha \quad \cos \omega_y = -\frac{1}{C} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \varphi$$

$$\text{kde } C = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}$$

Průměty složek sil do směru x a y v rovině výztuhy

$$\begin{aligned} dN_x &= dN \cdot \cos \zeta_x = -\frac{p \cdot r^2}{\cos \varphi} \cdot \cos \beta \cdot \cos^2 \alpha \cdot d\alpha \\ dN_y &= dN \cdot \cos \zeta_y = \frac{p \cdot r^2}{\cos \varphi} \cdot \cotg \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha = \\ &= \frac{p \cdot r^2}{2 \cdot \cos \varphi} \cdot \cotg \beta \cdot \sin 2\alpha \cdot d\alpha \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} dA_x &= dA \cdot \cos \omega_x = \frac{p \cdot r^2}{2} \left(\cos \beta - \frac{1}{c} \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin \alpha \right) \cdot d\alpha \\ dA_y &= dA \cdot \cos \omega_y = - \frac{p \cdot r^2}{2c} \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \end{aligned} \right.$$

Pro znázornění průběhu těchto sil lze nahradit proměnné r a α proměnnými x a y ; zavedením poměru

$$z = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \varphi} \quad (2-47)$$

lze z geometrických závislostí vypočítat obecný poloměr r

$$r = \frac{R \cdot z}{\sin \alpha + z} = \frac{r_2 \cdot (1 + z)}{\sin \alpha + z} \quad (2-48)$$

a pak

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} ; \quad y = r \cdot \cos \alpha ; \quad \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{z + \sin \alpha}{2z \cdot \cos \varphi} \cdot p x \cdot \sin 2\beta \cdot dx \\ d\alpha &= \frac{(1 + z) \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos \beta}{(1 + z \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \varphi} \cdot p \cdot r_2 \cdot dy \end{aligned} \quad (2-49)$$

Potom dosazením do rovnic pro složky sil lze získat spojitě zatížení výtuhy podél x a y ; tak

$$dN_y = \frac{p \cdot x}{3 \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{z + \sin \alpha}{z} \cdot \sin 2\beta = pr_2 \cdot \frac{z + 1}{z} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \varphi}$$

$$\frac{dN_x}{dy} = \frac{-pr_2}{\cos \varphi} \cdot \frac{z + 1}{1 + z \cdot \sin \alpha} \cdot \cos \beta \cdot \cos^2 \alpha \quad (2-50)$$

$$\frac{dA_y}{dx} = - \frac{p \cdot x}{2} \cdot \frac{\sin^2 \beta \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot (z + \sin \alpha)}{z \cdot \sin \alpha \cdot c} = - pr_2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \beta}{2 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}}$$

$$\frac{dA_x}{dy} = \frac{pr_2}{2} \cdot \frac{z + 1}{1 + z \cdot \sin \alpha} \left(\cos \beta - \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin^2 \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}} \right)$$

Průběh těchto funkcí pro kužely s vrcholovými úhly $\varphi \approx 0^\circ$, $\varphi = 10^\circ$ a $\varphi = 25^\circ$ pro stejné úhly $\beta = 30^\circ$ ukazuje následující tabulka a obr. 2.19.

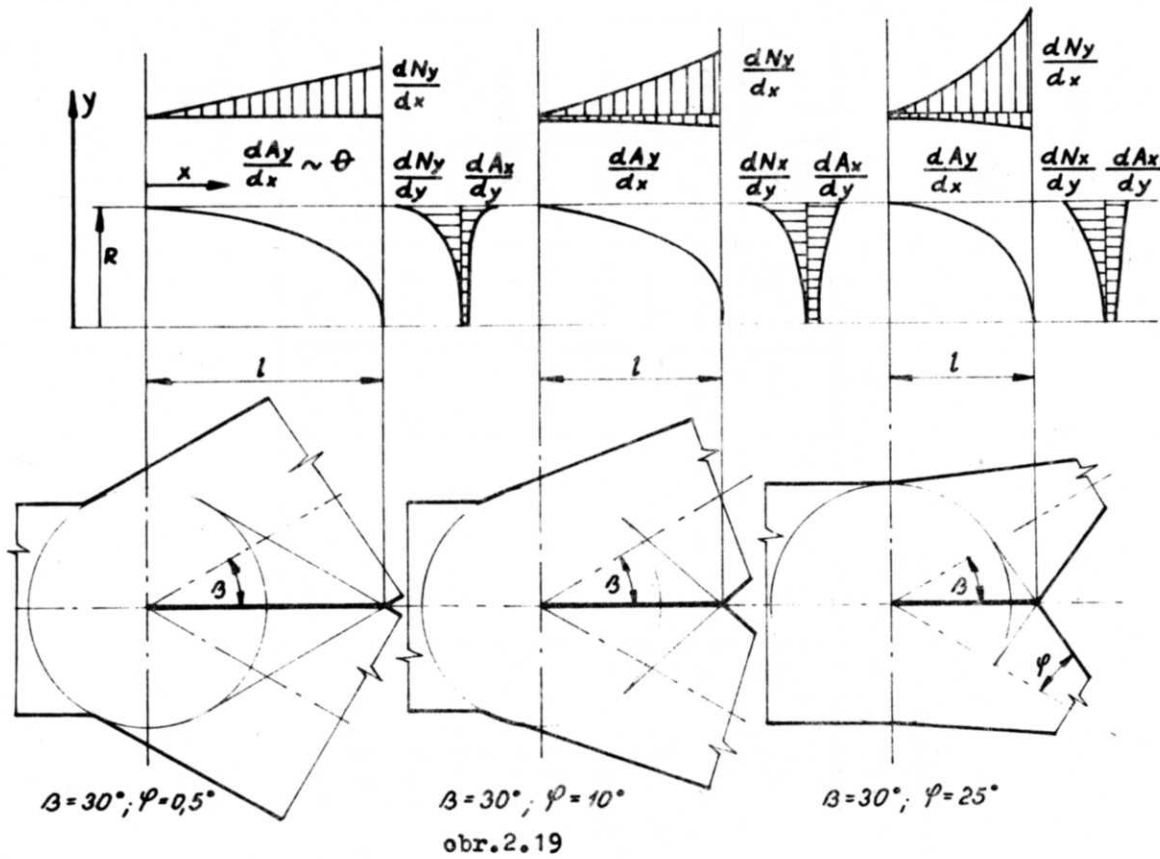
Z tabulky i obrázku je vidět, že výška trojúhelníka v průběhu dN_y/dx je přibližně stejná, zatímco se délka l zmenšuje s růstem úhlu φ . To znamená, že výslednice V_t (závislá na ploše trojúhelníka) se zmenšuje (zmenšuje i účinek dA_y) a tím se zmenšuje i moment síly V_t . Pro hodnoty úhlu φ , kdy $z > 5$, přecházejí vztahy (2-50) na výrazy podobné výrazům pro válcové odbočky:

$$\frac{dN_y}{dx} = \frac{p \cdot x}{2 \cdot \cos \varphi} \cdot \sin 2\beta ; \quad \frac{dA_y}{dx} = 0$$

Tabulka funkcí dN_y/dx , dA_y/dx , dN_x/dy , dA_x/dy v závislosti na úhlu α nebo poměrech $x:l$ a $y:r$:

1) $\beta = 30^\circ$, $\varphi = 0,5^\circ$, $z = 66,16$ 2) $\beta = 30^\circ$, $\varphi = 10^\circ$, $z = 3,27$ 3) $\beta = 30^\circ$, $\varphi = 25^\circ$, $z = 1,24$

α	x/l	$\frac{dN_y}{dx}$	$\frac{dA_y}{dx}$	y/r	$\frac{dN_x}{dy}$	$\frac{dA_x}{dy}$	x/l	$\frac{dN_y}{dx}$	$\frac{dA_y}{dx}$	x/l	$\frac{dN_x}{dy}$	$\frac{dA_x}{dy}$	$\frac{dN_x}{dy}$	$\frac{dA_x}{dy}$	$\frac{dN_y}{dx}$	$\frac{dA_y}{dx}$
10	0,15	0,153	-0,002	0,99	-4,51	2,33	0,22	0,2	-0,045	0,28	-2,32	1,17	-2,32	1,17	0,3	-0,12
20	0,35	0,301	-0,002	0,94	-2,17	1,23	0,4	0,393	-0,046	0,48	-1,57	0,86	-1,57	0,86	0,59	-0,12
30	0,5	0,44	-0,002	0,87	-1,28	0,85	0,57	0,574	-0,049	0,64	-1,07	0,68	-1,07	0,68	0,86	-0,13
40	0,65	0,565	-0,003	0,77	-0,78	0,67	0,7	0,738	-0,053	0,77	-0,71	0,57	-0,71	0,57	1,11	-0,14
50	0,77	0,673	-0,003	0,64	-0,47	0,56	0,81	0,879	-0,059	0,86	-0,44	0,5	-0,44	0,5	1,32	-0,16
60	0,87	0,761	-0,003	0,5	-0,25	0,5	0,89	0,994	-0,067	0,92	-0,25	0,45	-0,25	0,45	1,5	-0,18
70	0,94	0,826	-0,004	0,34	-0,11	0,46	0,95	1,079	-0,076	0,97	-0,11	0,42	-0,11	0,42	1,62	-0,2
80	0,99	0,87	-0,004	0,17	-0,03	0,44	0,99	1,131	-0,084	0,99	-0,03	0,4	-0,03	0,4	1,7	-0,22
90	1	0,88	-0,004	0	0	0,43	1	1,148	-0,088	1	0	0,39	0	0,39	1,73	-0,23



$$\frac{dN_x}{dy} = - \frac{p \cdot r_2}{\cos \varphi} \frac{\cos^2 \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \beta} ; \quad \frac{dA_x}{dy} = \frac{p \cdot r_2}{2} \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \quad (2-51)$$

Úvahy při odvození vycházely z předpokladu, že odbočka není opatřena příčnou výztuhou, nebo že její tuhost vzhledem k tuhosti podélné výztuhy je nepatrná. V opačném případě je nutno zavést v místě příčné výztuhy další staticky neurčitou veličinu jako reakci pružné podpory.

O dimenzování výztuhy rozhoduje zatížení dN_y/dx . Z příslušné rovnice (2-50) výslednice V_t

$$\begin{aligned} V_t &= \int dN_y = \frac{p \cdot \cotg \beta}{2 \cdot \cos \varphi} \cdot \int_0^{\pi/2} r^2 \cdot \sin 2\alpha \cdot d\alpha = \\ &= p \cdot r_2^2 \cdot \frac{\cotg \beta}{\cos \varphi} \left[(1+z)^2 \cdot \ln \frac{1+z}{z} - 1 - z \right] = \\ &= p \cdot r_2^2 \cdot \frac{\cotg \beta}{\cos \varphi} \cdot k_1 \end{aligned} \quad (2-52)$$

Statický moment těchto sil vzhledem k počátku souřadnic (bod 0)

$$S_{dN_y} = \int dN_y \cdot x = p r_2^3 \cdot (1+z)^2 \cdot \frac{\cotg \beta}{\sin \beta \cos \varphi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha}{(z + \sin \alpha)^3} =$$

$$= \frac{p \cdot r_2^3}{2} \cdot \frac{\cot \beta}{\cos \varphi \cdot \sin \beta} (1+z) \left[2 \cdot (1+z)^2 \cdot \ln \frac{1+z}{z} - 2z - 3 \right] \quad (2-53)$$

Vzdálenost výslednice V_t od počátku

$$e_V = \frac{S_{dN_V}}{V_t} = \frac{r_2}{\sin \beta} \cdot k_2 = l \cdot k_2 \quad (2-54)$$

S růstem z budou mít funkce k_1 a k_2 pro $z \rightarrow \infty$ hodnotu $k_1 = 0,5$ a $k_2 = 2/3$ ($k_2^{\equiv} = 1 - k_1$) což odpovídá válcové odbočce. Průběh funkcí k_1 a k_2^{\equiv} na z lze z rovnic (2-57) a (2-54) vyjádřit graficky - viz obr. 2.20.

2.3.2.1 Příklad řešení kuželové odbočky podle [2-5]

Podle skutečného návrhu byl odzkoušen model symetrické kuželové odbočky, jejíž výchozí rozměry jsou patrné z obr.2.21. Pro zatížení vnitřním přetlakem $p = 11 \text{ MPa}$ má odbočka navržený úhly $\beta = 30^\circ$ a poloviční vrcholový úhel kužele $\varphi = 9,5^\circ$. Pak z geometrie odbočky plyne, že poloměr r_2 v místě křížení střednic stěn (bod S)

$$r_2 = \left[\frac{r_0}{\text{tg } \beta} + (L_0 - \frac{r_0}{\text{tg } \beta}) \cdot \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \varphi + \text{tg } \beta} \right]$$

$$\text{tg } \beta = 223 \text{ mm}$$

když $r_0 = 204 \text{ mm}$, $L_0 = 500 \text{ mm}$.
Délka proniku $l = r_2 / \sin \beta = 446 \text{ mm}$. Pomocná hodnota $z = \text{tg } \beta / \text{tg } \varphi = 3,45$ a funkce

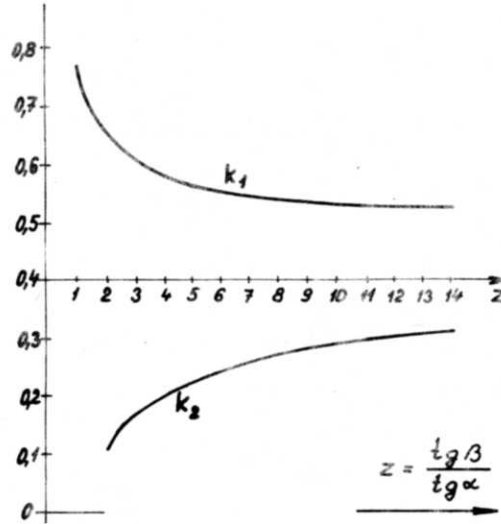
$$k_1 = (1+z)^2 \cdot \ln \frac{z+1}{z} - 1 - z = 0,5903$$

Funkce $k_2^{\equiv} = 1 - k_1 = 1 - 0,5903 = 0,4097$

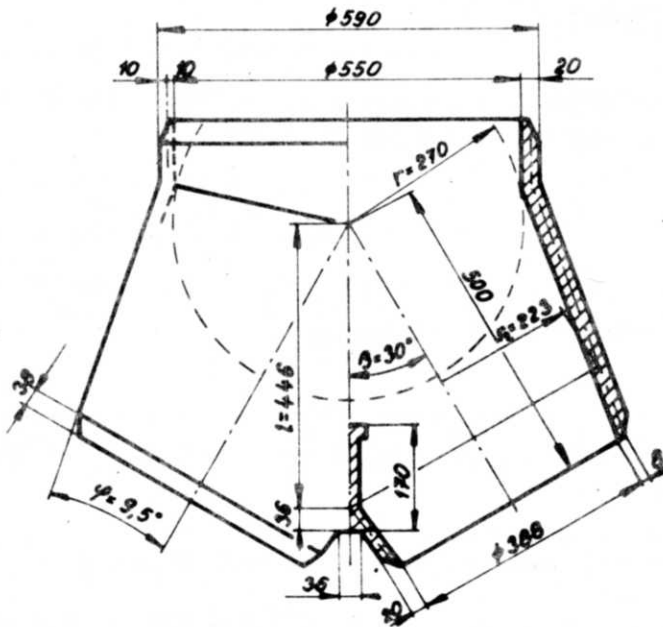
$$= \frac{(1+z) \cdot [2 \cdot (1+z)^2 \cdot \ln \frac{1+z}{z} - 2z - 3]}{2 \cdot [(1+z)^2 \cdot \ln \frac{1+z}{z} - z - 1]} = 0,18$$

Rameno síly V_t od místa S je l_{VS} , kde

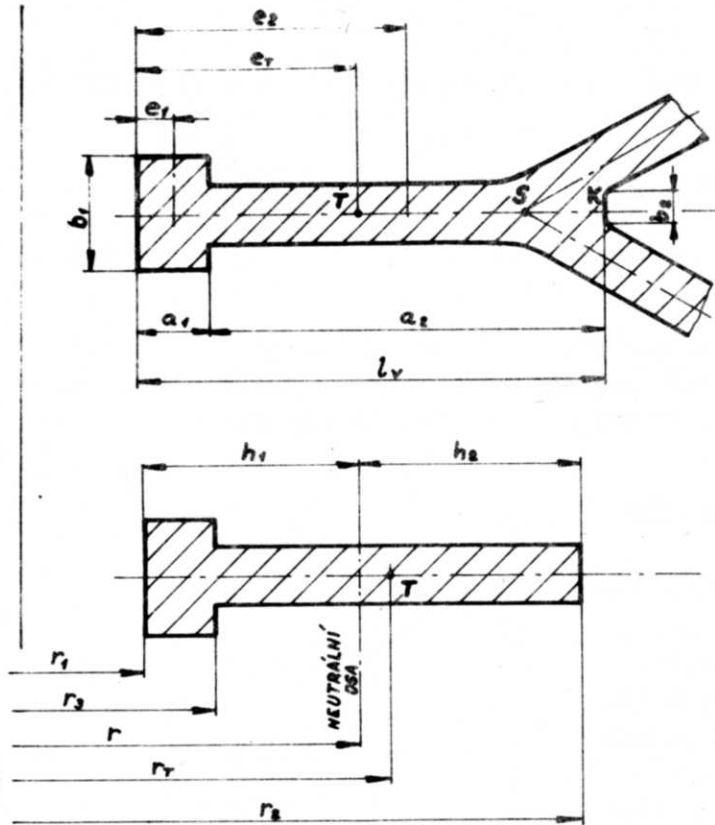
$$l_{VS} = k_2^{\equiv} \cdot l = 0,18 \cdot 446 = 80,3 \text{ mm}$$



obr.2.20



obr.2.21



Obr. 2.22

Výslednice svislých složek obvodové síly pro obě odbočky (2-52)

$$V = 2 \frac{p \cdot l^2}{2 \cdot \cos \varphi} \sin 2\beta \cdot k_1 =$$

$$= \frac{11 \cdot 0,446^2}{\cos 9,5} \cdot \sin 60,5903 =$$

$$= 1,1341 \text{ MN}$$

Rozměr výztuhy je zřejmý z obr. 2.22; vzdálenost průsečíku střednic stěn S od vnějšího konce výztuhy K je z geometrie

$$l_{SK} = \left[0,5 \cdot b_2 + \frac{0,5 \cdot s}{\cos(\beta + \varphi)} \right] \cdot$$

$$\frac{1}{\text{tg}(\beta + \varphi)} = 37,6 \approx 38 \text{ mm}$$

Rozměr části výztuhy a plochy průřezů a těžiště ploch:

$$a_1 = 40 : b_1 = 76 : A_1 = a_1 \cdot b_1 =$$

$$= 3040 \text{ mm}^2 : e_1 = a_1/2 = 20 \text{ mm} :$$

$$a_2 = 130 : e_2 = a_1 + a_2/2 = 105$$

$$\text{Celkový průřez výztuhy } A = A_1 + 4 A_2 = 7720 \text{ mm}^2$$

Vzdálenost těžiště od vnitřního

okraje výztuhy

$$e_T = \frac{A_1 \cdot e_1 + A_2 \cdot e_2}{A} = \frac{3040 \cdot 20 + 4680 \cdot 105}{7720} = 71,5 \text{ mm}$$

Výpočtové rameno síly e k těžišti T, když l_{ZS}

$$l_{ZS} = l_V - l_{SK} = 170 - 38 = 132 \text{ mm}$$

$$e = l_{VS} + e_1 - l_{ZS} = 80,3 + 71,5 - 132 = 19,8 \text{ mm}$$

Moment síly V

$$M_V = V \cdot e = 1,134 \cdot 0,0198 = 2,246 \cdot 10^{-2} \text{ MNm}$$

Poloměr $r_T = l - l_{ZS} + e_T = 446 - 132 + 71,5 = 385,5 \text{ mm}$. Z geometrie výztuhy lze určit i další poloměry

$$r_1 = l - l_{ZS} = 446 - 132 = 314 \text{ mm}$$

$$r_2 = r_1 + l_V = 314 + 170 = 484 \text{ mm}$$

$$r_3 = r_1 + a_1 = 314 + 40 = 254 \text{ mm}$$

Poloměr neutrální osy r

$$r = \frac{A}{b_1 \cdot \ln \frac{r_3}{r_1} + b_2 \cdot \ln \frac{r_2}{r_3}} = \frac{7720}{76 \cdot \ln \frac{354}{314} + 36 \cdot \ln \frac{484}{354}} = 378,93 \sim 379 \text{ mm}$$

Rozdíl mezi těžištní a neutrální osou m

$$m = r_T - r = 385,5 - 379 = 6,5 \text{ mm} \quad \text{a další rozměry}$$

$$h_1 = r - r_1 = 379 - 314 = 65 \text{ mm}$$

$$h_2 = l_V - h_1 = 170 - 65 = 105 \text{ mm}$$

Moment odporu na vnitřním vlákně

$$W_i = \frac{A \cdot m \cdot r_1}{h_1} = \frac{7,72 \cdot 10^{-3} \cdot 6,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,314}{6,5 \cdot 10^{-2}} = 2,424 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

a na vnějším vlákně výztuhy

$$W_e = \frac{A \cdot m \cdot r_2}{h_2} = \frac{7,72 \cdot 10^{-3} \cdot 6,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,484}{0,105} = 2,313 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

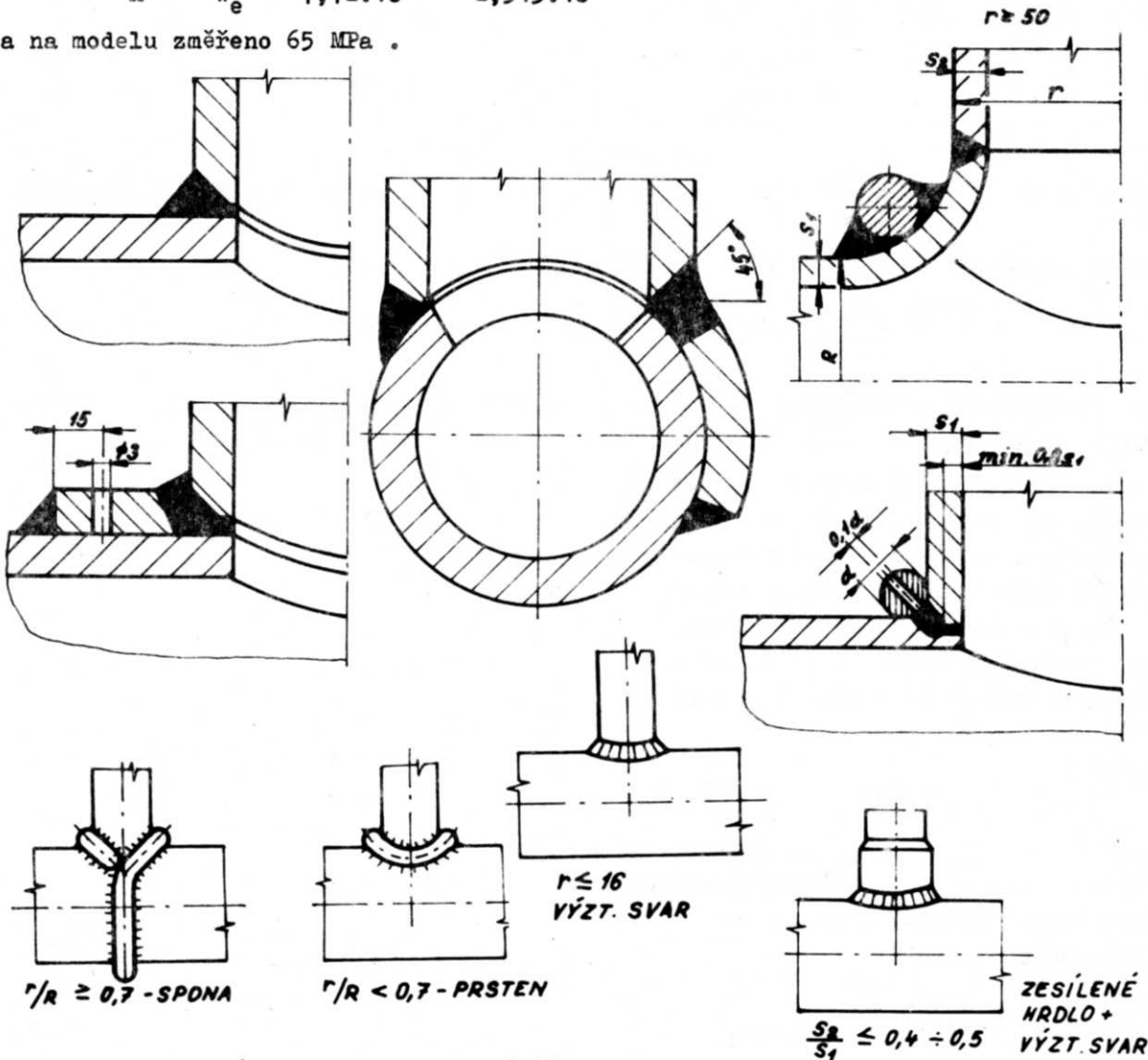
Pak celkové napětí na vnitřním vlákně

$$\sigma_i = \frac{V}{A} + \frac{M_V}{W_i} = \frac{1,1341}{7,72 \cdot 10^{-3}} + \frac{2,246 \cdot 10^{-2}}{2,424 \cdot 10^{-4}} = 146,9 + 92,7 = 239,6 \text{ MPa}$$

Ve skutečnosti změřeno na modelu 154 MPa, tj. 64% vypočtené hodnoty; na vnějším vlákně výztuhy

$$\sigma_e = \frac{V}{A} - \frac{M_V}{W_e} = \frac{1,1341}{7,72 \cdot 10^{-3}} - \frac{2,246 \cdot 10^{-2}}{2,313 \cdot 10^{-4}} = 146,9 - 97,1 = 49,8 \text{ MPa}$$

a na modelu změřeno 65 MPa.



obr.2.23

Je nutno pamatovat na to, že v případě, kdy střednice u odboček nestejněho průměru nevytvářejí tečny k vepsané kouli, nebude proniková křivka rovinná. Bude prostorová a její dimenzování je obtížné a dá se spočítat jen velmi přibližně. Provedení výztuh u vícenásobných odboček nebo u potrubí menších průměrů je z technologického hlediska obtížné, a proto řešení se provádí zesílením stěn nebo podle dalších příkladů uvedených v obr. 2.23. Prostorová výztuha se doporučuje pro poměry $r:R$ od 0,3 do 0,6. Pro $r:R$ menší než 0,3 postačí místní zesílení a pro $r:R$ větší než 0,6 jsou vhodné kuželové přechody s rovinnými výztuhami.

2.4 Poruchy membránového stavu v blízkosti koncentrátoru napětí

Základní rovnicí pro stanovení deformace ohybově tuhé skořepiny v blízkosti koncentrátoru napětí (změna tvaru, změna tloušťky, místní síly a momenty, gradient teploty) je silová rovnováha ve směru normály 2-8, str.226, rovn.4-34

$$\frac{dQ}{dx} + \frac{N_{\varphi}}{R} = p(x) \quad (2-55)$$

kde $p(x)$ je funkce vnějšího zatížení na vzdálenosti od koncentrátoru. Po dosazení, že $Q_x = dM_x/dx$ a $M_x = T_0 \cdot d^2 \Delta R/dx^2$ s ohybovou tuhostí $T_0 = E^x \cdot I = E \cdot s^3/12 \cdot (1 - \mu^2)$ lze získat diferenciální rovnici 4.řádu

$$\frac{d^4 \Delta R}{dx^4} + 4 \cdot \beta^4 \cdot \Delta R = \frac{p(x)}{T_0} \quad (2-56)$$

kde $p(x) = p + \mu \frac{N_{\varphi}}{R}$ a $\beta = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot (1 - \mu^2)}{R^2 \cdot s^2}}$. Řešení rovnice po úpravách

dává závislost deformace ΔR na proměnné $\beta \cdot x$

$$\Delta R = e^{-\beta x} \cdot (C_1 \cdot \sin \beta \cdot x + C_2 \cdot \cos \beta \cdot x) + J_p \quad (2-57)$$

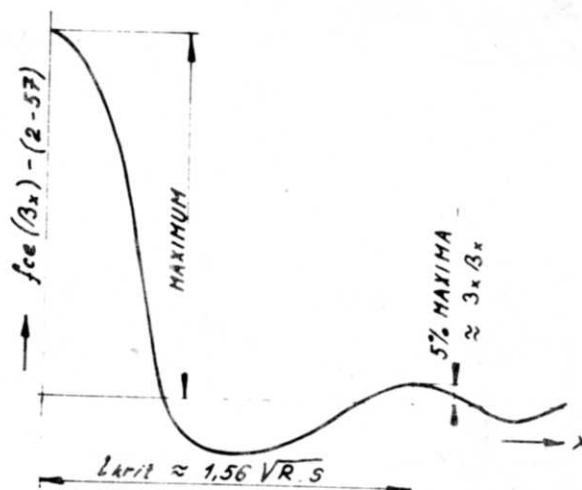
s integračními konstantami C_1 a C_2 a partikulárním integrálem J_p , který zahrnuje pravou stranu rovnice 2-56. Grafická závislost funkce je na obr. 2.24.

Pokud kromě zatížení p působí teplotní gradient (teplotní rozdíl na vnějším a vnitřním povrchu stěny), pak lze vyjádřit pravou stranu rovnice 2-56 jako $p(x, t)$. Změna poloměru - obvodová deformace - je vyjádřena součtem účinků od tlaku ϵ_{φ} a od teploty $\alpha \cdot \bar{T}$

$$\frac{\Delta R}{R} = \epsilon_{\varphi} + \alpha \cdot \bar{T} \quad (2-58)$$

kde $\bar{T} = (t_e + t_i)/2$ je střední teplota stěny a α - střední lineární součinitel délkové roztažnosti [K^{-1}]. Z Hookova zákona

$$\epsilon_{\varphi} = \frac{1}{E \cdot s} (N_{\varphi} - \mu \cdot N_x)$$



Obr. 2.24

a po dosazení z rovnice 2-58

$$N_{\varphi} = \varepsilon_{\varphi} E s + \mu N_x = E s \left(\frac{\Delta R}{R} - \alpha \bar{t} \right) + \mu N_x \quad (2-58a)$$

Za předpokladu, že osová i obvodová deformace od teploty je stejná, tedy

$$\varepsilon_{\varphi} = \varepsilon_x = \alpha \cdot \Delta t \cdot z/s$$

s $\Delta t = \pm t_i \pm t_e$ a vzdáleností libovolného vlákna od střednice stěny z bude teplotní napětí (osové)

$$\sigma_x^t = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_{\varphi}) = \frac{E \cdot z}{s \cdot (1 - \mu^2)} \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot (1 + \mu)$$

a moment v osovém směru

$$\begin{aligned} M_x^t &= \int_{-s/2}^{+s/2} \sigma_x^t \cdot z \cdot dz = \frac{(1 + \mu) \cdot E \cdot \alpha \cdot \Delta t}{s \cdot (1 - \mu^2)} \int_{-s/2}^{+s/2} z^2 \cdot dz = \frac{E \cdot s^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \cdot \alpha \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{\Delta t}{s} = \\ &= T_0 \alpha \frac{\Delta t}{s} (1 + \mu) \end{aligned} \quad (2-59)$$

Je-li celkový moment dán součtem momentů od tlaku a od teploty

$$M = T_0 \frac{d^2 \Delta R}{dx^2} = M_x + M_x^t = M_x + T_0 \alpha \frac{\Delta t}{s} (1 + \mu)$$

pak

$$M_x = T_0 \left[\frac{d^2 \Delta R}{dx^2} - (1 + \mu) \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta t}{s} \right] \quad (2-60)$$

a posouvající síla Q_x

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = T_0 \left[\frac{d^3 \Delta R}{dx^3} - (1 + \mu) \cdot \frac{\alpha}{s} \cdot \frac{d \Delta t}{dx} \right] \quad (2-61)$$

a derivací

$$\frac{dQ}{dx} = T_0 \left[\frac{d^4 \Delta R}{dx^4} - (1 + \mu) \frac{\alpha}{s} \frac{d^2 \Delta t}{dx^2} \right] \quad (2-62)$$

Tuto rovnici lze upravit podle rovnice 2-56 na podobný tvar

$$\frac{d^4 \Delta R}{dx^4} + 4 \beta^4 \Delta R = \frac{p(x, t)}{T_0} \quad (2-56a)$$

kde

$$p(x, t) = p - \mu \frac{N_{\alpha}}{R} + \frac{E \cdot s \cdot \alpha \cdot \bar{t}}{R} + T_0 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{\alpha}{s} \frac{d^2 \Delta t}{dx^2} \quad (2-63)$$

kde 3. a 4. člen oproti $p(x)$ vyjadřují vliv teploty. Jako při odvození rovnice 2-56 je obvodový moment M_{φ} vyjádřen na základě Hookova zákona momentem osovým

$$M_{\varphi} = \mu M_x = \mu T_0 \frac{d^2 \Delta R}{dx^2} \quad (2-64a)$$

lze při působení gradientu teploty vyjít z rovnice 2-60

$$M_{\varphi} = T_0 \left[\mu \frac{d^2 \Delta R}{dx^2} - (1 + \mu) \cdot \frac{\alpha}{s} \cdot \Delta t \right] \quad (2-64b)$$

Pro případy, kdy dva nejbližší zdroje koncentrace napětí jsou od sebe vzdáleny o kritické délky $l_{krit 1}$ a $l_{krit 2}$, jež jsou násobkem $1,56 \cdot \sqrt{R s_1}$ a $1,56 \sqrt{R s_2}$ lze použít pro výpočet deformace obecné řešení (2-57)

$$\Delta R = e^{-\beta x} \cdot (C_1 \cdot \sin \beta x + C_2 \cdot \cos \beta x) + \frac{p(x,t) \cdot R^2}{E \cdot s} \quad (2-65)$$

kde pro $p(x,t)$ platí rovnice 2-63. Je-li $p(x,t)$ konstantní nebo lineární funkcí proměnné x , lze spočítat i natočení

$$\nu = \frac{d \Delta R}{dx} = \beta \cdot e^{-\beta x} \cdot [(C_1 - C_2) \cdot \cos \beta x - (C_1 + C_2) \cdot \sin \beta x] + \frac{dp(x,t) R^2}{dx \cdot E s} \quad (2-66)$$

$$\text{křivost } Q = \frac{d^2 \Delta R}{dx^2} = 2 \cdot \beta^2 \cdot e^{-\beta x} (C_2 \cdot \sin \beta x - C_1 \cdot \cos \beta x) \quad (2-67)$$

$$\frac{d^3 \Delta R}{dx^3} = 2 \beta^3 \cdot e^{-\beta x} \cdot [(C_1 - C_2) \cdot \sin \beta x + (C_1 + C_2) \cdot \cos \beta x] \quad (2-68)$$

Výpočet integračních konstant se provede pro $x = 0$ z rovnice 2-60 a 2-61

$$M_x \equiv M_{x0} = T_0 \cdot \left[\left(\frac{d^2 \Delta R}{dx^2} \right)_{x=0} - (1 + \mu) \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta t}{s} \right] \quad (2-69)$$

$$Q_x \equiv Q_{x0} = T_0 \cdot \left[\left(\frac{d^3 \Delta R}{dx^3} \right)_{x=0} - (1 + \mu) \cdot \frac{\alpha}{s} \cdot \frac{d \Delta t}{dx} \right]$$

po dosazení z 2-67 a 2-68

$$C_1 = - \frac{M_{x0}}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2} - (1 + \mu) \cdot \frac{\alpha}{s} \cdot \frac{\Delta t}{2 \cdot \beta^2} \quad (2-70a)$$

$$C_2 = \frac{Q_{x0}}{T_0 \cdot 2 \cdot \beta^3} + \frac{M_{x0}}{T_0 \cdot 2 \cdot \beta^2} + (1 + \mu) \cdot \frac{\alpha}{s} \cdot \frac{1}{2 \cdot \beta^2} \left[\Delta t + \frac{d \Delta t}{dx} \frac{1}{\beta} \right] \quad (2-70b)$$

dosazením integračních konstant do rovnice 2-65 bude

$$\Delta R_x = \left[\frac{M_{x0}}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2} + (1 + \mu) \cdot \frac{\alpha \cdot \Delta t}{s} \frac{1}{2 \cdot \beta^2} \right] \cdot e^{-\beta x} \cdot (\cos \beta x - \sin \beta x) + \left[\frac{Q_{x0}}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^3} + (1 + \mu) \cdot \frac{\alpha}{s} \cdot \frac{d \Delta t}{dx} \frac{1}{2 \cdot \beta^3} \right] \cdot e^{-\beta x} \cdot \cos \beta x + \frac{p(x,t) \cdot R^2}{E \cdot s} \quad (2-71)$$

což se dá zjednodušit zavedením funkcí

$$A(\beta x) = e^{-\beta x} \cdot (\cos \beta x + \sin \beta x)$$

$$B(\beta x) = e^{-\beta x} \cdot (\cos \beta x - \sin \beta x)$$

$$C(\beta x) = e^{-\beta x} \cdot \cos \beta x$$

$$D(\beta x) = e^{-\beta x} \cdot \sin \beta x$$

(2-72)

kde goniometrické funkce jsou vyjádřeny v radiánech. Potom

$$\Delta R_x = \frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2} \left[M_{x0} + (1 + \mu) \frac{T_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{s} \right] \cdot B(\beta x) + \frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^3} \left[Q_{x0} + (1 + \mu) \frac{T_0 \cdot \alpha}{s} \cdot \frac{d \Delta t}{dx} \right] \cdot C(\beta x) + \frac{p(x, t) R^2}{E \cdot s} \quad (2-71a)$$

Podobně lze zjednodušit další derivace pro natočení ψ_x , osový moment M_x a posouvající sílu Q_x a sledovat jejich průběh podél proměnné x

První derivace $\psi_x = \frac{d \Delta R}{dx}$

$$\psi_x = - \frac{1}{T_0 \cdot \beta} \left[M_{x0} + (1 + \mu) \frac{T_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{s} \right] \cdot C(\beta x) - \frac{Q_{x0}}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2} \cdot A(\beta x) + \frac{R^2}{E s} \frac{d p(x, t)}{dx} \quad (2-71b)$$

Druhá derivace vede na $M_x = T_0 \cdot \frac{d^2 \Delta R}{dx^2}$

$$M_x = M_{x0} \cdot A(\beta x) + (1 + \mu) \frac{T_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{s} \cdot [A(\beta x) - 1] + \frac{Q_{x0}}{\beta} \cdot D(\beta x) \quad (2-71c)$$

Třetí derivace vede na $Q_x = T_0 \cdot \frac{d^3 \Delta R}{dx^3}$

$$Q_x = Q_{x0} B(\beta x) - 2 \beta \cdot \left[M_{x0} + (1 + \mu) \frac{T_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{s} \right] \cdot D(\beta x) \quad (2-71d)$$

Dosažením ΔR_x do 2-58a lze vypočítat průběh obvodové síly $N \varphi_x$

$$N \varphi_x = 2R \cdot \beta^2 \cdot \left\{ \left[M_{x0} + (1 + \mu) \frac{T_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{s} \right] \cdot B(\beta x) + \left[\frac{Q_{x0}}{\beta} - (1 + \mu) \frac{T_0 \cdot \alpha}{s} \frac{d \Delta t}{dx} \right] \cdot C(\beta x) \right\} + p(x, t) \cdot R - E \cdot s \cdot \alpha \cdot \bar{\epsilon} + \mu \cdot N_x \quad (2-71e)$$

kde $\frac{E s}{R} \cdot \frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2} = \frac{4 \cdot \beta^4 \cdot T_0 \cdot R}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2} = 2 \cdot R \cdot \beta^2$

Zjednodušení rovnic lze provést pro $\Delta t = 0$, kde potom

$$p(x) = p - \mu \frac{N_x}{R} = p R \cdot \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) \quad \text{a} \quad \frac{R^2}{E s} = \frac{1}{4 \cdot T_0 \cdot \beta^4} \quad (2-72)$$

Pak

$$\Delta R_x = \frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^3} Q_{x0} B(\beta x) + \frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2} M_{x0} C(\beta x) + \frac{p(x) \cdot R^2}{E \cdot s} = \frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2} \left[\frac{Q_{x0}}{\beta} \cdot B(\beta x) + M_{x0} C(\beta x) + \frac{p R \cdot \left(1 - \frac{\mu}{2} \right)}{2 \cdot \beta^2} \right] \quad (2-73a)$$

$$\psi_x = \frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2} \left[-Q_{x0} C(\beta x) - \beta M_{x0} A(\beta x) + \frac{dp(x)}{dx} \frac{1}{2 \cdot \beta^2} \right] \quad (2-73b)$$

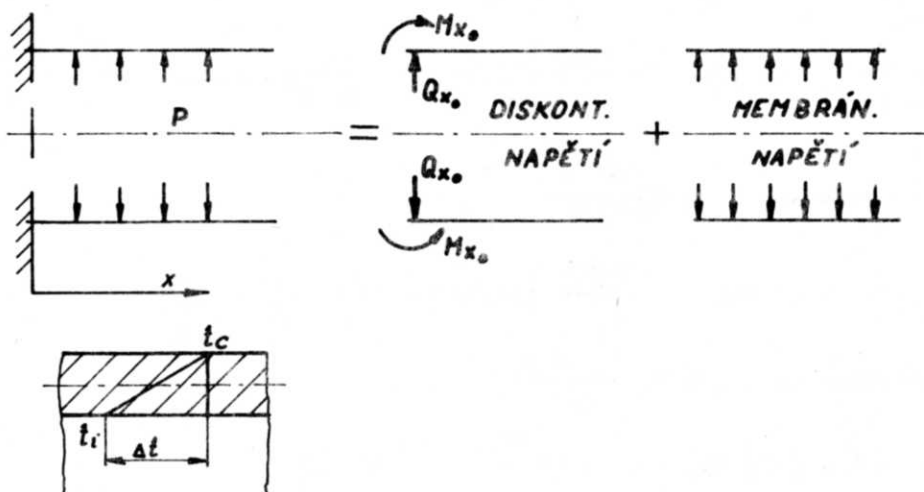
$$M_x = M_{x0} A(\beta x) + \frac{Q_{x0}}{\beta} \cdot D(\beta x) \quad (2-73c)$$

$$Q_x = Q_{x0} B(\beta x) + 2\beta M_{x0} \cdot D(\beta x) \quad (2-73d)$$

$$N_{\varphi x} = 2R\beta^2 \cdot \left[M_{x0} B(\beta x) + \frac{Q_{x0}}{\beta} C(\beta x) \right] \quad (2-73e)$$

2.4.1 Příklad vetknutého válce

Jako příklad nechť slouží vetknutý válec zatížený rovnoměrným vnitřním přetlakem p a teplotním gradientem Δt (obr.2.25).



obr.2.25

Je třeba vypočítat průběh veličin podle rovnic 2-71 pomocí staticky neurčitých veličin M_{x0} a Q_{x0} . V místě $x = 0$ budou extrémy funkcí $A(\beta x) \equiv B(\beta x) \equiv C(\beta x) = 1$ a $D(\beta x) = 0$.

V místě vetknutí musí být jak deformace $(\Delta R)_{x=0}$, tak i natočení $(v)_{x=0}$ nulové. Pro uvedené místo musí proto platit

$$(\Delta R_x)_{x=0} = 0 = \frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2} \left[M_{x0} + (1 + \mu) \cdot \frac{T_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{s} \right] + \frac{Q_{x0}}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^3} + \frac{p(x, t)}{4 \cdot T_0 \cdot \beta^4}$$

$$(v_x)_{x=0} = 0 = - \frac{1}{T_0 \cdot \beta} \left[M_{x0} + (1 + \mu) \cdot \frac{T_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{s} \right] - \frac{Q_{x0}}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2}$$

Vypočtením např. Q_{x0} z 2. rovnice a dosazením do první

$$M_{x0} = \frac{p(x, t)}{2 \beta^2} - (1 + \mu) \cdot \frac{T_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{s}$$

$$Q_{x0} = - \frac{p(x, t)}{\beta}$$

Zpětným dosazením do rovnic 2-71 bude

$$\Delta R_x = \frac{p(x, t) \cdot R^2}{E \cdot s} \left[1 - A(\beta x) \right]$$

$$v_x = \frac{p(x, t) \cdot R^2}{E \cdot s} \cdot \beta \cdot D(\beta x)$$

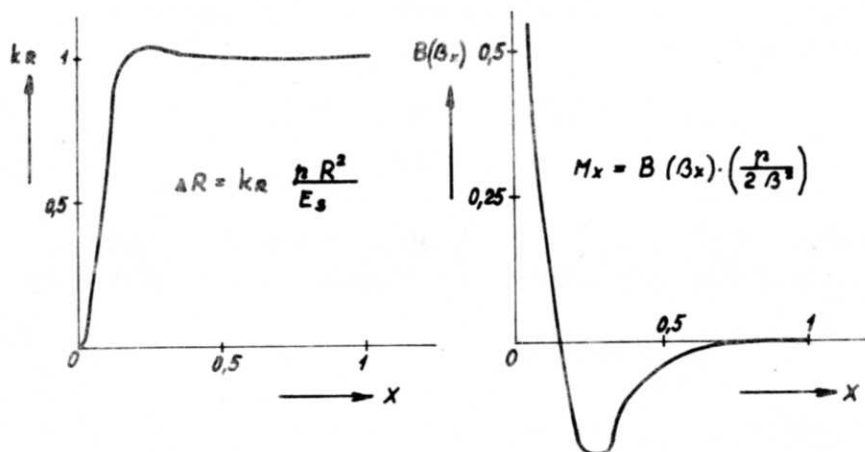
$$M_x = \frac{p(x,t)}{2 \cdot \beta^2} \cdot B(\beta x) - (1 + \mu) \cdot \frac{T_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{s}$$

$$Q_x = - \frac{p(x,t)}{\beta} \cdot C(\beta x)$$

$$M_{\varphi}(x) = \mu \cdot \frac{p(x,t)}{2 \cdot \beta^2} \cdot B(\beta x) - (1 + \mu) \cdot \frac{T_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{s}$$

$$N_{\varphi}(x) = p(x,t) \cdot R \left[1 - A(\beta x) \right] - E_s \cdot \alpha \cdot T - \mu \frac{pR}{2}$$

Pro $p = 1 \text{ MPa}$, $R = 1 \text{ m}$, $s = 0,01 \text{ m}$, $\beta = 12,854 \text{ m}^{-1}$ je průběh deformace ΔR_x a momentu M_x zřejmý z následující tabulky a obrázku 2-26



obr. 2.26

$$\Delta R_x = \frac{p \cdot R^2}{E_s} \cdot [1 - A(\beta x)] = k_R \cdot \frac{p \cdot R^2}{E_s}$$

Vzdálenost x [m]	0,05	0,1	0,2	0,25	0,33	0,5	0,75	1
$x = R/$	R/20	R/10	R/5	R/4	R/3	R/2	3/4 R	R
β_x	0,6427	1,2854	2,5708	3,2135	4,2418	6,427	9,6405	12,854
k_R	0,264	0,657	1,023	1,043	1,019	0,998	1,-	1,-

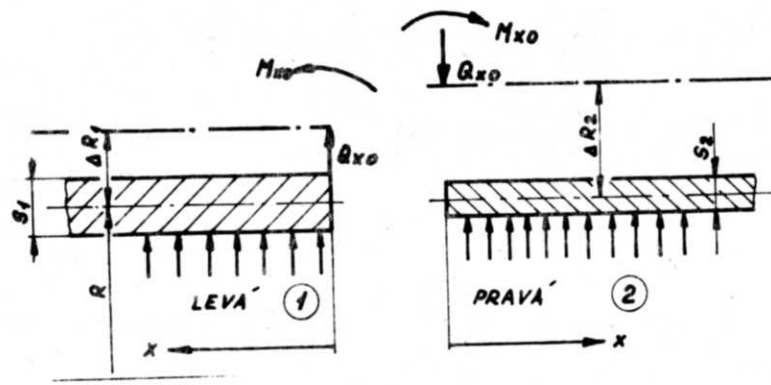
$$M_x = \frac{p}{2\beta^2} B(\beta x)$$

Vzdál. x [m]	0,02	0,05	0,067	0,1	0,2	0,25	0,33
$x = R/$	R/50	R/20	R/15	R/10	R/5	R/4	R/3 a další
β_x	0,257	0,6427	0,857	1,2854	2,5708	3,2135	4,2418
$B(\beta x)$	0,55	0,106	-0,043	-0,187	-0,106	-0,037	$10^{-3} + 10^{-6}$

2.4.2 Řešení spoje s přechodem tloušťky

Jak bylo vidět v předešlém příkladu, bylo třeba z podmínek pro $(\Delta R_x)_{x=0}$

a $(v'_x)_{x=0}$ určit staticky neurčitě veličiny M_{x0} a Q_{x0} . Rovnice představují celkové deformace a natočení spojených konců skořepin. Součin jednotlivých členů s M_{x0} a Q_{x0} představují jednotkové deformace a jednotková natočení. Pro spojení naznačené na obr.2.27 tj. dvou válcových skořepin



obr.2.27

o rozdílné tloušťce s_1 a s_2 vznikne při působení vnitřního přetlaku rozdílné deformace ΔR_1 a ΔR_2 . Působením síly Q_{x0} a momentu M_{x0} součet přemístění (deformací) a natočení se musí rovnat nule, tj.

$$\sigma_{11} Q_{x0} + \sigma_{12} M_{x0} + \sigma_{1p} = 0 \quad (2-74a)$$

$$\sigma_{21} Q_{x0} + \sigma_{22} M_{x0} + \sigma_{2p} = 0 \quad (2-74b)$$

Tak jednotkové přemístění σ_{11} je dáno součtem koncových bodů v místě styku ve směru jednotkových sil, tedy pro levou skořepinu podle rovnice 2-73a

$$\sigma_{11L} = \frac{1}{2 \cdot T_{01} \cdot \beta_1^3} \quad (2-75a)$$

a pro pravou skořepinu

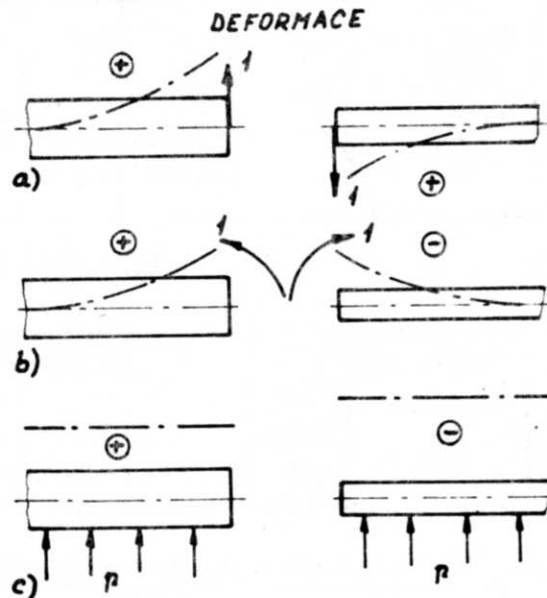
$$\sigma_{11P} = \frac{1}{2 \cdot T_{02} \cdot \beta_2^3} \quad (2-75b)$$

V indexu uvedených přemístění první číslo značí: 1- deformaci, 2- natočení; druhé číslo nebo písmeno: 1- od síly, 2- od momentu, p- od membránové síly. Podle obr. 2.28a) kladné směry přemístění směřují ve směru působení sil Q . V uvedeném případě

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11L} + \sigma_{11P} = \Delta R_Q^1 = \\ &= \frac{1}{2 T_{01} \beta_1^3} + \frac{1}{2 T_{02} \beta_2^3} \quad (2-75c) \end{aligned}$$

Podobný postup lze provést u přemístění σ_{12} od momentu (obr.2.28b).

Podle zavedené zvyklosti o kladných směrech přemístění musí platit, že



obr.2.28

$$\sigma_{12L} = \frac{1}{2 \cdot T_{01} \cdot \beta_1^2} \quad (2-76a) \quad \text{ale} \quad \sigma_{12P} = -\frac{1}{2 \cdot T_{02} \cdot \beta_2^2} \quad (2-76b)$$

Celkově

$$\sigma_{12} = \Delta R_M^1 = \frac{1}{2 \cdot T_{01} \cdot \beta_1^2} - \frac{1}{2 \cdot T_{02} \cdot \beta_2^2} \quad (2-76c)$$

Přemístění od vnějšího zatížení $p(x)$ - (obr.2.28c)

$$\sigma_{1p} \equiv \Delta R_p = \frac{p(x) \cdot R^2}{E s_1} - \frac{p(x) \cdot R^2}{E s_2} \quad (2-77)$$

Deformační rovnici 2-74a lze nyní symbolicky přepsat do tvaru

$$\Delta R_Q^1 \cdot Q_{x0} + \Delta R_M^1 \cdot M_{x0} + \Delta R_p = 0 \quad (2-74c)$$

nebo dosazením za jednotlivá přemístění z 2-75c, 2-76c a 2-77

$$\left[\frac{1}{2 \cdot T_{01} \cdot \beta_1^2} + \frac{1}{2 \cdot T_{02} \cdot \beta_2^2} \right] Q_{x0} + \left[\frac{1}{2 \cdot T_{01} \cdot \beta_1^2} - \frac{1}{2 \cdot T_{02} \cdot \beta_2^2} \right] M_{x0} + \frac{p(x) \cdot R^2}{E} \left[\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} \right] = 0 \quad (2-74d)$$

Rovnice (2-74b) je rovnicí společné tečny. Kladné směry natočení určují natočení od momentů M_{x0} (obr.2.29); z uvedeného důvodu lze nyní psát, že

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \sigma_{22L} + \sigma_{22P} = \\ &= \frac{1}{T_0 \cdot \beta_1} + \frac{1}{T_{02} \cdot \beta_2} \equiv \nu_M \quad (2-78) \end{aligned}$$

S ohledem na předpoklad o kladném směru natočení musí být natočení od jednotkových sil nesouhlasné (obr.2.29) a tudíž

$$\sigma_{21} \equiv \nu_Q^1 = \frac{1}{2 \cdot T_{01} \cdot \beta_1^2} - \frac{1}{2 \cdot T_{02} \cdot \beta_2^2} \quad (2-79)$$

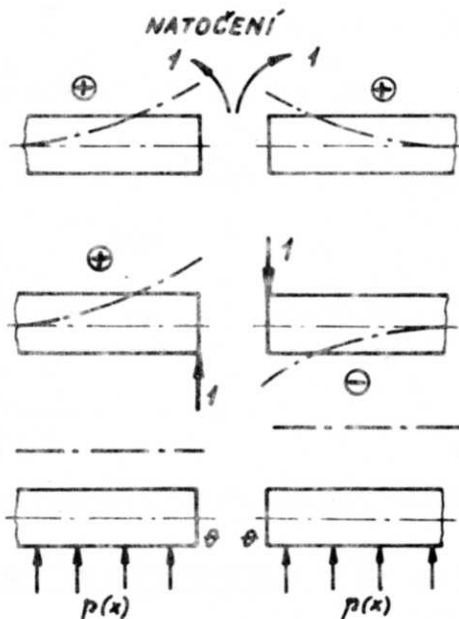
Ze srovnání s deformacemi je vidět, že velikost σ_{21} je stejná jako σ_{12} ; to je též známé z teorie pružnosti z Maxwell-Bettiho věty o vzájemnosti posuvů, používané u prutových soustav $\sigma_{21} \equiv \sigma_{12}$.

Natočení od vnějšího zatížení - rovnoměrného tlaku $-p-$ bude jednoduché; protože

konce skořepin se účinkem tlaku p nepootočí, musí platit, že $\sigma_{2p} \equiv \nu_p = 0$; Nyní již lze upravit rovnici 2-74b podobně jako 2-74c a 2-74d do tvaru

$$\nu_Q^1 \cdot Q_{x0} + \nu_M^1 \cdot M_{x0} + \nu_p = 0 \quad (2-74e)$$

nebo dosazením za jednotlivá natočení



obr.2.29

$$\left[\frac{1}{2 \cdot T_{01} \cdot \beta_1^2} - \frac{1}{2 \cdot T_{02} \cdot \beta_2^2} \right] \cdot Q_{x0} + \left[\frac{1}{T_{01} \cdot \beta_1} + \frac{1}{T_{02} \cdot \beta_2} \right] \cdot M_{x0} + 0 = 0 \quad (2-74f)$$

Z rovnice 2-74 a 2-74f je již možno vypočítat neznámé Q_{x0} a M_{x0} . Dosazením do rovnic 2-71 lze spočítat průběh všech veličin deformačních ΔR_x , v_x^2 , silových Q_x , $N_{\varphi x}$ a momentových M_x , $M_{\varphi x}$ v závislosti na vzdálenosti od místa vzruchu. Jak bylo ukázáno na příkladu vetknutého válce, jsou tyto průběhy diskontinuální a tudíž i napětí vypočtená z těchto sil a momentů musí mít diskontinuální charakter. Proto se takto i tato napětí označují; v osové směru

$$\sigma_x^d = \pm \frac{M_x}{W} = \pm \frac{6 \cdot M_x}{s^2} \quad (2-80a)$$

Řešení rovnic 2-57 a 2-65 vycházela z předpokladu konstantní hodnoty osové síly N_x , tedy membránové síly. Celkové sekundární napětí je dáno pak součtem membránové a diskontinuální složky

$$\sigma_x^z = \sigma_x \pm \sigma_x^d = \frac{N_x}{s} \pm \frac{6 \cdot M_x}{s^2} \quad (2-81a)$$

Znaménko + nebo - i diskontinuální složky značí, že hodnota se znaménkem + platí pro vnitřní a - pro vnější vlákno stěny skořepiny. Podobně pro obvodové diskontinuální napětí σ_{φ}^d při znalosti (2-64a), že $M_{\varphi} = \mu \cdot M_x$

$$\sigma_{\varphi x} = \frac{N_{\varphi x}}{s} \pm \frac{6 \cdot M_{\varphi}}{s^2} = \frac{N_{\varphi x}}{s} \pm \mu \cdot \frac{6 \cdot M_x}{s^2} = \frac{N_{\varphi x}}{s} \pm \mu \cdot \sigma_x^d \quad (2-80b)$$

a celkové napětí

$$\sigma_{\varphi}^z = \sigma_{\varphi} \pm \sigma_{\varphi}^d = \frac{N_{\varphi}}{s} + \frac{N_{\varphi x}}{s} \pm \mu \cdot \frac{6 \cdot M_x}{s^2} \quad (2-81b)$$

Funkce $p(x)$ z rovnice 2-63 při působení přetlaku p

$$p(x) = p - \mu \cdot \frac{N_x}{R}$$

a jak bylo řečeno N_x je osová membránová síla; pro válec $N_x = pR/2$ a tedy (a je-li pro ocel $\mu = 0,3$)

$$p(x) = p - \frac{\mu}{R} \cdot \frac{pR}{2} = p \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) = 0,85 p \approx \frac{6}{7} p \quad (2-82)$$

V následujících příkladech bude pro $p(x)$ uváděn tento vztah.

2.4.3 Válec s prstencovou výztuhou

V návaznosti na řešení popisované v předchozí kapitole bude v tomto případě proveden rozbor situace, kdy do spojení válcových plášťů s rozdílnými tloušťkami bude vložena výztuha, v nejjednodušším případě obdélníkového tvaru. Výztuha válcových plášťů slouží různým účelům. Zachycují síly, které nemůže membrána přenášet s ohledem na velikost koncentrátoru napětí nebo při ztrátě stability. Dále slouží jako nosné prvky pro vestavby, izolaci apod. Protože však tyto výztuhy brání volné deformaci válce, je nutno předpokládat, že i ony vytvářejí poruchy membránového napětí. Lze-li považovat šířku výztuhy za relativně malou, lze použít dříve popsaného způsobu výpočtu a uvolnit spoj. Spojení se nahradí v tomto případě sta-

ticky neurčitými veličinami Q_{x0} a M_{x0} jak na levé, tak i na pravé straně výztuhy (obr.2.30). Pro tento případ je ovšem třeba napsat 2 rovnice pro deformaci (1. a 3.rovnice) a 2 rovnice pro natočení (2. a 4.rovnice)

$$\sigma_{11} Q_{x01} + \sigma_{12} M_{x01} + \sigma_{13} Q_{x02} + \sigma_{14} M_{x02} + \sigma_{1p} = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_{21} Q_{x01} + \sigma_{22} M_{x01} + \sigma_{23} Q_{x02} + \sigma_{24} M_{x02} + \sigma_{2p} = 0 \quad (2)$$

$$\sigma_{31} Q_{x01} + \sigma_{32} M_{x01} + \sigma_{33} Q_{x02} + \sigma_{34} M_{x02} + \sigma_{3p} = 0 \quad (3)$$

$$\sigma_{41} Q_{x01} + \sigma_{42} M_{x01} + \sigma_{43} Q_{x02} + \sigma_{44} M_{x02} + \sigma_{4p} = 0 \quad (4)$$

Výhodou naznačeného postupu je způsob zápisu, který vede automaticky ke správnému napsání rovnic spojitosti nehledě na zavedenou znaménkovou konvenci. První deformační rovnice se sestaví podle následující úvahy: přemístění levého pláště podobně jako v 2-75a od jednotkové síly

$$\sigma_{11L} = \frac{1}{2 \cdot T_{01} \cdot \beta_1^3}$$

a radiální stlačení výztužného prstence za předpokladu, že jednotkové síly působí v ose procházející jeho těžištěm

$$\sigma_{11V} = \frac{1 \cdot R^2}{E \cdot A_V}$$

Jednotková deformace

$$\sigma_{11} = \sigma_{11L} + \sigma_{11V} = \frac{1}{2 \cdot T_{01} \cdot \beta_1^3} + \frac{R^2}{E \cdot A_V}$$

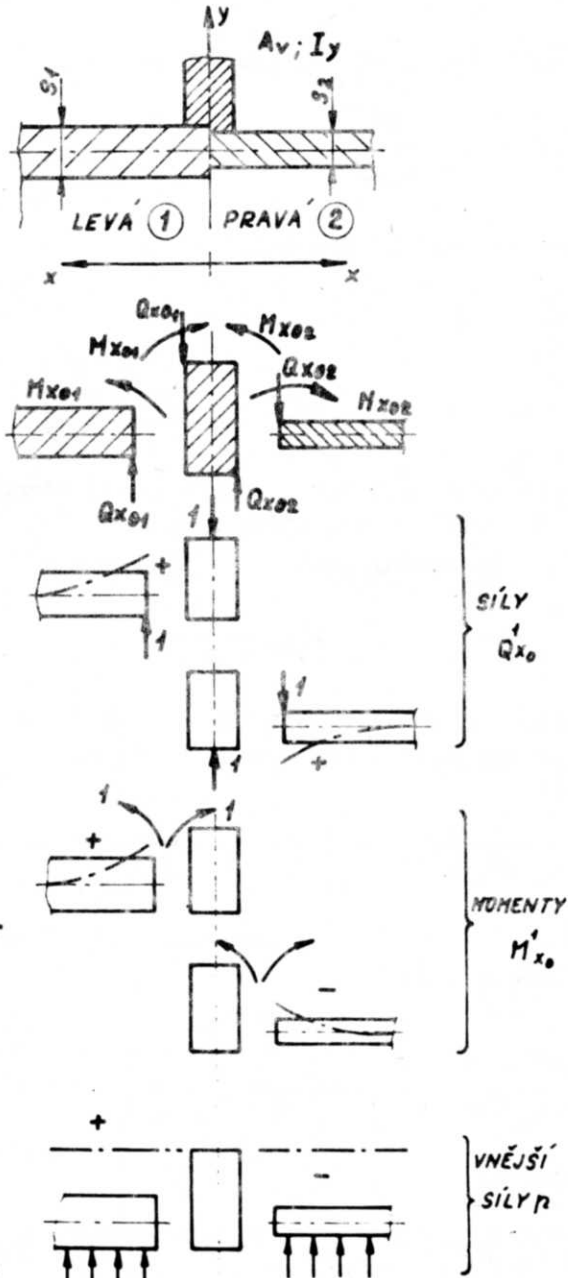
Deformace od momentu σ_{12} s ohledem na již zavedený předpoklad o působišti síly Q_{x01} v ose výztuhy (obr.2.31) musí být člen $\sigma_{12V} = 0$ a rovněž

$$\sigma_{34V} = 0; \text{ proto}$$

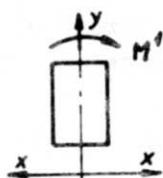
$$\sigma_{12} = \frac{1}{2 \cdot T_{01} \cdot \beta_1^2} \quad a$$

$$\sigma_{34} = \frac{1}{2 \cdot T_{02} \cdot \beta_2^2}$$

Přemístění $\sigma_{13} = \sigma_{13P} + \sigma_{13V}$; síla z pravé strany válce nemá na levou stranu válce vliv, proto $\sigma_{13P} = 0$;



obr. 2.30



σ_{13V} vyjadřuje vliv síly roztahující prstenec výztuhy - obdobně jako σ_{11V} bude hodnota posuvu stejná, ale s opačným znaménkem

$$\sigma_{13V} = -\frac{R^2}{E \cdot A_V}$$

obr.2.31

Moment z pravé strany nemá na deformaci vlevo vliv a proto $\sigma_{14} = 0$.

Přemístění vlevo od zatížení $p(x)$ je opět analogické řešení podle 2-77, přičemž deformace prstence lze vůči deformaci pláště zanedbat

$$\sigma_{1p} = \frac{p(x) \cdot R^2}{E \cdot s}$$

Celkem lze rovnici (1) přepsat do tvaru

$$\left[\frac{1}{2 \cdot T_{01} \cdot \beta_1^3} + \frac{R^2}{E \cdot A_V} \right] Q_{x01} + \frac{1}{2 \cdot T_{01} \cdot \beta_1^2} M_{x01} - \frac{R^2}{E \cdot A_V} Q_{x02} + \frac{p(x) \cdot R^2}{E \cdot s_1} = 0 \quad (1)$$

Druhá rovnice (2) pro natočení levé části válce vychází již ze známého vztahu, že $\sigma_{21} \equiv \sigma_{12}$ a tedy $\sigma_{21} = 1/(2 \cdot T_{01} \cdot \beta_1^2)$. Natočení od jednotkového momentu z rovnice 2-78 pro válec a výztuhu (obr.2.31) $\sigma_{22} = 1R^2/EJ_y$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{T_{01} \cdot \beta_1} + \frac{R^2}{E \cdot J_y}$$

Podobně jako jednotková síla z pravé strany neměla vliv na deformaci z levé strany, nemá vliv na pootočení a proto $\sigma_{23} = 0$. Smysl účinku momentu na výztuhu z σ_{24} je opačný jako u σ_{22} , proto

$$\sigma_{24} = -\frac{R^2}{E \cdot J_y}$$

Natočení od vnějších sil $\sigma_{2p} = 0$.

Celkem lze opět napsat rovnici (2) ve tvaru

$$\frac{1}{2 \cdot T_{01} \cdot \beta_1^2} \cdot Q_{x01} + \left[\frac{1}{T_{01} \cdot \beta_1} + \frac{R^2}{E \cdot J_y} \right] \cdot M_{x01} = \frac{R^2}{E \cdot J_y} \cdot M_{x02} = 0 \quad (2)$$

Nyní se již lze řídit podobnými úvahami při sestavování rovnic (3) a (4) pro pravou stranu válce.

Třetí rovnice pro deformace

$$-\frac{R^2}{E \cdot A_V} Q_{x01} + \left[\frac{1}{2 \cdot T_{02} \cdot \beta_2^3} + \frac{R^2}{E \cdot A_V} \right] \cdot Q_{x02} - \frac{1}{2 \cdot T_{02} \cdot \beta_2^2} M_{x02} - \frac{p(x) \cdot R^2}{E \cdot s_2} = 0 \quad (3)$$

a natočení

$$-\frac{R^2}{E \cdot J_y} M_{x01} - \frac{1}{T_{02} \cdot \beta_2^2} \cdot Q_{x02} + \frac{1}{T_{02} \cdot \beta_2} \cdot M_{x02} = 0 \quad (4)$$

Bude-li nyní tloušťka levého i pravého válce stejná, tedy bude-li $s_1 \equiv s_2$, pak se jedná o symetrickou úlehu, při níž platí

$$Q_{x01} = -Q_{x02} \quad \text{a} \quad M_{x01} = M_{x02}$$

Pak místo 4 rovnic postačí 2

$$\left[\frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^3} + \frac{2 \cdot R^2}{E \cdot A_V} \right] \cdot Q_{x0} + \frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2} \cdot M_{x0} + \frac{p(x) \cdot R^2}{E \cdot s} = 0$$

$$\frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2} \cdot Q_{x0} + \frac{M_{x0}}{T_0 \cdot \beta} = 0$$

Zavedením $R^2/E_s = 1/(4T_0 \cdot \beta^4)$ lze již Q_{x0} a M_{x0} vypočítat.
Tak

$$Q_{x0} = -2 \cdot \beta \cdot M_{x0} \quad \text{a} \quad M_{x0} = \frac{p(x)}{2 \cdot \beta^2 + \frac{4 \cdot \beta \cdot s}{A_V}}$$

Velikost momentu M_{x0} ovlivňuje 2. člen ve jmenovateli; vyjadřuje tuhost. Čím bude menší, tím více bude zmenšovat M_{x0} a pro limitní případ, kdy $A = 0$, budou i Q_{x0} i M_{x0} nulové, pro $A \rightarrow \infty$ přejdou do tvaru pro vetknutý válec, tedy

$$M_{x0} = \frac{p(x)}{2 \cdot \beta^2} \quad \text{a} \quad Q_{x0} = \frac{-p(x)}{\beta}$$

2.4.4 Válec s rovným dnem

Podobně jako v předchozích případech se spoj uvolní a nahradí veličinami Q_{x0} a M_{x0} (obr. 2.32). Zanedbáním deformací desky od jednotkových sil a vnějších sil momentů se výrazy zjednoduší a platí pouze pro válec

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^3} ; \quad \sigma_{12} = \frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2} \quad \text{a} \quad \sigma_{1p} = \frac{p(x) \cdot R^2}{E \cdot s}$$

V rovnici pro natočení platí $\sigma_{21} \equiv \sigma_{12}$. Zbývá již jen určit σ_{22} a σ_{2p} . Z učebnic pružnosti např. [2-15] lze nalézt pro podepřenou desku zatíženou rovnoměrným tlakem p , že natočení na okraji $\sigma_{2pD} = -pR^3 / 8T_{0D}(1 + \mu)$, kde T_{0D} je ohybová tuhost desky $T_{0D} = E s_D^3 / 12(1 - \mu^2)$. Natočení od jednotkového momentu působícího na okraji podepřené desky lze vyjádřit vztahem

$$\sigma_{22D} = \frac{R}{T_{0D} \cdot (1 + \mu)}$$

Celkové natočení u válce a desky

$$\sigma_{22} = \frac{1}{T_0 \cdot \beta} + \frac{R}{T_{0D} \cdot (1 + \mu)}$$

S ohledem na to, že σ_{2p} u válce je nulová a u desky točí na opačnou stranu než jednotkový moment

$$\sigma_{2p} = -\frac{p}{8 \cdot T_{0D}} \frac{R^3}{1 + \mu}$$

Celkově mají rovnice pro deformaci a natočení po dosazení za $R^2/E_s = 1/4T_0 \cdot \beta^4$ tvar

$$\frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^3} Q_{x0} + \frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2} M_{x0} + \frac{p(x)}{4 \cdot T_0 \cdot \beta^4} = 0$$

$$\frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta^2} Q_{x0} + \left[\frac{1}{T_0 \cdot \beta} + \frac{R}{T_{0D} \cdot (1 + \mu)} \right] M_{x0} - \frac{p \cdot R^3}{8 \cdot T_{0D} \cdot (1 + \mu)} = 0$$

Dosažením za $p(x) = p(1 - \mu/2)$ lze vypočítat z těchto rovnic veličiny Q_{x0} a M_{x0} .

$$Q_{x0} = -\beta \cdot \left[M_{x0} + \frac{p \cdot (2 - \mu)}{4 \cdot \beta^2} \right]$$

$$M_{x0} = \frac{\frac{p(2 - \mu)}{8 \cdot T_0 \cdot \beta^3} + \frac{p \cdot R^3}{8 \cdot T_{0D} \cdot (1 + \mu)}}{\frac{1}{2 \cdot T_0 \cdot \beta} + \frac{R}{T_{0D} \cdot (1 + \mu)}} = \frac{\frac{p \cdot (2 - \mu)}{8 \cdot \beta^3} + \frac{p \cdot R^3}{8 \cdot (1 + \mu)} \left(\frac{s}{s_D} \right)^3}{\frac{1}{2 \cdot \beta} + \frac{R}{1 + \mu} \left(\frac{s}{s_D} \right)^3}$$

Krajní případy, které lze ovlivnit tloušťkou s_D :

1) $s_D \gg s$; pak

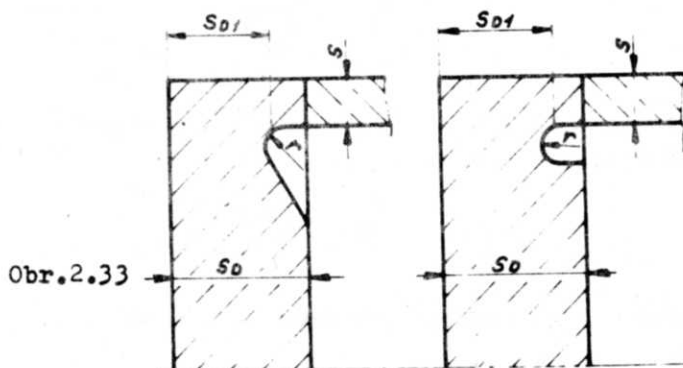
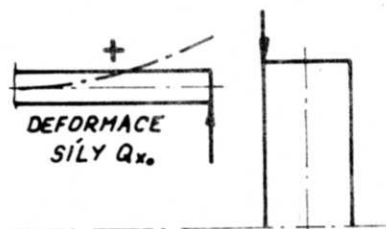
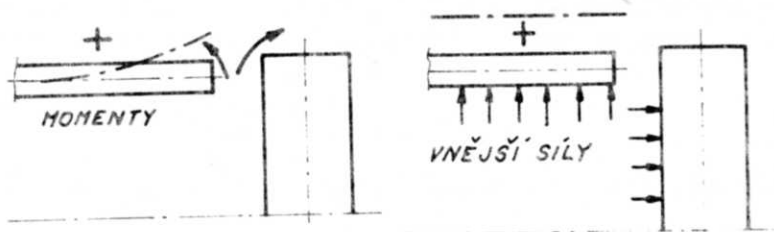
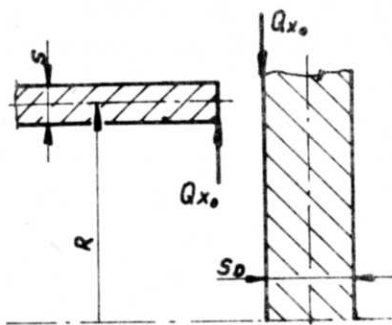
$$M_{x0} = \frac{p}{2 \cdot \beta^2} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) ; \quad Q_{x0} = -\frac{p}{\beta} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

a to odpovídá vetknutému válci

2) $s \gg s_D$; pak

$$M_{x0} = \frac{p \cdot R^2}{8} ; \quad Q_{x0} = -\beta \cdot \frac{p \cdot R^2}{8} - \frac{p}{2 \cdot \beta} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

a to odpovídá vetknuté desce. Ohybový moment bude nejmenší u vetknutého válce (velmi silného dna) a bude se zvětšovat do druhého extrému (vetknuté desky). Cílem konstrukčních úprav je zmenšení ohybového momentu u okraje desky. Toho lze docílit např. vytvořením přechodu podle obr.2.33, nebo zesílením stěny válce v blízkosti spoje.



Obr. 2.32

Obr.2.33

Literatura

- [2- 1] Flügge,W.: Statik und Dynamik der Schalen, Springer, Berlin 1962
- [2- 2] Girkmann,K.: Flächentragwerke, Springer, Wien 1963
- [2- 3] Klapp,E.: Festigkeit im Apparate- und Anlagenbau, Werner - Verlag 1970
- [2- 4] Kilčevskij,N.A.: Osnovy analitičeskoj mehaniki oboloček, Kijev 1963
- [2- 5] Křupka,V., Schneider,P.: Stavba chemických zařízení I - Skořepiny tlakových nádob a nádrží, SNTL 1981
- [2- 6] Křupka,V.: K výpočtu vystužení symetrických odboček tlakového potrubí o větším průměru, Sborník VAAZ 3 (56) 1960, str.189-203
- [2- 7] Křupka,V.: Rozbor namáhání výztuh kuželových odbočnic tlakového potrubí o velkém průměru, Sborník VAAZ 4 (67) 1961, str.111-122
- [2- 8] Lukavský, J., Havelka,K., Ječmen,J., Sigl,F.: Konstrukce výrobních zařízení, Ediční středisko ČVUT 1986
- [2- 9] Lukavský,J.: Konstrukce aparátů, Ediční středisko ČVUT 1980
- [2-10] Mason,J.: Silos und Behälter auf Einzelstützen, Bautechnik 41, str.151-155, 1964
- [2-11] Placák,V., Kunc,J.: Výpočet napjatosti skořepin, SNTL 1966
- [2-12] Ržanicyn,A.R.: Rasčet tenkostěnných prostranstvennych konstrukcij, Moskva 1964
- [2-13] Schwaigerer,S.: Festigkeitsberechnung des Dampfkessel-, Behälter- und Rohrleitungsbaues, Springer, Berlin 1970
- [2-14] Timošenko : Theory of Plates and Shells, Mc.Graw-Hill, N.York 1959
- [2-15] Timošenko,Š.: Pružnost a pevnost I,II, Techn. věd. vydavatelství Praha 1951
- [2-16] Titze,H.: Elemente des Apparatebaues, Springer, Berlin 1967
- [2-17] Turner,C.E.: Introduction to Plate and Shell Theory, Longmann, Londýn 1965
- [2-18] Goldenveiser,A.L.: Teorija uprugich tenkich oboloček, Gostechizdat, Moskva 1953
- [2-19] Láncoš,J.: Praktický výpočet membranových napětí gulových škrupin zatážených osamelými silami i spojitým zatážením, Prostorové ocel. konstrukce, Tech. zprávy VŽKG, č.4, 1968, str.83-122